This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

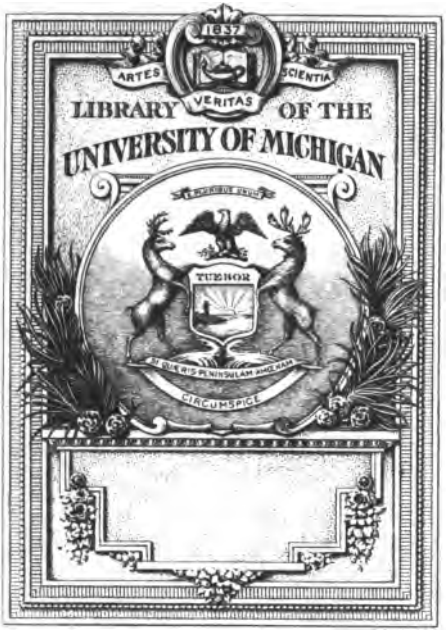
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



Digitized by Google

MATHEMATICS
QA
5
.K

Digitized by Google

Digitized by Google

1803-8

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

ehemals Professoren der Mathematik zu Halle und Leipzig

und beendigt

von

Johann August Grunert,

Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.
Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Erste Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Fünfter Theil. Zweiter Band.

V bis Z.

Leipzig, 1831.

Bey E. B. Schwickert.

Digitized by Google

Digitized by Google

V.

Variation einer Function, s. Variationsrechnung.

Variationen gegebener Dinge oder Elemente in der Combinationslehre sind alle mögliche Verbindungen derselben zugleich mit allen möglichen Versetzungen, also Combinationen mit Permutationen (S. diese Artt.). Alle, eine gleiche Anzahl Elemente enthaltenden, Variationen werden zu einerlei Klasse gerechnet; die gleiche Anfangselemente haben, bilden einerlei Ordnung. Man unterscheidet Variationen überhaupt ohne und mit Wiederholungen, jenachdem jedes Element nur ein oder mehrere Mal in jeder einzelnen Complexion vorkommen darf. Verbindet man eine Buchstabenreihe mit der natürlichen Zahlenreihe:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
a, b, c, d, e, f, ...,

legt jedem Element einen bestimmten Zahlenwerth nach seiner Stelle, einen bestimmten Localwerth, bei, und bildet nun die Variationen nach dem Gesetze, daß in jeder Complexion die Summe der Stellenzahlen eine bestimmte Zahl ist; so hat man Variationen zu einer bestimmten Summe. Nach der Hindenburgschen Charakteristik werden die 1te, 2te, 3te, 4te Klasse u. s. f.

Digitized by Google

der Variationen ohne und mit Wiederholungen, und zur Summe n, durch A', B', C', D', ...; $'A$, $'B$, $'C$, $'D$, ...; ^nA, ^nB, ^nC, ^nD, ..., bezeichnet.

1. Hat man die mte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen für n Elemente; so leitet man daraus offenbar die $(m+1)$te Klasse ab, wenn man jeder Complexion alle die Elemente nach der Reihe vorsetzt, welche sie nicht enthält, so daß also aus jeder Complexion der mten Klasse $n-m$ Complexionen der $(m+1)$ten Klasse entspringen. Bezeichnen wir also mit Hindenburg die Anzahl der Complexionen durch nf(numerus specierum); so ist offenbar

$$nf\overset{+1}{M'} = nfM'.(n-m),$$

und, wenn man auf diese Art weiter schließt:

$$\begin{aligned} nf\overset{+1}{M'} &= nfM'.(n-m) \\ &= nf\overset{-1}{M'}.(n-m+1)(n-m) \\ &= nf\overset{-2}{M'}.(n-m+2)(n-m+1)(n-m) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &= nfA'.(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m); \end{aligned}$$

folglich, da, bei n Elementen, offenbar $nfA' = n$ ist; wenn man zugleich $m+1$ mit m vertauscht, bei n Elementen:

$$nfM' = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

d. h. die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen der mten Klasse für n Elemente

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

welches sich auch leicht aus der Theorie der Combinationen in Verbindung mit den Permutationen, hätte finden lassen.

2. Die nte Klasse ist offenbar die letzte, und folglich die Gesammtzahl der Variationen ohne Wiederholungen in allen Klassen:

Digitized by Google

$$n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\ldots+n(n-1)\ldots 1,$$

Bezeichnen wir diese Anzahl bei n und n — 1 Elementen durch [n] und [n—1]; so ist

$$[n]=n\{1+(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+(n-1)\ldots 1\},$$

d. i.

$$[n]=\{1+[n-1]\}.n,$$

nach welcher Relation die Berechnung leicht successive für $n=1, 2, 3, 4$, u. s. f. angestellt, und eine Tafel entworfen werden kann.

3. Für Variationen mit Wiederholungen erhält man aus $'M$ offenbar $\overset{+1}{'M}$, wenn man jede Complexion in $'M$ mit jedem der gegebenen n Elemente verbindet; so daß also

$$n\int\overset{+1}{'M}=n\int'M.n,$$

und, wenn man so weiter schließt:

$$n\int\overset{+1}{'M}=n\int'M.n=n\int\overset{-1}{'M}.n^2$$
$$=n\int\overset{-2}{'M}.n^3=\ldots=n\int'A.n^m=n^{m+1},$$

weil auch hier offenbar $n\int'A=n$ ist. Also $n\int'M=n^m$, oder die Anzahl der Variationen der mten Klasse mit Wiederholungen für n Elemente $=n^m$. Die Anzahl dieser Variationen in den ersten m Klassen ist also

$$=n+n^2+n^3+\ldots+n^m=\frac{n(n^m-1)}{n-1}.$$

4. Was nun ferner die Anzahl der Variationen zur Summe n der mten Klasse mit Wiederholungen betrifft; so lassen sich diese Variationen abtheilen, 1) in solche, die mit 1 anfangen, deren so viele sind, wie in $^{n-1}\overset{-1}{M}$; 2) in solche, die mit 2 anfangen, deren so viele sind, wie in $^{n-2}\overset{-1}{M}$; 3) in solche, die mit 3 anfan-

Digitized by Google

Digitized by Google

1803-8

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung,

angefangen

von

Georg Simon Klügel,

fortgesetzt

von

Carl Brandan Mollweide,

ehemals Professoren der Mathematik zu Halle und Leipzig

und beendigt

von

Johann August Grunert,

Dr. und Professor der Mathematik zu Brandenburg a. d. H.
Ehrenmitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Erfurt.

Erste Abtheilung.

Die reine Mathematik.

Fünfter Theil. Zweiter Band.

V bis Z.

Leipzig, 1831.

Bey E. B. Schwickert.

Digitized by Google

Digitized by Google

V.

Variation einer Function, s. Variationsrechnung.

Variationen gegebener Dinge oder Elemente in der Combinationslehre sind alle mögliche Verbindungen derselben zugleich mit allen möglichen Versetzungen, also Combinationen mit Permutationen (S. diese Artt.). Alle, eine gleiche Anzahl Elemente enthaltenden, Variationen werden zu einerlei Klasse gerechnet; die gleiche Anfangselemente haben, bilden einerlei Ordnung. Man unterscheidet Variationen überhaupt ohne und mit Wiederholungen, jenachdem jedes Element nur ein oder mehrere Mal in jeder einzelnen Complexion vorkommen darf. Verbindet man eine Buchstabenreihe mit der natürlichen Zahlenreihe:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...
a, b, c, d, e, f, ... ,

legt jedem Element einen bestimmten Zahlenwerth nach seiner Stelle, einen bestimmten Localwerth, bei, und bildet nun die Variationen nach dem Gesetze, daß in jeder Complexion die Summe der Stellenzahlen eine bestimmte Zahl ist; so hat man Variationen zu einer bestimmten Summe. Nach der Hindenburgschen Charakteristik werden die 1te, 2te, 3te, 4te Klasse u. s. f.

Digitized by Google

der Variationen ohne und mit Wiederholungen, und zur Summe n, durch A', B', C', D', ...; $'A$, $'B$, $'C$, $'D$, ...; ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$, ${}^nD$, ..., bezeichnet.

1. Hat man die mte Klasse der Variationen ohne Wiederholungen für n Elemente; so leitet man daraus offenbar die $(m+1)$te Klasse ab, wenn man jeder Complexion alle die Elemente nach der Reihe vorsetzt, welche sie nicht enthält, so daß also aus jeder Complexion der mten Klasse $n-m$ Complexionen der $(m+1)$ten Klasse entspringen. Bezeichnen wir also mit Hindenburg die Anzahl der Complexionen durch $n\int$(numerus specierum); so ist offenbar

$$n\int \overset{+1}{M'} = n\int M'.(n-m),$$

und, wenn man auf diese Art weiter schließt:

$$\begin{aligned} n\int \overset{+1}{M'} &= n\int M'.(n-m) \\ &= n\int \overset{-1}{M'}.(n-m+1)(n-m) \\ &= n\int \overset{-2}{M'}.(n-m+2)(n-m+1)(n-m) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ &= n\int A'.(n-1)\ldots(n-m+1)(n-m); \end{aligned}$$

folglich, da, bei n Elementen, offenbar $n\int A' = n$ ist; wenn man zugleich $m+1$ mit m vertauscht, bei n Elementen:

$$n\int M' = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

d. h. die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen der mten Klasse für n Elemente

$$= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1),$$

welches sich auch leicht aus der Theorie der Combinationen in Verbindung mit den Permutationen, hätte finden lassen.

2. Die nte Klasse ist offenbar die letzte, und folglich die Gesammtzahl der Variationen ohne Wiederholungen in allen Klassen:

Digitized by Google

$$n+n(n-1)+n(n-1)(n-2)+\ldots+n(n-1)\ldots 1,$$

Bezeichnen wir diese Anzahl bei n und n — 1 Elementen durch [n] und [n—1]; so ist

$$[n]=n\{1+(n-1)+(n-1)(n-2)+\ldots+(n-1)\ldots 1\},$$

d. i.

$$[n]=\{1+[n-1]\}.n,$$

nach welcher Relation die Berechnung leicht successive für $n=1, 2, 3, 4$, u. s. f. angestellt, und eine Tafel entworfen werden kann.

3. Für Variationen mit Wiederholungen erhält man aus $'M$ offenbar $'\overset{+1}{M}$, wenn man jede Complexion in $'M$ mit jedem der gegebenen n Elemente verbindet; so daß also

$$n\int'\overset{+1}{M}=n\int'M.n,$$

und, wenn man so weiter schließt:

$$n\int'\overset{+1}{M}=n\int'M.n=n\int'\overset{-1}{M}.n^2$$
$$=n\int'\overset{-2}{M}.n^3=\ldots=n\int'A.n^m=n^{m+1},$$

weil auch hier offenbar $n\int'A=n$ ist. Also $n\int'M=n^m$, oder die Anzahl der Variationen der mten Klasse mit Wiederholungen für n Elemente $=n^m$. Die Anzahl dieser Variationen in den ersten m Klassen ist also

$$=n+n^2+n^3+\ldots+n^m=\frac{n(n^m-1)}{n-1}.$$

4. Was nun ferner die Anzahl der Variationen zur Summe n der mten Klasse mit Wiederholungen betrifft; so lassen sich diese Variationen abtheilen, 1) in solche, die mit 1 anfangen, deren so viele sind, wie in $^{n-1}\overset{-1}{M}$; 2) in solche, die mit 2 anfangen, deren so viele sind, wie in $^{n-2}\overset{-1}{M}$; 3) in solche, die mit 3 anfan-

Digitized by Google

gen, deren so viele sind, als in $^{n-3}\overline{M}^{1}$, u. s. f. Endlich in solche, die mit $n-m+1$ anfangen, welches offenbar das höchste Element ist, das in der mten Klasse zur Summe n vorkommen kann, da dann die übrigen $m-1$ Elemente alle $=1$ sind. Dieser Variationen sind so viele, als in $^{m-1}\overline{M}^{1}$. Also ist

$$nf^nM = nf^{n-1}\overline{M}^{1} + nf^{n-2}\overline{M}^{1} + nf^{n-3}\overline{M}^{1} + \ldots + nf^{m-1}\overline{M}^{1}.$$

Da nun offenbar $nf^nA = 1$ ist; so ist

$$nf^nB = nf^{n-1}A + nf^{n-2}A + nf^{n-3}A + \ldots + nf^1A = n-1;$$

$$nf^nC = nf^{n-1}B + nf^{n-2}B + nf^{n-3}B + \ldots + nf^2B$$

$$= (n-2) + (n-3) + (n-4) + \ldots + 1 = \frac{(n-1)(n-2)}{1.2};$$

$$nf^nD = nf^{n-1}C + nf^{n-2}C + nf^{n-3}C + \ldots + nf^3C$$

$$= \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} + \frac{(n-3)(n-4)}{1.2} + \ldots + \frac{2.1}{1.2}$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} \text{ (figurirte Zahlen)}.$$

Wie man auf diese Art mit Hülfe der Theorie der figurirten Zahlen oder arithmetischen Reihen höherer Ordnungen (S. diese Artt.) weiter gehen kann, erhellet leicht. Allgemein ist:

$$nf^nM = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

oder, wie durch kreuzweise Multiplication leicht erhellet, auch

$$nf^nM = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(n-1)}{1.2.3\ldots(n-m)}.$$

Die höchste Klasse ist offenbar die nte, in welcher also die Anzahl der Complexionen

Digitized by Google

$$= \frac{(n-1)(n-2)\ldots.1}{1.2.3\ldots(n-1)} = 1$$

ist. Also ist die Anzahl der Variationen zur Summe n in allen Klassen überhaupt

$$= 1 + \frac{n-1}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} + \frac{n-1}{1} + 1,$$

d. i. nach dem binomischen Lehrsatze

$$= (1+1)^{n-1} = 2^{n-1}.$$

5. Sollen die Variationen gegebener Elemente wirklich aufgestellt werden; so leitet man aus jeder Klasse die nächst folgende ab, indem man, wenn Wiederholungen verstattet sind, jeder Complexion jener Klasse jedes gegebene Element nach der Reihe vorschreibt; wenn aber keine Wiederholungen verstattet sind, so werden alle Elemente nach der Reihe nur den Complexionen der gegebenen Klasse vorgesetzt, in welchen sie noch nicht enthalten sind. Fängt man von der ersten Klasse an; so erhält man auf diese Art leicht alle übrigen nach der Reihe. Bei Variationen ohne Wiederholungen für n Elemente ist die nte Klasse die letzte. Bei Variationen mit uneingeschränkten Wiederholungen gehen die Klassen ins Unendliche fort. Folgende Exempel beziehen sich auf vier Elemente a, b, c, d, und reichen bis zum Anfange der vierten Klasse.

6. Variationen mit Wiederholungen.

a	b	c	d
aa	ab	ca	ad
ba	bb	bc	bd
ca	cb	cc	cd
da	db	dc	dd
aaa	aab	aac	aad
aba	abb	abc	abd
aca	acb	acc	acd
ada	adb	adc	add
baa	bab	bac	bad
bba	bbb	bbc	bbd
bca	bcb	bcc	bcd
bda	bdb	bdc	bdd

Digitized by Google

caa	cab	cac	cad
cba	cbb	cbc	cbd
cca	ccb	ccc	ccd
cda	cdb	cdc	cdd
daa	dab	dac	dad
dba	dbb	dbc	dbd
dca	dcb	dcc	dcd
dda	ddb	ddc	ddd
aaaa	aaab	aaac	aaad
aaba	aabb	aabc	aabd

u. ſ. f. u. ſ. f.

7. Variationen ohne Wiederholungen.

a	b	c	d
	ab	ac	ad
	ba	bc	bd
	ca	cb	cd
	da	db	dc
		abc	abd
		acb	acd
		adb	adc
		bac	bad
		bca	bcd
		bda	bdc
		cab	cad
		cba	cbd
		cda	cdb
		dab	dac
		dba	dbc
		dca	dcb
			abcd
			abdc
			acbd
			acdb
			adbc
			adcb
			bacd

u. ſ. f.

8. Beziehen ſich die Variationen auf mehrere Elementenreihen p, q, r, u. ſ. f., die auch rückſichtlich der Anzahl der Elemente verſchieden ſeyn können; ſo werden die Variationen wie in (6.) entwickelt, nur mit dem Unterſchiede, daß man in die letzte Stelle, als die erſte, Elemente aus p, in die 2te Elemente aus q, in die 3te Elemente aus r ſetzt, u. ſ. f. wobei zu bemerken, daß hierbei auch die Anzahl der Klaſſen begränzt, nämlich der Anzahl der gegebenen Elementenreihen gleich iſt, wie leicht erhellet. Für die Zeiger

Digitized by Google

p(a, b, c, d)
q(A, B)
r(α, β, γ)

erhält man z. B.

a	b	c	d
Aa	Ab	Ac	Ad
Ba	Bb	Bc	Bd
αAa	αAb	αAc	αAd
αBa	αBb	αBc	αBd
βAa	βAb	βAc	βAd
βBa	βBb	βBc	βBd
γAa	γAb	γAc	γAd
γBa	γBb	γBc	γBd

Höhere Klassen giebt es in diesem Falle nicht. Bei der Entwickelung der Producte der Reihen kommen Variationen dieser Art immer vor. Sind die Reihen unendlich, so sind auch die obigen Elementenreihen unendlich, und die Anzahl der Klassen ist unbegränzt.

9. Soll eine Klasse außer der Ordnung dargestellt werden; so schreibe man bei verstatteten Wiederholungen alle gegebenen Elemente unter einander, setze allen a vor, vertausche das vorgesetzte a mit b, das vorgesetzte b mit c, u. s. f. bis zu Ende. Allen Complexionen setze man wieder a vor, verfahre übrigens wie vorher, und setze dies so lange fort, bis man die verlangte Klasse erreicht hat. Soll dagegen die mte Classe der Variationen ohne Wiederholungen entwickelt werden; so schreibe man die Elemente vom mten an unter einander, setze allen das (m — 1)te Element vor, vertausche nun überall das (m — 1)te und mte, mte und (m + 1)te Element, u. s. f., gegen einander, schreibe allen Complexionen das (m — 2)te Element vor, und verfahre weiter ganz auf ähnliche Art. Mit dem Vorsetzen des ersten Elements erreicht man die verlangte Klasse. Dies giebt folgende Darstellungen der 3ten Klasse für vier Elemente:

Digitized by Google

aaa	daa	abc
aab	dab	abd
aac	dac	acb
aad	dad	acd
aba	dba	adb
abb	dbb	adc
abc	dbc	bac
abd	dbd	bad
aca	dca	bca
acb	dcb	bcd
acc	dcc	bda
acd	dcd	bdc
ada	dda	cab
adb	ddb	cad
adc	ddc	cba
add	ddd	cbd
baa		cda
bab		cdb
bac		dab
bad		dac
bba		dba
bbb		dbc
bbc		dca
bbd		dcb
bca		
bcb		
bcc		
bcd		
bda		
bdb		
bdc		
bdd		
caa		
cab		
cac		
cad		
cba		
cbb		
cbc		
cbd		
cca		
ccb		
ccc		
ccd		
cda		
cdb		
cdc		
cdd		

Beide Darstellungen sind involutorisch.

10. Diese Regeln finden bei dem Schreiben der Zahlen nach einem bestimmten Zahlensystem ihre Anwendung, wie z. B. folgende Darstellung für das Zahlensystem, dessen Grundzahl drei ist, zeigt:

Digitized by Google

0 0 0 0 (0)
0 0 0 1 (1)
0 0 0 2 (2)
0 0 1 0 (3)
0 0 1 1 (4)
0 0 1 2 (5)
0 0 2 0 (6)
0 0 2 1 (7)
0 0 2 2 (8)
0 1 0 0 (9)
0 1 0 1 (10)
0 1 0 2 (11)
0 1 1 0 (12)
– – –
0 1 2 2 (17)
0 2 0 0 (18)
0 2 0 1 (19)
0 2 0 2 (20)
– – –
0 2 2 2 (26)
1 0 0 0 (27)
1 0 0 1 (28)
u. s. f.

Die eingeschlossenen Zahlen sind die entsprechenden decadischen Zahlenausdrücke.

11. Bei Variationen zu bestimmten Summen leitet man entweder Klassen aus Klassen, oder Summen aus Summen ab. Im ersten Falle schreibt man die gegebene Summe n als Union in die erste Klasse. Die Binionen erhält man durch Zerlegung von n in zwei Theile auf alle mögliche Arten: 1, n—1; 2, n—2; 3, n—3; ...; n—2, 2; n—1, 1. Aus den Binionen erhält man die Ternionen, wenn man das letzte Element auf ähnliche Art in zwei Theile zerlegt, indem man die übrigen ungeändert läßt, und eben so ergeben sich aus den Ternionen die Quaternionen, u. s. f. Im zweiten Fall findet man aus den Variationen zur Summe n—1 die zur Summe n, wenn man jenen allen zuerst 1 oder a vorsetzt, und dann in allen Variationen zur Summe n—1 das erste Element auch mit dem nächst höhern vertauscht, indem die übrigen ungeändert bleiben. Dies giebt für die Summe 6 folgende Darstellungen:

Digitized by Google

I. Die Principien.

A. Functionen absolut-unabhängiger veränderlicher Größen.

1. Wenn V eine Function der Größen x, y, z, u, ...; p, q, r, s, ... ist, aber p, q, r, s, ... wieder als Functionen von x gedacht werden; so nennt man x, y, z, u, ... die absolut-unabhängigen veränderlichen, p, q, r, s, ... dagegen die relativ-unabhängigen veränderlichen Größen, V aber schlechthin die abhängige Größe oder die Function. Der Einfachheit wegen betrachten wir hier zunächst solche Functionen, welche bloß absolut-unabhängige veränderliche Größen enthalten.

2. Die Bestimmung der aus den Werthveränderungen ihrer veränderlichen Größen resultirenden Werthveränderungen der Functionen, ohne daß dabei der Zusammenhang der veränderlichen Größen unter einander, d. h. die Form der Function, sich ändert, ist bekanntlich der Gegenstand der Differenzen- und Differentialrechnung, welche wir hier in ihrer ganzen Ausdehnung, vorzüglich den Taylor'schen Lehrsatz (s. diesen Artikel), vorauszusetzen berechtigt sind. Man kann sich aber auch denken, daß eine Veränderung einer Function herbeigeführt werde, nicht sowohl bloß durch die Werthveränderung ihrer veränderlichen Größen an sich, sondern auch zugleich durch die Veränderung des gegenseitigen Zusammenhangs derselben unter einander, d. h. der Form der Function, oder auch der letztern allein. Auf diese an sich völlig willkührlichen Formverwandlungen der Functionen läßt sich jedoch kein eigentlicher Algorithmus mit den daraus hervorgehenden Veränderungen der Functionen gründen, wenn jene nicht einigen bestimmten Gesetzen unterworfen werden.

3. In dieser Beziehung ist insonderheit Folgendes zu merken. So wie in der Differenzen- und Differentialrechnung aus der veränderten Function die primitive wieder erhalten wird, wenn in jener alle Incremente der veränderlichen Größen $= 0$ gesetzt werden; so ist es auch bei den

Digitized by Google

durch Formverwandlung hervorgegangenen Functionen, wenn die hieraus entspringenden Veränderungen derselben einem gewissen eigenthümlichen Algorithmus unterwerfbar seyn sollen, unbedingt nöthig, aus ihnen selbst ihren primitiven Zustand erkennen, und auf diesen zurückgehen zu können, indem sonst, wegen der übrigens völligen Willkührlichkeit der Formverwandlung, zwischen ihnen und den primitiven Functionen gar kein weiterer Zusammenhang statt finden würde. Um diesen Zweck zu erreichen, denke man sich, die gegebene Function durch V bezeichnend, bei jeder mit derselben vorgenommenen Verwandlung zugleich eine beliebige constante Größe i, welche in der Folge die Variirende genannt werden soll, eingeführt, und unterwerfe die durch die Verwandlung hervorgegangene Function V_i, wie sie von nun an immer bezeichnet werden soll, bei übrigens völliger Willkührlichkeit des Zusammenhanges der veränderlichen Größen und der Größe i unter einander, nur der einzigen Bedingung, daß sie für $i = o$ wieder in den primitiven Zustand V zurückkehrt. Für $V = (a + x)^2$ wäre z. B.

$$V_i = (a + x + i)^2 + \log\left\{1 + \frac{i}{a(x+i)}\right\} + (x+i)\sin i$$

eine solche durch Formverwandlung hervorgegangene Function, welche der so eben ausgesprochenen Bedingung genügt, da V_i, für $i = o$, $= (a + x)^2$ wird.

Die Differenz $V_i - V$ soll in der Folge überhaupt die Veränderung von V genannt, und durch DV bezeichnet werden, wenn diese Bezeichnung auch sonst nicht sehr gewöhnlich ist.

4. Betrachten wir nun einmal i als veränderlich, und bezeichnen die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial V_i}{\partial i}, \frac{\partial^2 V_i}{\partial i^2}, \frac{\partial^3 V_i}{\partial i^3}, \frac{\partial^4 V_i}{\partial i^4}, \ldots$$

für $i = o$ durch V', V'', V''', V'''', ...; so ist nach der Maclaurinschen Reihe (Taylors Lehrsatz. 12.)

$$V_i = V + V'.\frac{i}{1} + V''.\frac{i^2}{1.2} + V'''.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$DV = V'.\frac{i}{1} + V''.\frac{i^2}{1.2} + V'''.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

Digitized by Google

denn auch, wie es uns scheint, das Geschäft der Variationsrechnung, als ein eigenthümlicher Algorithmus, ohne jede Beziehung auf irgend eine Anwendung derselben, einzig und allein, nämlich die Variation der Function V durch die unbestimmten Variationen ihrer veränderlichen Größen darzustellen. Was es mit den relativ-unabhängigen veränderlichen Größen, wenn deren vorkommen sollten, für eine Bewandtniß habe, werden wir weiter unten sehen.

8. Vor Entwickelung des Hauptsatzes der Variationsrechnung, in ihrem reinen Theile, dürfte es vielleicht nicht unzweckmäßig seyn, auf einen hier wichtigen Satz aus der Differentialrechnung, welcher in den Systemen häufig fehlt, besonders hinzuweisen. Ist nämlich

$$y = f(p, q, r, s, \ldots)$$

eine Function von p, q, r, s, ..., welche selbst alle von einer veränderlichen Größe x abhängig seyn sollen; so findet man ∂y in Bezug auf x, wenn man ∂y in Bezug auf p, q, r, s, ..., als von einander völlig unabhängige Größen angesehen, entwickelt, und dann die Differentiale von p, q, r, s, ... alle in Bezug auf x als veränderliche Größe betrachtet. Denn denkt man sich x um Δx geändert; so wird

$$y' = f(p + \Delta p, q + \Delta q, r + \Delta r, s + \Delta s, \ldots.)$$

und folglich nach dem Taylor'schen Lehrsatze für mehrere veränderliche Größen:

$$\begin{aligned} y' = y &+ \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\Delta p + \ldots. \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\Delta q + \ldots. \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\Delta r + \ldots. \\ &+ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\Delta s + \ldots. \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze für eine veränderliche Größe

$$\Delta p = \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x + \ldots., \quad \Delta q = \frac{\partial q}{\partial x}\Delta x + \ldots., \quad \Delta r = \frac{\partial r}{\partial x}\Delta x + \ldots., \text{ u. s. f.}$$

Digitized by Google

Also

$$y' = y + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\,\Delta x + \ldots.$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\,\Delta x + \ldots.$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\,\Delta x + \ldots.$$
$$+ \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial s}{\partial x}\,\Delta x + \ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich, in Bezug auf x als veränderlich:

$$\partial y = \frac{\partial y}{\partial x}\,\partial x =$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\partial x + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\cdot\frac{\partial q}{\partial x}\partial x + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\partial x + \ldots.$$
$$= \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\partial r + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\partial s + \ldots.,$$

wenn nur ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ... alle in Bezug auf x genommen werden. Nach der ersten Reihe für y' ist aber, wenn p, q, r, s, ... als unabhängige veränderliche Größen gedacht werden,

$$\partial y = \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)\partial r + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\partial s + \ldots.$$

Also folgt unser Satz.

Ferner ergiebt sich nun hieraus, daß, da das zweite Differential von y das erste vom ersten ist, $\partial^2 y$ in Bezug auf x gefunden wird, wenn man den gefundenen Ausdruck für ∂y in Bezug auf p, q, r, s, ...; ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ... als unabhängige veränderliche Größen differentiirt, und die Differentiale wie vorher betrachtet. Eben so erhält man hieraus weiter $\partial^3 y$ in Bezug auf x, wenn der für $\partial^2 y$ erhaltene Ausdruck, in Bezug auf p, q, r, s, ...; ∂p, ∂q, ∂r, ∂s, ...; $\partial^2 p$, $\partial^2 q$, $\partial^2 r$, $\partial^2 s$, ... als unabhängige veränderliche Größen, differentiirt wird, und die Differentiale dann wie vorher betrachtet werden.

9. Durch folgenden, als Hauptsatz der ganzen eigentlichen Variationsrechnung zu betrachtenden Lehrsatz, wird dieselbe in unmittelbare Verbindung mit der Differential-

Digitized by Google

rechnung gesetzt. Man denke sich nämlich einmal x, y, z, u, ... alle als von einer veränderlichen Größe v abhängig, und lasse v sich um iΔv ändern, wo bekanntlich auch ∂v für Δv gesetzt werden könnte, indem, wie aus der Differentialrechnung bekannt, ∂v mit Δv identisch ist. Durch diese Aenderung gehen nach dem Taylor'schen Lehrsatze für eine veränderliche Größe x, y, z, u, ... respective über in:

$$x + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$y + \frac{\partial y}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$z + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$u + \frac{\partial u}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 u}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

u. s. f. u. s. f.

d. i., weil nach obiger Bemerkung $\partial v = \Delta v$ ist, in:

$$x + \partial x.\frac{i}{1} + \partial^2 x.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 x.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$y + \partial y.\frac{i}{1} + \partial^2 y.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 y.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$z + \partial z.\frac{i}{1} + \partial^2 z.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 z.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$u + \partial u.\frac{i}{1} + \partial^2 u.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 u.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

u. s. f. u. s. f.

Werden nun diese Reihen in

$$V = f(x, y, z, u, \ldots.)$$

für x, y, z, u, ... gesetzt; so geht V nach dem Taylor'schen Lehrsatze über in:

$$V + \frac{\partial V}{\partial v}\cdot\frac{i\Delta v}{1} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2}\cdot\frac{i^2\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 V}{\partial v^3}\cdot\frac{i^3\Delta v^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$= V + \partial V.\frac{i}{1} + \partial^2 V.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 V.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

wo bei der Entwickelung der Differentialien von V nach (8.) zu verfahren ist. Setzen wir nun hierin überall ∂ für ∂; so erhält man natürlich das, was V wird, wenn für x, y, z, u, ... die Reihen

Digitized by Google

$$x + \partial x \cdot \frac{i}{1} + \partial^2 x \cdot \frac{i^2}{1.2} + \partial^3 x \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$y + \partial y \cdot \frac{i}{1} + \partial^2 y \cdot \frac{i^2}{1.2} + \partial^3 y \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$z + \partial z \cdot \frac{i}{1} + \partial^2 z \cdot \frac{i^2}{1.2} + \partial^3 z \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$u + \partial u \cdot \frac{i}{1} + \partial^2 u \cdot \frac{i^2}{1.3} + \partial^3 u \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

gesetzt werden, d. i. V_i (6.), so daß also

$$V_i = V + \partial V \cdot \frac{i}{1} + \partial^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \partial^3 V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

nur überall δ für ∂ gesetzt. Da aber auch (5.)

$$V_i = V + \delta V \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots$$

ist; so ist $\delta V = \partial V$, $\delta^2 V = \partial^2 V$, $\delta^3 V = \partial^3 V$, $\delta^4 V = \partial^4 V$, u. s. f., wenn bei der Entwickelung der Differentialien von V alle $x, y, z, u, \dots$; $\partial x, \partial y, \partial z, \partial u, \dots$; $\partial^2 x, \partial^2 y, \partial^2 z, \partial^2 u, \dots$; u. s. f. als von einander unabhängige veränderliche Größen betrachtet werden, und nach, oder bei der Differentiation, überall δ für ∂ gesetzt wird. Am kürzesten bedient man sich bei der Differentiation sogleich des Zeichens δ statt ∂, oder differentiirt, nach dem gewöhnlichen Ausdrucke, unter oder mit dem Zeichen δ. Wir haben zwar vorher $x, y, z, u, \dots$ als von einer gewissen Größe v abhängig betrachtet; es fällt aber in die Augen, daß obige Entwickelung ganz allgemein das geben muß, was man erhält, wenn in V die Reihen

$$x + \delta x \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 x \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$y + \delta y \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 y \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$z + \delta z \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 z \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

$$u + \delta u \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 u \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 u \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \dots,$$

u. s. f. u. s. f.

überhaupt für $x, y, z, u, \dots$ gesetzt werden, insofern es nur nicht auf eine gegenseitige Abhängigkeit dieser Größen ankommt, so wie denn in diesem Abschnitte dieselben als ganz unabhängig von einander betrachtet werden.

Digitized by Google

Das Variiren bei Functionen mit absolut-unabhängigen Größen ist also hiernach nichts anders als eine bloße Differentiation unter dem Zeichen δ. Auch erhalten hiernach Ausdrücke wie $\delta^{m+n} = \delta^m(\delta^n V)$ einen leicht zu begreifenden Sinn, indem sich dieselben offenbar nur auf eben diese Entwickelungsmethode der Variationen mittelst der Differentialrechnung beziehen können.

Für die erste und zweite Variation erhält man:

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)\delta u + \ldots,$$

$$\begin{aligned}\delta^2 V = {} & \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta^2 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta^2 z + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)\delta^2 u \ldots \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\delta x^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\delta x \delta y + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\delta x \delta z + \ldots. \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}\delta y \delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\delta y \delta z + \ldots. \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta z^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\delta z \delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}\delta z \delta y + \ldots. \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}\right)\delta u^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial x}\delta u \delta x + \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial y}\delta u \delta y + \ldots. \\ & \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}\end{aligned}$$

oder, da die Ordnung der Differentiation keinen Einfluß auf das Resultat hat:

$$\begin{aligned}\delta^2 V = {} & \\ & \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta^2 x + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta^2 z + \left(\frac{\partial V}{\partial u}\right)\delta^2 u + \ldots. \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)\delta x^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\delta x \delta y + 2\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}\delta x \delta z + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\delta y \delta z + \ldots \\ & + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta z^2 + \ldots \\ & \ldots\ldots\end{aligned}$$

Das Gesetz fällt in die Augen, und man könnte eben so leicht die höhern Variationen nach der gegebenen Regel entwickeln.

10. Die bekannten Grundregeln der Differentialrechnung gelten, wie aus dem Vorhergehenden unmittelbar

Digitized by Google

folgt, auch für Variationen, und können auch noch besonders auf folgende Art leicht bewiesen werden.

a. Für $V = v + v' + v'' + v''' + \ldots$ ist $V_i = v_i + v'_i + v''_i + v'''_i + \ldots$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = \frac{\partial v_i}{\partial i} + \frac{\partial v'_i}{\partial i} + \frac{\partial v''_i}{\partial i} + \frac{\partial v'''_i}{\partial i} + \ldots$$

Folglich für $i = o$ (4.)

$$\delta V = \delta v + \delta v' + \delta v'' + \delta v''' + \ldots$$

b. Für $V = vv'$ ist eben so $V_i = v_i v'_i$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = v\frac{\partial v'_i}{\partial i} + v'_i\frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = v\delta v' + v'\delta v,$$

wenn nach der Differentiation wieder $i = o$ gesetzt wird.

c. Für $V = \frac{v}{v'}$ ist $V_i = \frac{v_i}{v'_i}$;

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = \frac{v'_i\frac{\partial v_i}{\partial i} - v_i\frac{\partial v'_i}{\partial i}}{v'_i v'_i}, \quad \delta V = \frac{v'\delta v - v\delta v'}{v'v'}.$$

d. Für $V = v^n$ ist $V_i = (v_i)^n$; also

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = n(v_i)^{n-1}\frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = nv^{n-1}\delta v.$$

e. Für $V = av$ ist $V_i = a_i v$; also

$$\frac{\partial V_i}{\partial i} = a\frac{\partial v_i}{\partial i}, \quad \delta V = a\delta v.$$

Zuweilen können diese Regeln von Nutzen seyn; indeß erscheinen sie hier bei Weitem nicht so wichtig, wie in der Differentialrechnung.

11. Von ganz besonderer Wichtigkeit für die Variationsrechnung ist folgender Satz.

Man bezeichne der Kürze wegen irgend einen, z. B. den kten, Differentialquotienten von V in Bezug auf seine veränderlichen Größen, bloß durch $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$, wo also einige Mal nach x, dann einige Mal nach y, einige Mal nach z, u. s. f., überhaupt kMal differentiirt ist, und es bekanntlich nicht auf die Ordnung, wohl aber auf die Anzahl der einzelnen Differentiationen nach jeder einzelnen veränderlichen Größe ankommt. Da dieser Differentialquotient offenbar auch eine gewisse Function von x, y, z, u, ... ist, so setze man

Digitized by Google

$$\frac{\partial^k V}{\partial k} = f'(x, y, z, u, \ldots).$$

Setzen wir nun in

$$V = f(x, y, z, u, \ldots)$$

$x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots$ für $x, y, z, u, \ldots$; so wird

$$V_i = f(x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots),$$

und folglich auch

$$\frac{\partial^k V_i}{\partial k} = f'(x_i, y_i, z_i, u_i, \ldots),$$

wo bei der Differentiation offenbar alle Variationen der absolut unabhängigen veränderlichen Größen als constant zu betrachten sind, weil hier natürlich vorausgesetzt werden muß, daß $x, y, z, u, \ldots$ in der Function f und auch in f' auf völlig gleiche Art variirt worden sind, welches nicht der Fall seyn würde, wenn die Differentiale der Variationen nicht $= 0$ gesetzt würden. Nun ist aber (5.):

$$V_i = V + \delta V \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

also, wenn man differentiirt:

$$\frac{\partial^k V_i}{\partial k} = \frac{\partial^k V}{\partial k} + \frac{\partial^k (\delta V)}{\partial k} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^k (\delta^2 V)}{\partial k} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \ldots,$$

in welche Reihe also $\frac{\partial^k V}{\partial k}$ durch die Variation von $x, y, z, u, \ldots$ übergeht, so daß also (5.) die Coefficienten von $\frac{i}{1}, \frac{i^2}{1.2}, \frac{i^3}{1.2.3}, \ldots$ in dieser Reihe die Variationen von $\frac{\partial^k V}{\partial k}$ sind, und folglich

$$\delta\left(\frac{\partial^k V}{\partial k}\right) = \frac{\partial^k (\delta V)}{\partial k}, \quad \delta^2\left(\frac{\partial^k V}{\partial k}\right) = \frac{\partial^k (\delta^2 V)}{\partial k};$$

$$\delta^3\left(\frac{\partial^k V}{\partial k}\right) = \frac{\partial^k (\delta^3 V)}{\partial k}, \ldots\ldots;$$

überhaupt

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial k}\right) = \frac{\partial^k (\delta^n V)}{\partial k}$$

ist; man also die nte Variation eines kten Differentialquotienten einer Function absolut-unabhängiger veränderlicher Größen erhält, wenn man den kten Differentialquotienten der nten Variation dieser Function nimmt, bei der Differentiation alle Variationen von $x, y, z, u, \ldots$ als constant

Digitized by Google

betrachtet, nur die Differentialquotienten beide Mal ganz auf einerlei Art nach x, y, z, u, ... genommen.

12. Man kann den Beweis dieses Satzes auch auf folgende Art aus dem Taylor'schen Lehrsatze (s. d. Art.) unmittelbar ableiten, welcher Beweis zwar weitläufiger ist, aber, wie es uns scheint, eine sehr deutliche Einsicht in die Natur der Sache gewährt. Der Kürze wegen setze man

$$X = \partial x.\frac{i}{1} + \partial^2 x.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 x.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$Y = \partial y.\frac{i}{1} + \partial^2 y.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 y.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$Z = \partial z.\frac{i}{1} + \partial^2 z.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 z.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$U = \partial u.\frac{i}{1} + \partial^2 u.\frac{i^2}{1.2} + \partial^3 u.\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

und bezeichne den Inbegriff aller, zugleich mit ihren Permutationszahlen multiplicirten Combinationen mit Wiederholungen der ersten, zweiten, dritten Klasse, u. s. f., für den Zeiger

$$\left\{\frac{X}{\partial x}, \frac{Y}{\partial y}, \frac{Z}{\partial z}, \frac{U}{\partial u}, \ldots\right\}$$

hier bloß durch C_1, C_2, C_3, ...; so ist, wie im Art. Taylors Lehrsatz (10.), wo aber eine etwas verschiedene Bezeichnung der Combinationsklassen gebraucht ist, gezeigt worden,

$$V_i = V + \frac{\partial V}{1} C_i + \frac{\partial^2 V}{1.2} C_2 + \frac{\partial^3 V}{1.2.3} C_3 + \ldots,$$

ein Ausdruck, dessen combinatorische Bedeutung wohl aufzufassen ist, worüber der a. Art. nachzusehen. Da aber weder V, noch irgend ein Differentialquotient von V, i enthält; so kann man, nach i differentiirend, setzen:

$$\frac{\partial^n V_i}{\partial i^n} = \frac{\partial V}{1}\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n} + \frac{\partial^2 V}{1.2}\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n} + \frac{\partial^3 V}{1.2.3}\frac{\partial^n C_3}{\partial i^n} + \ldots,$$

immer nur die combinatorische Bedeutung dieser Ausdrücke gehörig festgehalten. Hieraus erhält man $\partial^n V$ (4.), wenn man $i = o$ setzt, so daß also, wenn die Werthe der

Digitized by Google

Differentiale der Combinationsklassen für $i = o$ durch Einschließung in Parentheſen unterſchieden werden,

$$\delta^n V = \frac{\partial V}{1}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^2 V}{1.2}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^3 V}{1.2.3}\left(\frac{\partial^n C_3}{\partial i^n}\right) + \ldots.$$

Das allgemeine Glied von C_k hat offenbar die Form

$$A.\frac{X^\alpha Y^\beta Z^\gamma U^\delta \ldots.}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial u^\delta \ldots.},$$

wo $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots = k$ iſt. Ordnet man alſo C_k nach Potenzen von i; ſo enthält das erſte Glied i^k, alle übrigen Glieder höherer Potenzen von i, und es iſt folglich, wenn $k > n$ iſt, $\left(\frac{\partial^n C_k}{\partial i^n}\right) = o$, ſo daß obige Reihe mit dem Gliede

$$\frac{\partial^n V}{1.2.3 \ldots n}\left(\frac{\partial^n C_n}{\partial i^n}\right)$$

abbricht. Setzt man nun, welches offenbar verſtattet, $\frac{\partial^k V}{\partial k}$ für V; ſo wird

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) =$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right)}{1}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^2\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right)}{1.2}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \ldots.,$$

wofür, wenn nur immer die combinatoriſche Natur dieſes Ausdrucks gehörig in's Auge gefaßt wird, ſich offenbar ſchreiben läßt:

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) =$$

$$\frac{\partial^{k+1} V}{1.\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^{k+2} V}{1.2\,\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \ldots.$$

Nimmt man aber, alle Variationen der abſolut-unabhängigen veränderlichen Größen als conſtant betrachtend, von dem oben entwickelten $\delta^n V$ den $k$ten Differentialquotienten, indem man $k$mal ganz in derſelben Art wie bei $\frac{\partial^k V}{\partial^k}$ differentiirt; ſo erhält man:

$$\frac{\partial^k(\delta^n V)}{\partial^k} =$$

$$\frac{\partial^{k+1} V}{1.\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_1}{\partial i^n}\right) + \frac{\partial^{k+2} V}{1.2.\partial^k}\left(\frac{\partial^n C_2}{\partial i^n}\right) + \ldots.,$$

Digitized by Google

o die Differentialquotienten von V offenbar ganz auf
ieſelbe Art wie vorher in der Reihe für $\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right)$ genom-
ien ſind, da die Ordnung der Differentiation bekanntlich
illkührlich iſt. Es iſt alſo

$$\delta^n\left(\frac{\partial^k V}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k(\delta^n V)}{\partial^k},$$

, was insbeſondere deutlich aus dieſem Beweiſe zu er-
llen ſcheint, alle Variationen der abſolut-unabhängigen
änderlichen Größen bei der Differentiation als conſtant
betrachten ſind.

13. Sei, um dieſen Satz an ein Paar Beiſpielen zu
läutern,

$$V = ax + 2bx^2y^2 + 3cy^3;$$

o

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = a + 4bxy^2, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 8bxy;$$

$$\partial V = a\partial x + 4bxy^2\partial x + 4bx^2y\partial y + 9cy^2\partial y;$$

$$\delta V = a\delta x + 4bxy^2\delta x + 4bx^2y\delta y + 9cy^2\delta y.$$

$$\partial\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 4by^2\partial x + 8bxy\partial y, \quad \delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y;$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y; \quad \delta\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta V)}{\partial x},$$

es ſeyn ſoll. Ferner iſt auch

$$\partial\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = 8b(x\partial y + y\partial x),$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = 8b(x\delta y + y\delta x).$$

er

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x} = 4by^2\delta x + 8bxy\delta y;$$

$$\frac{\partial(\delta V)}{\partial x \partial y} = 8b(y\delta x + x\delta y);$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial(\delta V)}{\partial x \partial y},$$

es ſeyn ſoll. Immer ſind δx, δy bei der Differen-
ion als conſtant betrachtet. Sei ferner, um auch
Beiſpiel mit transcendenten Größen zu geben,

$$V = 4a\log nx \sin y + 3bx;$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{4a \sin y}{x} + 3b, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{4a \cos y}{x};$$

$$\vartheta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{4a}{x}\left\{\frac{\partial x \cos y}{x} + \partial y \sin y\right\},$$

$$\delta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{4a}{x}\left\{\frac{\delta x \cos y}{x} + \delta y \sin y\right\}.$$

Ferner ist

$$\partial V = \frac{4a \partial x \sin y}{x} + 3b\partial x + 4a\partial y \log n x \cos y,$$

$$\delta V = \frac{4a \delta x \sin y}{x} + 3b\delta x + 4a\delta y \log n x \cos y,$$

$$\frac{\partial(\partial V)}{\partial x} = -\frac{4a \partial x \sin y}{x^2} + \frac{4a \partial y \cos y}{x},$$

$$\frac{\partial^2(\partial V)}{\partial x \partial y} = -\frac{4a}{x}\left\{\frac{\delta x \cos y}{x} + \delta y \sin y\right\},$$

$$\vartheta\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2(\delta V)}{\delta x \partial y},$$

wie es seyn soll.

14. Sey jetzt V irgend eine Function der einen absolut-unabhängigen veränderlichen Größe x; so ist

$$\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x} = V, \quad \delta^n\left(\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x}\right) = \delta^n V;$$

aber auch

$$\frac{\partial \int(\delta^n V)\partial x}{\partial x} = \delta^n V;$$

also

$$\delta^n\left(\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial \int(\delta^n V)\partial x}{\partial x}.$$

Werden nun alle Variationen der absolut-unabhängigen veränderlichen Größe als constant betrachtet; so ist (11

$$\delta^n\left(\frac{\partial \int V \partial x}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta^n \int V \partial x)}{\partial x};$$

also

$$\frac{\partial(\delta^n \int V \partial x)}{\partial x} = \frac{\partial \int(\delta^n V)\partial x}{\partial x},$$

und folglich

$$\delta^n \int V \partial x = \int(\delta^n V)\partial x + C.$$

Sey z. B.

$$V = ax^3 + bx^2 + cx + d;$$

so ist

Digitized by Google

$$\int V\partial x = \tfrac{1}{4}ax^4 + \tfrac{1}{3}bx^3 + \tfrac{1}{2}cx^2 + dx + \text{Const};$$
$$\delta\int V\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta x.$$

Ferner ist

$$\delta V = (3ax^2 + 2bx + c)\delta x,$$

und, δx als constant betrachtet:

$$\int(\delta V)\,\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx)\delta x + C.$$

Nun wird $\delta\int V\partial x = d\delta x$ für $x = 0$; also ist $C = d\delta x$, und

$$\int(\delta V)\partial x = (ax^3 + bx^2 + cx + d)\delta x$$

zu setzen, damit

$$\delta\int V\partial x = \int(\delta V)\,\partial x.$$

Auf ähnliche Art ist

$$\delta^3\int V\partial x = (3ax^2 + 2bx + c)\,\delta x^2 + (ax^3 + bx^2 + cx + d)\,\delta^3 x;$$
$$\delta^2 V = (6ax + 2b)\delta x^2 + (3ax^2 + 2bx + c)\,\delta^2 x,$$
$$\int(\delta^2 V)\partial x = (3ax^2 + 2bx)\delta x^2 + (ax^3 + bx^2 + cx)\delta^2 x + C.$$

Für $x = 0$ ist aber

$$\delta^2\int V\partial x = c\delta x^2 + d\delta^2 x,$$

so daß also $C = c\delta x^2 + d\delta^2 x$ zu setzen ist, damit

$$\delta^2\int V\partial x = \int(\delta^2 V)\,\partial x.$$

15. In Bezug auf Integrale zweier absolut-unabhängigen veränderlichen Größen geben wir hier einige Erläuterungen, die für das Folgende wichtig, und in diesem Wörterbuche noch nirgends mit gehöriger Deutlichkeit vorgetragen sind. Sei also V eine Function der beiden absolut-unabhängigen Größen x, y; so versteht man unter

$$\int\int V\partial x\,\partial y$$

den Integralausdruck, welchen man erhält, wenn zuerst $\int V\partial x$ bloß in Bezug auf x als veränderlich, und dann

$$\int\partial y\int V\partial x,$$

bloß in Bezug auf y als veränderlich, oder zuerst $\int V\partial y$ bloß in Bezug auf y als veränderlich, und dann

$$\int\partial x\int V\partial y,$$

bloß in Bezug auf x als veränderlich, genommen wird, indem sich aus dem Satze, daß die Ordnung der Differentiation einer Function zweier veränderlichen Größen nach diesen veränderlichen Größen umgekehrt werden kann (Taylors Lehrsatz. 8.) leicht ergiebt, daß beide Operationen

Digitized by Google

zu gleichen, nur in gewissen Größen, die bloß von x und bloß von y abhängen, unterschiedenen Resultaten führen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial^2 \int \partial y \int V \partial x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \int V \partial x}{\partial x} = V,$$

$$\frac{\partial^2 \int \partial x \int V \partial y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int \partial x \int V \partial y}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \int V \partial y}{\partial y} = V,$$

$$\frac{\partial^2 \int \partial y \int V \partial x}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int \partial x \int V \partial y}{\partial x \partial y},$$

und folglich, wenn $f(x)$, $f'(y)$ zwei willkührliche Functionen, die erste bloß von x, die zweite bloß von y bezeichnen,

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \partial x \int V \partial y + f(x) + f'(y).$$

Soll $\int \partial y \int V \partial x$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = a'$; $y = b$, $y = b'$ genommen werden: so nimmt man, y als constant betrachtend, $\int V \partial x$ zwischen den erstern, und, x als constant betrachtend, $\int \partial y \int V \partial x$ zwischen den letztern Gränzen. Hat man aber für dieses Integral überhaupt irgend einen Werth, den wir durch

$$\int \partial y \int V \partial x = \varphi(x, y)$$

bezeichnen wollen, gefunden; so kann man den zwischen den obigen Gränzen genommenen Werth desselben auch

$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b)$$

setzen. Denn man setze

$$\int V \partial x = \varphi'(x, y);$$

so ist, y als constant betrachtet, der zwischen den Gränzen $x = a$, $x = a'$ genommene Werth dieses Integrals

$$= \varphi'(a', y) - \varphi'(a, y);$$

also

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \varphi'(a', y) \partial y - \int \varphi'(a, y) \partial y,$$

oder, wenn wir überhaupt

$$\int \varphi'(x, y) \partial y = \varphi''(x, y)$$

setzen,

$$\int \partial y \int V \partial x = \varphi''(a', y) - \varphi''(a, y),$$

und folglich dieses Integral von $y = b$ bis $y = b'$ genommen,

$$= \varphi''(a', b') - \varphi''(a, b') - \{\varphi''(a', b) - \varphi''(a, b)\}$$
$$= \varphi''(a', b') - \varphi''(a', b) - \varphi''(a, b') + \varphi''(a, b).$$

Nun kann aber bloß

Digitized by Google

$$\varphi''(x, y) = \varphi(x, y) + f_1 x + f'_1 y$$

seyn; also ist obiger Werth unsers Integrals

$$= \varphi(a', b') + f_1(a') + f'_1(b') - \varphi(a', b) - f_1(a') - f'_1(b)$$
$$- \varphi(a, b') - f_1(a) - f'_1(b') + \varphi(a, b) + f_1(a) + f'_1(b)$$
$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b),$$

wie behauptet wurde. Nimmt man $\int \partial x \int V \partial y$ zwischen denselben Gränzen; so erhält man, da dieses Integral

$$= \varphi(x, y) + f(x) + f'(y)$$

seyn muß, auf ganz ähnliche Art wie vorher seinen Werth zwischen besagten Gränzen

$$= \varphi(a', b') - \varphi(a, b') - \varphi(a', b) + \varphi(a, b)$$
$$= \varphi(a', b') - \varphi(a', b) - \varphi(a, b') + \varphi(a, b),$$

so daß also immer

$$\int \partial y \int V \partial x = \int \partial x \int V \partial y,$$

wenn nur beide Integrale zwischen einerlei Gränzen genommen werden.

16. Auf ähnliche Art wie in (15.) ist nun

$$\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = V, \quad \delta^n\left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y}\right) = \delta^n V;$$

aber auch $\frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = \delta^n V$; also

$$\delta^n\left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y}.$$

Werden aber alle Variationen von x, y als constant betrachtet; so ist (11.)

$$\delta^n\left(\frac{\partial^2 \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^2 \delta^n \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y},$$

so daß also

$$\frac{\partial^2 \delta^n \int\int V \partial x \partial y}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y}{\partial x \partial y},$$

woraus

$$\delta^n \int\int V \partial x \partial y = \int\int (\delta^n V) \partial x \partial y + f(x) + f'(y).$$

Um ein Beispiel zu geben; so sey

$$V = ax^2 + bxy + cy^2 + d;$$
$$\int V \partial x = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^2 y + cxy^2 + dx,$$
$$\int\int V \partial x \partial y = \tfrac{1}{3}ax^3 y + \tfrac{1}{4}bx^2 y^2 + \tfrac{1}{3}cxy^3 + dxy,$$
$$\delta \int\int V \partial x \partial y =$$
$$(ax^2 y + \tfrac{1}{2}bxy^2 + \tfrac{1}{3}cy^3 + dy)\delta x$$
$$+ (\tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^2 y + cxy^2 + dx)\delta y.$$

Digitized by Google

Dagegen ist

$$\delta V = (2ax + by)\delta x + (bx + 2cy)\delta y,$$
$$\int(\delta V)\partial x =$$
$$(ax^2 + bxy)\partial x + (\tfrac{1}{2}bx^2 + 2cxy)\partial y,$$
$$\iint(\delta V)\partial x\partial y =$$
$$(ax^2y + \tfrac{1}{2}bxy^2)\partial x + (\tfrac{1}{2}bx^2y + cxy^2)\partial y.$$

Nun wird aber, wenn man zuerst $x = o$, dann $y = o$ setzt, im ersten Falle

$$\delta\iint V\partial x\partial y = (\tfrac{1}{3}cy^3 + dy)\partial x,$$

im andern

$$\delta\iint V\partial x\partial y = (\tfrac{1}{3}ax^3 + dx)\partial y.$$

Bestimmt man also $\iint(\delta V)\partial x\partial y$ auf dieselbe Art; so wird dieses Integral

$$= (ax^2y + \tfrac{1}{2}bxy^2 + \tfrac{1}{3}cy^3 + dy)\partial x$$
$$+ (\tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^2y + cxy^2 + dx)\partial y,$$

und folglich

$$\delta\iint V\partial x\partial y = \iint(\delta V)\partial x\partial y,$$

wie es seyn soll.

Die Erweiterung vorhergehender Betrachtungen auf Functionen mit mehrern veränderlichen Größen würde keinen Schwierigkeiten unterworfen seyn; indeß ist das Obige zu unserm gegenwärtigen Zwecke hinreichend.

B. Functionen absolut- und relativ-unabhängiger veränderlicher Größen.

17. Die relativ-unabhängigen veränderlichen Größen kann man sich offenbar auf eine dreifache Art variirt denken. Betrachten wir, um dies näher zu zeigen, zuerst bloß eine relativ-unabhängige veränderliche Größe, zwischen welcher und den absolut-unabhängigen Größen also eine Gleichung statt finden muß, welche durch

$$\varphi(p, x, y, z, \ldots) = o$$

bezeichnet werde. Die relativ-unabhängige Größe p kann nun zuerst dadurch variirt werden, daß statt der absolut-unabhängigen Größen x, y, z, ... die Reihen

Digitized by Google

$$x_i = x + \delta x \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 x \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 x \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y_i = y + \delta y \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 y \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 y \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$z_i = z + \delta z \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 z \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 z \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

u. s. f. u. s. f.

gesetzt werden, wodurch p in

$$p_i = p + \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

übergeht. Dies stimmt offenbar ganz mit dem in (A.) behandelten Falle überein. Die Variationen von x, y, z, ... müssen als ganz willkührliche Functionen dieser Größen, und die Variationen von p als durch jene herbeigeführt gedacht werden, so daß sie von denselben abhängen, und durch sie ausgedrückt werden können (A.). Ferner kann man aber auch in obige Gleichung, die absolut-unabhängigen Größen ungeändert lassend, für p die Reihe

$$p_i = p + \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

wo δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 p$, ... ganz willkührliche Functionen von p sind, die also jetzt nicht durch die Variationen von x, y, z, ... bestimmt werden, setzen, und endlich kann man sich p auch auf diese beiden Arten zu gleicher Zeit variirt denken, in welchem Falle aber die Variationen von x, y, z, ... nicht bloß auf p allein, sondern auch auf dessen willkührliche Variationen eine Wirkung ausüben. Wir wollen, um die Begriffe zu fixiren, diese drei Arten der Variationen von p von einander unterscheiden, indem wir die erste Art secundäre Variationen nennen und durch δ_1 bezeichnen, die zweite und dritte Art dagegen primitive und zusammengesetzte Variationen nennen, und durch δ, δ_{11} bezeichnen wollen.

18. Die in (A.) ausführlich betrachteten Variationen von V waren hiernach secundäre Variationen, und der in (11.) bewiesene wichtige Satz scheint nach der dortigen Darstellung nur auf solche Variationen anwendbar zu seyn, da er lediglich die Zurückführung der Variationen von V auf die Variationen der absolut-unabhängigen Größen voraus-

Digitized by Google

setzt. Indeß ist derselbe, richtig verstanden, auch auf primitive und zusammengesetzte Variationen anwendbar.

Da nämlich zwischen p und den absolut-unabhängigen veränderlichen Größen die Gleichung

$$\varphi(p, x, y, z, \ldots) = 0$$

statt findet; so muß offenbar auch zwischen einem willkührlichen Differentialquotitienten $\frac{\partial^k p}{\partial^k}$ von p, in Bezug auf x, y, z, ... und letzteren Größen, eine gewisse Gleichung

$$\varphi'\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right) = 0$$

statt finden. Wird nun, indem x, y, z, ... an sich ganz ungeändert bleiben, für p in die erste Gleichung die Reihe

$$p_i = p + \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \cdots,$$

wo alle Variationen ganz willkührliche Functionen von p sind, gesetzt; so geht diese Gleichung in

$$\varphi(p_i, x, y, z, \ldots) = 0.$$

und folglich dadurch die zweite offenbar in

$$\varphi'\left(\frac{\partial^k p_i}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right)$$

über, indem diese Gleichung in beiden Fällen offenbar auf ganz gleiche Weise aus der ersten abgeleitet wird. Da nun aber

$$\frac{\partial^k p_i}{\partial^k} =$$

$$\frac{\partial^k p}{\partial^k} + \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

ist; so erhellet, daß durch die Variation von p der Differentialquotient $\frac{\partial^k p}{\partial^k}$ in diese Reihe übergeht, und daß folglich die Coefficienten von $\frac{i}{1}$, $\frac{i^2}{1.2}$, $\frac{i^3}{1.2.3}$.... in dieser Reihe die successiven Variationen dieses Differentialquotienten sind (5.), so daß also

$$\delta\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta p}{\partial^k}, \quad \delta^2\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^2 p}{\partial^k},$$

$$\delta^3\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^3 p}{\partial^k}, \ldots, \delta^n\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^n p}{\partial^k},$$

Digitized by Google

wie in (11.). Zugleich erhellt hieraus, daß die primitiven Variationen der relativ-unabhängigen veränderlichen Größen nicht, wie dies bei den Variationen der absolut-unabhängigen Größen der Fall ist (12.), als constant zu betrachten sind, sondern immer als ganz willkührliche Functionen von p betrachtet werden müssen.

19. Auch in Bezug auf zusammengesetzte Variationen läßt sich dieser Satz auf folgende Art rechtfertigen. Zuerst setze man p_i für p; so werden die beiden obigen Gleichungen:

$$\varphi(p_i, x, y, z, \ldots) = 0, \quad \varphi\left(\frac{\partial^k p}{\partial^k}, x, y, z, \ldots\right) = 0,$$

ganz wie vorher. Werden nun aber x_i, y_i, z_i, ... für x, y, z, ... gesetzt; so gehen, wie wir in (A.) gesehen haben, mit Anwendung der eingeführten Zeichen (17.), p, δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 q$, ... über in:

$$p + \delta_1 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$\delta p + \delta_1 \delta p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \delta p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 \delta p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

$$\delta^2 p + \delta_1 \delta^2 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \delta^2 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 \delta^2 p \cdot \frac{i^3}{1.23} + \ldots.,$$

$$\delta^3 p + \delta_1 \delta^3 p \cdot \frac{i}{1} + \delta_1{}^2 \delta^3 p \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_1{}^3 \delta^3 p \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.,$$

u. s. f. u. s. f.

so daß also, wenn dies in die Reihe p_i (18.) für p, δp, $\delta^2 p$, $\delta^3 p$, ... gesetzt, und nach i geordnet wird, diese Reihe in

$$\begin{aligned} & p \\ & + (\delta p + \delta_1 p) \cdot \frac{i}{1} \\ & + (\delta^2 p + 2\delta_1 \delta p + \delta_1{}^2 p) \cdot \frac{i^2}{1.2} \\ & + (\delta^3 p + 3\delta_1 \delta^2 p + 3\delta_1{}^2 \delta p + \delta_1{}^3 p.) \cdot \frac{i^3}{1.2.3} \\ & + \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

übergeht, und folglich

Digitized by Google

hängigen dagegen als constant betrachtet. In dieser Beziehung verdient folgender Fall wegen seiner vielfachen Anwendung besonders betrachtet zu werden.

21. Sey nämlich

$$V = f(x, y, y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

wo x als absolut-unabhängig, y dagegen als Function von x betrachtet wird, und y_1, y_2, y_3, ... die successiven Differentialquotienten von y in Bezug auf x bezeichnen. Wird also von der Variation von x abstrahirt; so ist (9.)

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\delta y_2 + \ldots$$

Aber allgemein

$$\delta y_k = \delta\left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^k \delta y}{\partial x^k} \quad (18.).$$

Also

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots$$

Ferner ist

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\delta^2 y_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\delta^2 y_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_3}\right)\delta^2 y_3 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y_1}\delta y\,\delta y_1 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial y_2}\delta y\,\delta y_2 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\delta y_1^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1\,\partial y_2}\delta y_1\,\delta y_2 + \ldots$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\delta y_2^2 + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Aber

$$\delta^n y_k = \delta^n\left(\frac{\partial^k y}{\partial x^k}\right) = \frac{\partial^k \delta^n y}{\partial x^k} \quad (18.).$$

Also

Digitized by Google

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

Für die Anwendung der Variationsrechnung ist bloß die zweite Variation noch von Wichtigkeit, daher wir auch immer bei derselben stehen bleiben.

22. Sey ferner

$$V = f(x, y, y_1, y_2, \ldots; z, z_1, z_2, \ldots),$$

wo y, z Functionen von x sind, und die Differentialquotienten von y und z wie vorher bezeichnet werden. Ganz auf ähnliche Art wie vorher erhält man

$$\delta V = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_2}\right)\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta z + \left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2} + \ldots.,$$

$$\delta^2 V =$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial V}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial y_2}\delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 V}{\partial y_1 \partial y_2}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2 + \ldots.$$

. . . . . .

Digitized by Google

$$+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta^2 z+\left(\frac{\partial V}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\delta^2 z}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial z_2}\right)\frac{\partial^2\delta^2 z}{\partial x^2}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)\delta z^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial z_1}\delta z\frac{\partial\delta z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial z_2}\delta z.\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z_1{}^2}\right)\left(\frac{\theta\delta z}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 V}{\partial z_1\partial z_2}.\frac{\partial\delta z}{\partial x}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}+\ldots.$$

$$+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z_2{}^2}\right)\left(\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\right)^2+\ldots.$$

. . . . . .

wo das Gesetz sogleich in die Augen fällt, und leicht auf mehrere relativ-unabhängige veränderliche Größen ausgedehnt werden kann.

23. Variiren aber auch die absolut-unabhängigen veränderlichen Größen; so müssen diese Entwickelungen natürlich weitläufiger ausfallen. Eine vollständige Auseinandersetzung dieses Gegenstandes gestattet hier der Raum nicht, und es müssen folgende Bemerkungen genügen. Werden die Variationen von V bloß in Bezug auf die relativ-unabhängigen Größen genommen; so sollen sie durch δ_ϱ bezeichnet werden. Alle Variationen dagegen, welche in Bezug auf die absolut-unabhängigen Größen genommen werden, wollen wir durch δ_α andeuten. Setzt man zunächst bloß p_i, q_i, r_i, s_i, ... für p, q, r, s, ...; so wird V =

$$f(x, y, z, u, \ldots; p_i, q_i, r_i, s_i, \ldots.)$$

$$= V+\delta_\varrho V.\frac{i}{1}+\delta_\varrho^2 V.\frac{i^2}{1.2}+\delta_\varrho^3 V.\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$\ldots+\delta_\varrho{}^k V.\frac{i^k}{1.2.3\ldots k}+\ldots.$$

Werden nun ferner x_i, y_i, z_i, u_i, ... für x, y, z, u, ... gesetzt; so gehen V, $\delta_\varrho V$, $\delta_\varrho{}^2 V$, $\delta_\varrho{}^3 V$, ... $\delta_\varrho{}^k V$, ... über in:

$$V+\delta_\alpha V.\frac{i}{1}+\delta_\alpha{}^2 V.\frac{i^2}{1.2}+\delta_\alpha{}^3 V.\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$\ldots+\delta_\alpha{}^n V.\frac{i^n}{1.2\ldots.n}+\ldots;$$

$$\delta_\varrho V+\delta_\alpha\delta_\varrho V.\frac{i}{1}+\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V.\frac{i^2}{1.2}+\delta_\alpha{}^3\delta_\varrho V.\frac{i^3}{1.2.3}+\ldots.$$

$$\ldots+\delta_\alpha{}^n\delta_\varrho V.\frac{i^n}{1.2\ldots n}+\ldots;$$

Digitized by Google

$$\delta_\varrho{}^2V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

$$\delta_\varrho{}^3V + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\beta{}^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots.;$$

. . . . . .

$$\delta_\varrho{}^kV + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$\ldots + \delta_\alpha{}^n\delta_\varrho{}^kV \cdot \frac{i^n}{1.2\ldots n} + \ldots.;$$

. . . . . .

und folglich, wenn man dies in obige Gleichung substituirt und nach Potenzen von i ordnet:

$$V_i =$$

$$V + \delta_\alpha V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha{}^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha{}^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho V \cdot \frac{i}{1} + \delta_\alpha\delta_\varrho V \cdot \frac{i^2}{1.1} + \delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V \cdot \frac{i^3}{1.2.1} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V \cdot \frac{i^3}{1.1.2} + \ldots.$$

$$+ \delta_\varrho{}^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

$$= V + \delta V \cdot \frac{i}{1} + \delta^2V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Folglich, wenn man den Coefficienten von $\frac{i^n}{1.2\ldots n}$ entwickelt,

$$\delta^nV =$$

$$\delta_\alpha{}^nV + \frac{n}{1}\delta_\alpha{}^{n-1}\delta_\varrho V + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^{n-2}\delta_\varrho{}^2V + \ldots.$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho{}^{n-2}V + \frac{n}{1}\delta_\alpha\delta_\varrho{}^{n-1}V + \delta_\varrho{}^nV.$$

Also z. B.

$$\delta V = \delta_\alpha V + \delta_\varrho V,$$

$$\delta^2V = \delta_\alpha{}^2V + 2\delta_\alpha\delta_\varrho V + \delta_\varrho{}^2V,$$

$$\delta^3V = \delta_\alpha{}^3V + 3\delta_\alpha{}^2\delta_\varrho V + 3\delta_\alpha\delta_\varrho{}^2V + \delta_\varrho{}^3V,$$

u. s. f. u. s. f.

Werden also bei den in (21.) und (22.) entwickelten ersten Variationen auch die Variationen der absolut-unab-

Digitized by Google

hängigen Größen berücksichtigt; so ist beide Mal noch $\delta_\alpha V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta x$ beizufügen. Will man sich obiger Formeln zur wirklichen Entwickelung der Variationen bedienen; so hat man wohl zu merken, daß, wenn man unter dem Zeichen δ_α variirt, alle Variationen secundär sind, und man sich also zur Vermeidung jeder Irrung des Zeichens δ_1 bedienen muß, indem man sonst z. B. leicht verleitet werden könnte, statt $\delta\delta p$ (eigentlich $\delta_1\delta p$) $\delta^2 p$ zu setzen. Alle Differentialquotienten, so wie alle primitive Variationen der relativ-unabhängigen Größen sind als neue Functionen zu behandeln, z. B. δp von p, δq von q; δr von r, u. s. f., welches wohl zu beachten ist. Die in (10.) bewiesenen Sätze finden hierbei ihre Anwendung und der Satz in (11. 18. 19.) dient, wie gewöhnlich, zu weiterer Reduction. Mehr Ausführlichkeit gestattet hier der Raum nicht.

C. Variationen unbestimmter Integralformeln, zwischen bestimmten Gränzen genommen.

24. Sey v eine Function der einen absolut-unabhängigen Größe x, und relativ-unabhängiger Größen.

$$V = \int v\partial x ,$$

das Integral von $x = a$ bis $x = b$ genommen. Denkt man sich nun v auf irgend eine Art variirt; so geht v in v_i, und V in

$$V_i = \int (v + \delta v \cdot \frac{i}{1} + \delta^2 v \cdot \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 v \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots)\partial x$$

$$= \int v\partial x + \frac{i}{1}\int(\delta v)\partial x + \frac{i^2}{1.2}\int(\delta^2 v)\partial x + \frac{i^3}{1.2.3}\int(\delta^3 v)\partial x + \ldots$$

über, alle Integrale zwischen denselben Gränzen genommen wie vorher. Da nun bekanntlich die Coefficienten von $\frac{i}{1}$, $\frac{i^2}{1.2}$, $\frac{i^3}{1.2.3}$, ... in der Reihe für V_i die Variationen von V genannt werden; so ist

Digitized by Google

$$\delta V = \delta \int v \partial x = \int (\delta v) \partial x,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x = \int (\delta^2 v) \partial x,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x = \int (\delta^3 v) \partial x,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x = \int (\delta^n v) \partial x,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

die Integrale von $x = a$ bis $x = b$ genommen, da sich die Variationen auf den zwischen diesen Gränzen genommenen bestimmten Werth von $\int v \partial x$ beziehen.

Ist eben so v eine Function der beiden absolut-unabhängigen Größen x, y, und relativ-unabhängiger Größen, und

$$V = \int v \partial x \partial y,$$

das Integral zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$; $y = a'$, $y = b'$ genommen; so ist auf ähnliche Art wie vorher:

$$V_i = \int (v + \delta v . \frac{i}{1} + \delta^2 v . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 v . \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots) \partial x \partial y$$
$$= \int v \partial x \partial y + \frac{i}{1} \int (\delta v) \partial x \partial y + \frac{i^2}{1.2} \int (\delta^2 v) \partial x \partial y + \frac{i^3}{1.2.3} \int (\delta^3 v) \partial x \partial y + \ldots$$

Also

$$\delta V = \delta \int v \partial x \partial y = \int (\delta v) \partial x \partial y,$$
$$\delta^2 V = \delta^2 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^2 v) \partial x \partial y,$$
$$\delta^3 V = \delta^3 \int v \partial x \partial y = \int (\delta^3 v) \partial x \partial y,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta^n V = \delta^n \int v \partial x \partial y = \int (\delta^n v) \partial x \partial y,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

alle Integrale zwischen den gegebenen Gränzen genommen. Wie sich dies auf mehrere absolut-unabhängige Größen erweitern läßt, fällt in die Augen. Noch ist hier ausdrücklich zu bemerken, daß bei der allgemeinen Entwickelung der Integrale in der letzten Reihe, ohne Bezug auf einen bestimmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ zwischen gegebenen Gränzen die Variationen der absolut-unabhängigen Größen als constant zu betrachten sind (14. 16.). Werden aber alle Variationen auf einen bestimmten Werth von $\int v \partial x$ oder $\int v \partial x \partial y$ bezogen, wie hier; so müssen die Integrale in der letzten Reihe, oder die Variationen der gegebenen Integrale zwischen gegebenen Gränzen, zwischen

Digitized by Google

denselben Gränzen genommen werden, und dann ist natürlich δx z. B., als eine willkührliche Function von x, $= \delta a$ für $x = a$, $= \delta b$ für $x = b$ zu setzen.

Von ganz besonderer Wichtigkeit für die Anwendung der Variationsrechnung auf die Lehre von dem Größten und Kleinsten ist die Entwickelung der ersten Variation unbestimmter Integralformeln zwischen gegebenen Gränzen, wozu wir jetzt übergehen.

25. Seyen p, q Functionen von x; so ist nach der Reductionsformel Thl. II. S. 783.

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x = \int p \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x} \partial x - \int \partial p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x .$$

Folglich, durch successive Zerlegung mittelst dieser Formel:

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x =$$

$$p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \int \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} - \int \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} \partial x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} - \ldots .$$

$$\ldots . \mp \frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}} q \pm \int \frac{\partial^n p}{\partial x^n} q \partial x$$

$$= \pm \int \frac{\partial^n p}{\partial x^n} q \partial x + p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}} q + C.$$

26. Sey nun

$$V = \int v \partial x ,$$

$$v = f(x, y, y_1, \ldots y_\alpha, z, z_1, \ldots z_\beta, u, u_1, \ldots u_\gamma, \ldots)$$

wo x absolut-unabhängig, x, y, u, ... dagegen relativ-unabhängig sind, und

Digitized by Google

$$y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha},\ z_\beta = \frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta},\ u_\gamma = \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}, \ldots$$

ist. Die partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf

$$y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_\alpha;$$
$$z,\ z_1,\ z_2,\ \ldots\ z_\beta;$$
$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_\gamma;$$

u. s. f. n. f. f.

sollen der Kürze wegen durch

$$Y,\ \overset{1}{Y},\ \overset{2}{Y},\ \ldots\ \overset{\alpha}{Y};$$
$$Z,\ \overset{1}{Z},\ \overset{2}{Z},\ \ldots\ \overset{\beta}{Z};$$
$$U,\ \overset{1}{U},\ \overset{2}{U},\ \ldots\ \overset{\gamma}{U};$$

u. s. f. u. s. f.

bezeichnet werden. Man sucht nun $\delta V = \delta \int v \partial x$.

Das mit ∂x behaftete Glied, wenn zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen berücksichtigt werden, ist (23.)

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \delta x = \frac{\partial \int v \partial x}{\partial x} \delta x = v \delta x.$$

Wird von den Variationen der absolut-unabhängigen Größen abstrahirt; so ist dieses Glied $= 0$ zu setzen, wie aus dem Obigen sogleich erhellet. Nach Bestimmung dieses Gliedes haben wir nun die Variation bloß in Bezug auf die relativ-unabhängigen Größen, als absolut-unabhängige betrachtet, zu entwickeln (23.). Es ist aber in dieser Beziehung (9.):

$$\begin{aligned}\delta v = {} & Y\delta y + \overset{1}{Y}\delta y_1 + \overset{2}{Y}\delta y_2 + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\delta y_\alpha \\ & + Z\delta z + \overset{1}{Z}\delta z_1 + \overset{2}{Z}\delta z_2 + \ldots + \overset{\beta}{Z}\delta z_\beta \\ & + U\delta u + \overset{1}{U}\delta u_1 + \overset{2}{U}\delta u_2 + \ldots + \overset{\gamma}{U}\delta u_\gamma \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

oder, weil überhaupt (18. 19.)

Digitized by Google

$$\delta y_\alpha = \delta\left(\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha},$$

$$\delta z_\beta = \delta\left(\frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta},$$

$$\delta u_\gamma = \delta\left(\frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}\right) = \frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma},$$

u. s. f. u. s. f.

ist,

$$\delta V = Y\delta y + \overset{1}{Y}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha}$$
$$+ Z\delta z + \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta}$$
$$+ U\delta u + \overset{1}{U}\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \overset{2}{U}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Es ist aber $\delta\int v\partial x = \int(\delta v)\,\partial x$ (24.). Integrirt man also, und fügt, um auch δx zu berücksichtigen, das schon oben bestimmte Glied $v\delta x$ bey; so erhält man:

$$\delta V = v\delta x + \int Y\delta y\,\partial x + \int Z\delta z\,\partial x + \int U\delta u\,\partial x \ldots$$
$$+ \int \overset{1}{Y}\frac{\partial\delta y}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Y}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha}\partial x$$
$$+ \int \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta}\partial x$$
$$+ \int \overset{1}{U}\frac{\partial\delta u}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{U}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma}\partial x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folglich nach (25.) $\delta V =$

$$v\delta x + \int Y\delta y\,\partial x + \int Z\delta z\,\partial x + \int \delta u\,\partial x + \ldots.$$
$$- \int \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x}\delta y\,\partial x + \overset{1}{Y}\delta y$$
$$+ \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2}\delta y\,\partial x + \overset{2}{Y}\frac{\partial\delta y}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{Y}}{\partial x}\delta y$$
$$- \int \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3}\delta y\,\partial x + \overset{3}{Y}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial \overset{3}{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Y}}{\partial x^2}\delta y$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\pm \int \frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}\delta y\,\partial x + \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}} - \frac{\partial \overset{\alpha}{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{\alpha-2}\delta y}{\partial x^{\alpha-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\alpha-1}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-1}}\delta y$$

Digitized by Google

$$-\int\frac{\partial^1 Z}{\partial x}\delta z\,\partial x + {}^1Z\,\delta z$$

$$+\int\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\delta z\,\partial x + {}^2Z\frac{\partial\delta z}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x}\delta z$$

$$-\int\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}\delta z\,\partial x + {}^3Z\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\delta z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\int\frac{\partial^\beta Z}{\partial x^\beta}\delta z\,\partial x + {}^\beta Z\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}} - \frac{\partial^\beta Z}{\partial x}\frac{\partial^{\beta-2}\delta z}{\partial x^{\beta-2}} + \cdots \mp \frac{\partial^{\beta-1}{}^\beta Z}{\partial x^{\beta-1}}\delta z$$

$$-\int\frac{\partial^1 U}{\partial x}\delta u\,\partial x + {}^1U\delta u$$

$$+\int\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\delta u\,\partial x + {}^2U\frac{\partial\delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x}\delta x$$

$$-\int\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\delta u\,\partial x + {}^3U\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 U}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\delta u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\int\frac{\partial^\gamma U}{\partial x^\gamma}\delta u\,\partial x + {}^\gamma U\frac{\partial^{\gamma-1}\delta u}{\partial x^{\gamma-1}} - \frac{\partial^\gamma U}{\partial x}\frac{\partial^{\gamma-2}\delta u}{\partial x^{\gamma-2}} + \cdots \mp \frac{\partial^{\gamma-1}{}^\gamma U}{\partial x^{\gamma-1}}\delta u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= v\delta x$$

$$+\int\delta y\left\{Y - \frac{\partial^1 Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} + \cdots \pm \frac{\partial^\alpha Y}{\partial x^\alpha}\right\}\partial x$$

$$+\int\delta z\left\{Z - \frac{\partial^1 Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Z}{\partial x^3} + \cdots \pm \frac{\partial^\beta Z}{\partial x^\beta}\right\}\partial x$$

$$+\int\delta u\left\{U - \frac{\partial^1 U}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \cdots \pm \frac{\partial^\gamma U}{\partial x^\gamma}\right\}\partial x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\delta y\left\{{}^1Y - \frac{\partial^2 Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^3Y}{\partial x^2} - \cdots \mp \frac{\partial^{\alpha-1}{}^\alpha Y}{\partial x^{\alpha-1}}\right\}$$

$$+\frac{\partial\delta y}{\partial x}\left\{{}^2Y - \frac{\partial^3 Y}{\partial x} + \cdots \pm \frac{\partial^{\alpha-2}{}^\alpha Y}{\partial x^{\alpha-2}}\right\}$$

$$+\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\left\{{}^3Y - \cdots \mp \frac{\partial^{\alpha-3}{}^\alpha Y}{\partial x^{\alpha-3}}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}{}^\alpha Y$$

Digitized by Google

$$+\ \delta z\left\{{}^{1}Z-\frac{\partial {}^{2}Z}{\partial x}+\frac{\partial^2 {}^{3}Z}{\partial x^2}-\ldots\pm\frac{\partial^{\beta-1}{}^{\beta}Z}{\partial x^{\beta-1}}\right\}$$

$$+\ \frac{\partial\delta z}{\partial x}\left\{{}^{2}Z-\frac{\partial {}^{3}Z}{\partial x}+\ldots\pm\frac{\partial^{\beta-2}{}^{\beta}Z}{\partial x^{\beta-2}}\right\}$$

$$+\ \frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\left\{{}^{3}Z-\ldots\mp\frac{\partial^{\beta-3}{}^{\beta}Z}{\partial x^{\beta-3}}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ \frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}{}^{\beta}Z$$

$$+\ \delta u\left\{{}^{1}U-\frac{\partial {}^{2}U}{\partial x}+\frac{\partial^2 {}^{3}U}{\partial x^2}-\ldots\mp\frac{\partial^{\gamma-1}{}^{\gamma}U}{\partial x^{\gamma-1}}\right\}$$

$$+\ \frac{\partial\delta u}{\partial x}\left\{{}^{2}U-\frac{\partial {}^{3}U}{\partial x}+\ldots\pm\frac{\partial^{\gamma-2}{}^{\gamma}U}{\partial x^{\gamma-2}}\right\}$$

$$+\ \frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}\left\{{}^{2}U-\ldots\mp\frac{\partial^{\gamma-3}{}^{\gamma}U}{\partial x^{\gamma-3}}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\ \frac{\partial^{\gamma-1}\delta u}{\partial x^{\gamma-1}}{}^{\gamma}U$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist zwischen denselben Gränzen wie das gegebene Integral zu nehmen (24.).

27. Am häufigsten kommt der Fall vor, wo

$$v=f(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots.).$$

In diesem Falle hat man also

$$\delta V=\delta\int v\partial x=$$

$$v\delta x+\left\{{}^{1}Y-\frac{\partial {}^{2}Y}{\partial x}+\frac{\partial^2 {}^{3}Y}{\partial x^2}-\frac{\partial^3 {}^{4}Y}{\partial x^4}+\ldots..\right\}\delta y$$

$$+\left\{{}^{2}Y-\frac{\partial {}^{3}Y}{\partial x}+\frac{\partial^2 {}^{4}Y}{\partial x^2}-\ldots.\right\}\frac{\partial\delta y}{\partial x}$$

$$+\left\{{}^{3}Y-\frac{\partial {}^{4}Y}{\partial x}+\ldots\right\}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}$$

$$+\left\{{}^{4}Y-\ldots\right\}\frac{\partial^3\delta y}{\partial x^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int\left\{Y-\frac{\partial {}^{1}Y}{\partial x}+\frac{\partial^2 {}^{2}Y}{\partial x^2}-\frac{\partial^3 {}^{3}Y}{\partial x^3}+\frac{\partial^4 {}^{4}Y}{\partial x^4}-\ldots.\right\}\delta y\,\partial x$$

Digitized by Google

Euler bedient sich hierbei folgender Bezeichnung, welche wir wegen ihrer Einfachheit künftig öfters gebrauchen werden. Sey

$$\partial y = p\partial x,\ \partial p = q\partial x,\ \partial q = r\partial x,\ \partial r = s\partial x,\ \ldots;$$
$$v = f(x, y, p, q, r, s, \ldots);$$

so ist

$$\partial v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)\partial q + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\delta V = \delta \int v\partial x =$$
$$v\delta x + \left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y$$
$$+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots.\right\}\frac{\partial \delta y}{\partial x}$$
$$+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\partial x$$

indem

$$N = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = Y,\ \frac{\partial y}{\partial x} = p = y_1;$$
$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \overset{1}{Y},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q = y_2;$$
$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \overset{2}{Y},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r = y^3;$$
$$R = \left(\frac{\partial v}{\partial y_3}\right) = \overset{3}{Y},\ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) = s = y_4;$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

28. Ist hier

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0,$$

so ist $\delta \int v\partial x$ ohne Integrationszeichen ausgedrückt, und es läßt sich also, da $\delta \int v\partial x = \int(\delta v)\,\partial x$ ist (24.), die Function $(\delta v)\,\partial x$ vollständig integriren, oder $(\delta v)\,\partial x$ ist ein vollständiges Differential irgend einer gewissen Function. Man setze daher $(\delta v)\,\partial x = \partial v'$, und betrachte v'

Digitized by Google

als Variation irgend einer gewissen Function v'', welches wegen der Willkührlichkeit und Allgemeinheit des Variirens offenbar verstattet ist; so ist,

$$\delta v = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial \delta v''}{\partial x} = \delta\left(\frac{\partial v''}{\partial x}\right),$$

also $v = \frac{\partial v''}{\partial x}$, $v\partial x = \partial v''$, und demnach $v\partial x$ ein vollständiges Differential, also integrabel. Ist also v irgend eine Function von x, y und, indem man y als von x abhängig betrachtet, p der Differentialquotient von y, und es ist, wenn wir $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = M$ setzen,

$$\partial v = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = M + N\frac{\partial y}{\partial x} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + R\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots;$$

so ist $v\partial x$ integrabel, oder ein vollständiges Differential einer gewissen Function, wenn

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0$$

ist, weshalb diese Gleichung die Bedingungsgleichung der Integrabilität genannt wird. Dies dient zugleich zur Ergänzung von Thl. I. S. 906, Thl. III. S. 771.

29. Sey jetzt

$$V = \int\int v\partial x\partial y,$$
$$v = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \ldots\right),$$

wo x, y absolut-unabhängige Größen sind, z dagegen eine relativ-unabhängige ist.

Berücksichtigen wir zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen; so sind die δx und δy enthaltenden Glieder von δV auf ähnliche Art wie vorher

$$= \left(\frac{\partial \int\int v\partial x\partial y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \int\int v\partial x\partial y}{\partial y}\right)\delta y$$
$$= \left(\frac{\partial \int \partial x \int v\partial y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \int \partial y \int v\partial x}{\partial y}\right)\delta y$$
$$= \delta x.\int v\partial y + \delta y.\int v\partial x.$$

Bezeichnen wir nun allgemein den partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$ durch $\overset{m}{\underset{n}{Z}}$; so ist, wenn wir nun auf δx und δy nicht Rücksicht nehmen, und

Digitized by Google

zugleich die Variationen der Differentialquotienten wie gewöhnlich umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\delta v = {} & \overset{0}{Z}\delta z \\ & + \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{0}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial y} \\ & + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{0}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} \\ & + \overset{3}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \overset{0}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Wird nun auf beiden Seiten mit $\partial x\,\partial y$ multiplicirt, integrirt, und die in δx und δy multiplicirten Glieder wieder beigefügt; so ist (24.)

$$\delta V = \delta\iint v\partial x\partial y =$$

$$\begin{aligned}& \delta x\,.\int v\partial y + \delta y\,.\int v\partial x \\ & + \iint\partial x\,\partial y\Big\{\overset{0}{Z}\delta z + \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{3}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \ldots \\ & \qquad + \overset{0}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \ldots \\ & \qquad\qquad + \overset{0}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad + \overset{0}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\end{aligned}$$

Die doppelten Integrale können nun auch hier nach (25.) entwickelt werden, welches wir indeß blos an einem Beispiele zeigen wollen, woraus jedoch das allgemeine Verfahren leicht erhellen wird. Es ist also z. B.

$$\iint\overset{2}{Z}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\partial y^2}\partial x\,\partial y = \int\partial x\int\overset{2}{Z}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\partial y^2}\partial y$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\partial y + \overset{2}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial y}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\Big\}\partial x$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^4\overset{2}{Z}}{\partial x^2\partial y^2}\delta z\,\partial x + \frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial y^2}\frac{\partial\delta z}{\partial x} - \frac{\partial^3\overset{2}{Z}}{\partial x\partial y^2}\delta z\Big\}\partial y$$

$$+ \int\frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial x^2}\frac{\partial\delta z}{\partial y}\partial x + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial x}\frac{\partial\delta z}{\partial y}$$

$$- \int\frac{\partial^3\overset{2}{Z}}{\partial x^2\partial y}\delta z\,\partial x - \frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial y}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial x\partial y}\delta z$$

Digitized by Google

denselben Gränzen genommen werden, und dann ist natürlich δx z. B., als eine willkührliche Function von x, $= \delta a$ für $x = a$, $= \delta b$ für $x = b$ zu setzen.

Von ganz besonderer Wichtigkeit für die Anwendung der Variationsrechnung auf die Lehre von dem Größten und Kleinsten ist die Entwickelung der ersten Variation unbestimmter Integralformeln zwischen gegebenen Gränzen, wozu wir jetzt übergehen.

25. Seyen p, q Functionen von x; so ist nach der Reductionsformel Thl. II. S. 783.

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x = \int p \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x} \partial x - \int \partial p \int \frac{\partial \left(\frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \right)}{\partial x} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x .$$

Folglich, durch successive Zerlegung mittelst dieser Formel:

$$\int p \frac{\partial^n q}{\partial x^n} \partial x =$$

$$p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \int \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \int \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} \partial x$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} - \int \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} \partial x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^{n-3} q}{\partial x^{n-3}} - \ldots .$$

$$\ldots . \mp \frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}} q \pm \int \frac{\partial^n p}{\partial x^n} q \partial x$$

$$= \pm \int \frac{\partial^n p}{\partial x^n} q \partial x + p \frac{\partial^{n-1} q}{\partial x^{n-1}} - \frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial^{n-2} q}{\partial x^{n-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{n-1} p}{\partial x^{n-1}} q + C .$$

26. Sey nun

$$V = \int v \partial x ,$$

$$v = f(x, y, y_1, \ldots y_\alpha, z, z_1, \ldots z_\beta, u, u_1, \ldots u_\gamma, \ldots)$$

wo x absolut-unabhängig, x, y, u, ... dagegen relativ-unabhängig sind, und

Digitized by Google

$$y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}, \; z_\beta = \frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta}, \; u_\gamma = \frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}, \ldots$$

ist. Die partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf

$$y, y_1, y_2, \ldots . y_\alpha ;$$
$$z, z_1, z_2, \ldots . z_\beta ;$$
$$u, u_1, u_2, \ldots . u_\gamma ;$$

u. s. f. n. f. f.

sollen der Kürze wegen durch

$$Y, \overset{1}{Y}, \overset{2}{Y}, \ldots . \overset{\alpha}{Y} ;$$
$$Z, \overset{1}{Z}, \overset{2}{Z}, \ldots . \overset{\beta}{Z} ;$$
$$U, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \ldots . \overset{\gamma}{U} ;$$

u. s. f. u. s. f.

bezeichnet werden. Man sucht nun $\delta V = \delta \int v \partial x$.

Das mit δx behaftete Glied, wenn zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen berücksichtigt werden, ist (23.)

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) \delta x = \frac{\partial \int v \partial x}{\partial x} \delta x = v \delta x .$$

Wird von den Variationen der absolut-unabhängigen Größen abstrahirt; so ist dieses Glied $= o$ zu setzen, wie aus dem Obigen sogleich erhellet. Nach Bestimmung dieses Gliedes haben wir nun die Variation bloß in Bezug auf die relativ-unabhängigen Größen, als absolut-unabhängige betrachtet, zu entwickeln (23.). Es ist aber in dieser Beziehung (9.):

$$\begin{aligned} \delta v = \; & Y\delta y + \overset{1}{Y}\delta y_1 + \overset{2}{Y}\delta y_2 + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\delta y_\alpha \\ & + Z\delta z + \overset{1}{Z}\delta z_1 + \overset{2}{Z}\delta z_2 + \ldots + \overset{\beta}{Z}\delta z_\beta \\ & + U\delta u + \overset{1}{U}\delta u_1 + \overset{2}{U}\delta u_2 + \ldots + \overset{\gamma}{U}\delta u_\gamma \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder, weil überhaupt (18. 19.)

Digitized by Google

$$\delta y_\alpha = \delta\left(\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha},$$

$$\delta z_\beta = \delta\left(\frac{\partial^\beta z}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta},$$

$$\delta u_\gamma = \delta\left(\frac{\partial^\gamma u}{\partial x^\gamma}\right) = \frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma},$$

u. s. f. u. s. f.

ist,

$$\delta V = Y\delta y + \overset{1}{Y}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \overset{2}{Y}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha}$$

$$+ Z\delta z + \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta}$$

$$+ U\delta u + \overset{1}{U}\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \overset{2}{U}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} + \ldots + \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma}$$

. . . . . .

Es ist aber $\delta\int v\partial x = \int(\delta v)\,\partial x$ (24.). Integrirt man also, und fügt, um auch δx zu berücksichtigen, das schon oben bestimmte Glied $v\delta x$ bey; so erhält man:

$$\delta V = v\delta x + \int Y\delta y\,\partial x + \int Z\delta z\,\partial x + \int U\delta u\,\partial x \ldots$$

$$+ \int \overset{1}{Y}\frac{\partial\delta y}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Y}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^\alpha \delta y}{\partial x^\alpha}\partial x$$

$$+ \int \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\beta}{Z}\frac{\partial^\beta \delta z}{\partial x^\beta}\partial x$$

$$+ \int \overset{1}{U}\frac{\partial\delta u}{\partial x}\partial x + \int \overset{2}{U}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}\partial x + \ldots + \int \overset{\gamma}{U}\frac{\partial^\gamma \delta u}{\partial x^\gamma}\partial x$$

. . . . . .

Folglich nach (25.) $\delta V =$

$$v\delta x + \int Y\delta y\,\partial x + \int Z\delta z\,\partial x + \int U\delta u\,\partial x + \ldots.$$

$$- \int \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x}\delta y\,\partial x + \overset{1}{Y}\delta y$$

$$+ \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2}\delta y\,\partial x + \overset{2}{Y}\frac{\partial\delta y}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{Y}}{\partial x}\delta y$$

$$- \int \frac{\partial^3 \overset{3}{Y}}{\partial x^3}\delta y\,\partial x + \overset{3}{Y}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial \overset{3}{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Y}}{\partial x^2}\delta y$$

. . . . . .

$$\pm \int \frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}\delta y\,\partial x + \overset{\alpha}{Y}\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}} - \frac{\partial \overset{\alpha}{Y}}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{\alpha-2}\delta y}{\partial x^{\alpha-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\alpha-1}\overset{\alpha}{Y}}{\partial x^{\alpha-1}}\delta y$$

Digitized by Google

$$-\int\frac{\partial^1 Z}{\partial x}\delta z\,\partial x + {}^1Z\,\delta z$$

$$+\int\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\delta z\,\partial x + {}^2Z\frac{\partial\delta z}{\partial x} - \frac{\partial^2 Z}{\partial x}\delta z$$

$$-\int\frac{\partial^3 Z}{\partial x^3}\delta z\,\partial x + {}^3Z\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Z}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\delta z$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\int\frac{\partial^\beta {}^\beta Z}{\partial x^\beta}\delta z\,\partial x + {}^\beta Z\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}} - \frac{\partial^\beta Z}{\partial x}\frac{\partial^{\beta-2}\delta z}{\partial x^{\beta-2}} + \cdots \mp \frac{\partial^{\beta-1}{}^\beta Z}{\partial x^{\beta-1}}\delta z$$

$$-\int\frac{\partial^1 U}{\partial x}\delta u\,\partial x + {}^1U\delta u$$

$$+\int\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\delta u\,\partial x + {}^2U\frac{\partial\delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x}\delta x$$

$$-\int\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\delta u\,\partial x + {}^3U\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 U}{\partial x}\cdot\frac{\partial\delta u}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\delta u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\pm\int\frac{\partial^\gamma {}^\gamma U}{\partial x^\gamma}\delta u\,\partial x + {}^\gamma U\frac{\partial^{\gamma-1}\delta u}{\partial x^{\gamma-1}} - \frac{\partial^\gamma U}{\partial x}\frac{\partial^{\gamma-2}\delta u}{\partial x^{\gamma-2}} + \cdots \mp \frac{\partial^{\gamma-1}{}^\gamma U}{\partial x^{\gamma-1}}\delta u$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= v\,\partial x$$

$$+\int\delta y\left\{Y - \frac{\partial^1 Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^2Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 {}^3Y}{\partial x^3} + \cdots \pm \frac{\partial^\alpha {}^\alpha Y}{\partial x^\alpha}\right\}\partial x$$

$$+\int\delta z\left\{Z - \frac{\partial^1 Z}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^2Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 {}^3Z}{\partial x^3} + \cdots \pm \frac{\partial^\beta {}^\beta Z}{\partial x^\beta}\right\}\partial x$$

$$+\int\delta u\left\{U - \frac{\partial^1 U}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^2U}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 {}^3U}{\partial x^3} + \cdots \pm \frac{\partial^\gamma {}^\gamma U}{\partial x^\gamma}\right\}\partial x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\delta y\left\{{}^1Y - \frac{\partial^2 {}^2Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^3Y}{\partial x^2} - \cdots \mp \frac{\partial^{\alpha-1}{}^\alpha Y}{\partial x^{\alpha-1}}\right\}$$

$$+\frac{\partial\delta y}{\partial x}\left\{{}^2Y - \frac{\partial^3 {}^3Y}{\partial x} + \cdots \pm \frac{\partial^{\alpha-2}{}^\alpha Y}{\partial x^{\alpha-2}}\right\}$$

$$+\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\left\{{}^3Y - \cdots \mp \frac{\partial^{\alpha-3}{}^\alpha Y}{\partial x^{\alpha-3}}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}{}^\alpha Y$$

Digitized by Google

$$+\ \delta z\left\{\overset{1}{Z}-\frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{3}{Z}}{\partial x^2}-\ldots\pm\frac{\partial^{\beta-1}\overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-1}}\right\}$$

$$+\frac{\partial\delta z}{\partial x}\left\{\overset{2}{Z}-\frac{\partial\overset{3}{Z}}{\partial x}+\ldots\pm\frac{\partial^{\beta-2}\overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-2}}\right\}$$

$$+\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\left\{\overset{3}{Z}-\ldots\mp\frac{\partial^{\beta-3}\overset{\beta}{Z}}{\partial x^{\beta-3}}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}\overset{\beta}{Z}$$

$$+\ \delta u\left\{\overset{1}{U}-\frac{\partial\overset{2}{U}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{3}{U}}{\partial x^2}-\ldots\mp\frac{\partial^{\gamma-1}\overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-1}}\right\}$$

$$+\frac{\partial\delta u}{\partial x}\left\{\overset{2}{U}-\frac{\partial\overset{3}{U}}{\partial x}+\ldots\pm\frac{\partial^{\gamma-2}\overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-2}}\right\}$$

$$+\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2}\left\{\overset{2}{U}-\ldots\mp\frac{\partial^{\gamma-3}\overset{\gamma}{U}}{\partial x^{\gamma-3}}\right\}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{\partial^{\gamma-1}\delta u}{\partial x^{\gamma-1}}\overset{\gamma}{U}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ist zwischen denselben Gränzen wie das gegebene Integral zu nehmen (24.).

27. Am häufigsten kommt der Fall vor, wo

$$v=f(x,\ y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots).$$

In diesem Falle hat man also

$$\delta V=\delta\int v\partial x=$$

$$v\partial x+\left\{\overset{1}{Y}-\frac{\partial\overset{2}{Y}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{3}{Y}}{\partial x^2}-\frac{\partial^3\overset{4}{Y}}{\partial x^4}+\ldots\ldots\right\}\delta y$$

$$+\left\{\overset{2}{Y}-\frac{\partial\overset{3}{Y}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{4}{Y}}{\partial x^2}-\ldots\ldots\right\}\frac{\partial\delta y}{\partial x}$$

$$+\left\{\overset{3}{Y}-\frac{\partial\overset{4}{Y}}{\partial x}+\ldots\right\}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}$$

$$+\left\{\overset{4}{Y}-\ldots\right\}\frac{\partial^3\delta y}{\partial x^3}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int\left\{Y-\frac{\partial\overset{1}{Y}}{\partial x}+\frac{\partial^2\overset{2}{Y}}{\partial x^2}-\frac{\partial^3\overset{3}{Y}}{\partial x^3}+\frac{\partial^4\overset{4}{Y}}{\partial x^4}-\ldots\ldots\right\}\delta y\,\partial x$$

Digitized by Google

Euler bedient sich hierbei folgender Bezeichnung, welche wir wegen ihrer Einfachheit künftig öfters gebrauchen werden. Sey

$$\partial y = p\partial x,\ \partial p = q\partial x,\ \partial q = r\partial x,\ \partial r = s\partial x,\ \ldots;$$
$$v = f(x, y, p, q, r, s, \ldots);$$

so ist

$$\partial v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)\partial q + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\delta V = \delta \int v\partial x =$$
$$v\delta x + \left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y$$
$$+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots.\right\}\frac{\partial \delta y}{\partial x}$$
$$+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x$$

indem

$$N = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = Y,\ \frac{\partial y}{\partial x} = p = y_1;$$
$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) = \overset{1}{Y},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q = y_2;$$
$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) = \overset{2}{Y},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r = y^3;$$
$$R = \left(\frac{\partial v}{\partial y_3}\right) = \overset{3}{Y},\ \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) = s = y_4;$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

28. Ist hier

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0,$$

so ist $\delta \int v\partial x$ ohne Integrationszeichen ausgedrückt, und es läßt sich also, da $\delta \int v\partial x = f(\delta v)\,\partial x$ ist (24.), die Function $(\delta v)\,\partial x$ vollständig integriren, oder $(\delta v)\,\partial x$ ist ein vollständiges Differential irgend einer gewissen Function. Man setze daher $(\delta v)\,\partial x = \partial v'$, und betrachte v'

Digitized by Google

als Variation irgend einer gewissen Function v'', welches wegen der Willkührlichkeit und Allgemeinheit des Variirens offenbar verstattet ist; so ist,

$$\delta v = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial \delta v''}{\partial x} = \delta\left(\frac{\partial v''}{\partial x}\right),$$

also $v = \frac{\partial v''}{\partial x}$, $v\partial x = \partial v''$, und demnach $v\partial x$ ein vollständiges Differential, also integrabel. Ist also v irgend eine Function von x, y und, indem man y als von x abhängig betrachtet, p der Differentialquotient von y, und es ist, wenn wir $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = M$ setzen,

$$\partial v = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = M + N\frac{\partial y}{\partial x} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + R\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \ldots;$$

so ist $v\partial x$ integrabel, oder ein vollständiges Differential einer gewissen Function, wenn

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = 0$$

ist, weshalb diese Gleichung die Bedingungsgleichung der Integrabilität genannt wird. Dies dient zugleich zur Ergänzung von Thl. I. S. 906, Thl. III. S. 771.

29. Sey jetzt

$$V = \int\int v\partial x\partial y,$$
$$v = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \ldots\right),$$

wo x, y absolut-unabhängige Größen sind, z dagegen eine relativ-unabhängige ist.

Berücksichtigen wir zugleich die Variationen der absolut-unabhängigen Größen; so sind die δx und δy enthaltenden Glieder von δV auf ähnliche Art wie vorher

$$= \left(\frac{\partial \int\int v\partial x\partial y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \int\int v\partial x\partial y}{\partial y}\right)\delta y$$
$$= \left(\frac{\partial \int \partial x \int v\partial y}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial \int \partial y \int v\partial x}{\partial y}\right)\delta y$$
$$= \delta x . \int v\partial y + \delta y . \int v\partial x .$$

Bezeichnen wir nun allgemein den partiellen Differentialquotienten von v in Bezug auf $\frac{\partial^{m+n} z}{\partial x^m \partial y^n}$ durch $\overset{m}{\underset{n}{Z}}$; so ist, wenn wir nun auf δx und δy nicht Rücksicht nehmen, und

Digitized by Google

zugleich die Variationen der Differentialquotienten wie gewöhnlich umgeformt werden:

$$\begin{aligned}\delta v = {} & \overset{0}{Z}\delta z \\ & + \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{0}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial y} \\ & + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{0}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} \\ & + \overset{3}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \overset{0}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Wird nun auf beiden Seiten mit $\partial x\,\partial y$ multiplicirt, integrirt, und die in δx und δy multiplicirten Glieder wieder beigefügt; so ist (24.)

$$\delta V = \delta\iint v\partial x\partial y =$$

$$\begin{aligned}& \delta x\,.\int v\partial y + \delta y\,.\int v\partial x \\ & + \iint\partial x\,\partial y\Big\{\overset{0}{Z}\delta z + \overset{1}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \overset{3}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^3} + \ldots \\ & \qquad + \overset{0}{Z}\frac{\partial\delta z}{\partial y} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} + \overset{2}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} + \ldots \\ & \qquad\qquad + \overset{0}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2} + \overset{1}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x\partial y^2} + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad + \overset{0}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial y^3} + \ldots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\end{aligned}$$

Die doppelten Integrale können nun auch hier nach (25.) entwickelt werden, welches wir indeß blos an einem Beispiele zeigen wollen, woraus jedoch das allgemeine Verfahren leicht erhellen wird. Es ist also z. B.

$$\iint\overset{2}{Z}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\partial y^2}\partial x\,\partial y = \int\partial x\int\overset{2}{Z}\frac{\partial^4\delta z}{\partial x^2\partial y^2}\partial y$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial y^2}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\partial y + \overset{2}{Z}\frac{\partial^3\delta z}{\partial x^2\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial y}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\Big\}\partial x$$

$$= \int\Big\{\int\frac{\partial^3\overset{2}{Z}}{\partial x^2\partial y^2}\delta z\,\partial x + \frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial y^2}\frac{\partial\delta z}{\partial x} - \frac{\partial^3\overset{2}{Z}}{\partial x\partial y^2}\delta z\Big\}\partial y$$

$$+ \int\frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial x^2}\frac{\partial\delta z}{\partial y}\partial x + \overset{2}{Z}\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial x}\frac{\partial\delta z}{\partial y}$$

$$- \int\frac{\partial^3\overset{2}{Z}}{\partial x^2\partial y}\delta z\,\partial x - \frac{\partial\overset{2}{Z}}{\partial y}\frac{\partial\delta z}{\partial x} + \frac{\partial^2\overset{2}{Z}}{\partial x\partial y}\delta z$$

Digitized by Google

$$= \iint \frac{\partial^4 \overset{2}{Z}}{\partial x^2 \partial y^2} \delta z \, \partial x \, \partial y$$

$$- \int \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y^2} \delta z \, \partial y - \int \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x^2 \partial y} \delta z \, \partial x$$

$$+ \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial y^2} \frac{\partial \delta z}{\partial x} \partial y + \int \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x^2} \frac{\partial \delta z}{\partial y} \partial x$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y} \delta z - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial y} \frac{\partial \delta z}{\partial x} - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial x} \frac{\partial \delta z}{\partial y} + \overset{2}{Z} \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x \partial y} .$$

Entwickelt man auf dieſe Weiſe alle doppelte Integrale in obiger Reihe; ſo erhält man nach gehöriger Subſtitution:

$$\delta V = \delta \iint v \partial x \, \partial y =$$

$$\delta x . \int v \partial y + \delta y . \int v \partial x$$

$$+ \iint \partial x \, \partial y \, \delta z \left\{ \begin{matrix} \overset{0}{Z} \\ \overset{0}{0} \end{matrix} \right. - \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{3}{Z}}{\partial x^3} + \ldots$$

$$- \frac{\partial \overset{0}{Z}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x^2 \partial y} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{0}{Z}}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \overset{1}{Z}}{\partial x \partial y^2} + \ldots$$

$$- \frac{\partial^3 \overset{0}{Z}}{\partial y^3} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int \partial y \, \delta x \left\{ \begin{matrix} \overset{1}{Z} \\ \overset{0}{0} \end{matrix} \right. - \frac{\partial \overset{2}{Z}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{3}{Z}}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 \overset{4}{Z}}{\partial x^3} + \ldots$$

$$- \frac{\partial \overset{1}{Z}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^3 \overset{3}{Z}}{\partial x^2 \partial y} + \ldots$$

$$+ \frac{\partial^2 \overset{1}{Z}}{\partial y^2} - \frac{\partial^3 \overset{2}{Z}}{\partial x \partial y^2} + \ldots$$

$$- \frac{\partial^3 \overset{1}{Z}}{\partial y^3} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

$$+\int \partial x\,\partial z \left\{ {}^{0}_{1}Z - \frac{\partial {}^{1}_{0}Z}{\partial {}^{1}_{1}x} + \frac{\partial^2 {}^{2}_{0}Z}{\partial {}^{1}_{1}x^2} - \frac{\partial^3 {}^{3}_{0}Z}{\partial {}^{1}_{1}x^3} + \ldots. \right.$$

$$- \frac{\partial {}^{0}_{2}Z}{\partial {}^{2}_{1}y} + \frac{\partial^2 {}^{1}_{1}Z}{\partial {}^{2}_{1}x\,\partial {}^{1}_{1}y} - \frac{\partial^3 {}^{2}_{0}Z}{\partial {}^{2}_{1}x^2\,\partial {}^{1}_{1}y} + \ldots.$$

$$+ \frac{\partial^2 {}^{0}_{2}Z}{\partial {}^{2}_{1}y^2} - \frac{\partial^3 {}^{1}_{1}Z}{\partial {}^{2}_{1}x\,\partial {}^{2}_{1}y^2} + \ldots.$$

$$- \frac{\partial^3 {}^{0}_{3}Z}{\partial {}^{3}_{1}y^3} + \ldots.$$

$$+\int \partial y\,\frac{\partial \partial z}{\partial x} \left\{ {}^{2}_{0}Z - \frac{\partial {}^{3}_{0}Z}{\partial {}^{0}_{1}x} + \frac{\partial^2 {}^{4}_{0}Z}{\partial {}^{0}_{1}x^2} - \ldots. \right.$$

$$- \frac{\partial {}^{2}_{1}Z}{\partial {}^{1}_{1}y} + \frac{\partial^2 {}^{3}_{1}Z}{\partial {}^{1}_{1}x\,\partial {}^{1}_{1}y} - \ldots.$$

$$+ \frac{\partial^2 {}^{2}_{2}Z}{\partial {}^{2}_{1}y^2} - \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int \partial x\,\frac{\partial \partial z}{\partial y} \left\{ {}^{0}_{2}Z - \frac{\partial {}^{1}_{2}Z}{\partial {}^{2}_{1}x} + \frac{\partial^2 {}^{2}_{2}Z}{\partial {}^{2}_{1}x^2} - \ldots. \right.$$

$$- \frac{\partial {}^{0}_{3}Z}{\partial {}^{3}_{1}y} + \frac{\partial^2 {}^{1}_{2}Z}{\partial {}^{3}_{1}y\,\partial {}^{1}_{1}x} - \ldots.$$

$$+ \frac{\partial^2 {}^{0}_{4}Z}{\partial {}^{4}_{1}y^2} - \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int \partial y\,\frac{\partial^2 \partial z}{\partial x^2} \left\{ {}^{3}_{0}Z - \frac{\partial {}^{4}_{0}Z}{\partial {}^{1}_{1}x} + \ldots. \right.$$

$$- \frac{\partial {}^{3}_{1}Z}{\partial {}^{1}_{1}y} + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$+\int \partial x\,\frac{\partial^2 \partial z}{\partial y^2} \left\{ {}^{0}_{2}Z - \frac{\partial {}^{1}_{2}Z}{\partial {}^{3}_{1}x} + \ldots. \right.$$

$$- \frac{\partial {}^{0}_{3}Z}{\partial {}^{4}_{1}y} + \ldots.$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\text{\&c.} \qquad \text{\&c.}$$

Digitized by Google

$$+\delta x\left\{{}^{1}_{1}Z-\frac{\partial {}^{2}_{1}Z}{\partial x}+\frac{\partial^2 {}^{3}_{1}Z}{\partial x^2}-\ldots.\right.$$
$$\ldots.\left.-\frac{\partial {}^{1}_{2}Z}{\partial y}+\frac{\partial^2 {}^{2}_{2}Z}{\partial x\partial y}-\ldots.\right.$$
$$\ldots.\left.+\frac{\partial^2 {}^{1}_{3}Z}{\partial y^2}-\ldots.\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\partial\delta z}{\partial y}\left\{{}^{1}_{2}Z-\frac{\partial {}^{2}_{2}Z}{\partial x}+\ldots.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial {}^{1}_{3}Z}{\partial y}+\ldots.\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\partial\delta z}{\partial x}\left\{{}^{2}_{1}Z-\frac{\partial {}^{3}_{1}Z}{\partial x}+\ldots.\right.$$
$$\left.-\frac{\partial {}^{2}_{2}Z}{\partial y}+\ldots.\right.$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$+\frac{\partial^2\delta z}{\partial y^2}\left\{{}^{1}_{3}Z-\ldots\right\}$$
$$+\frac{\partial^2\delta z}{\partial x\partial y}\left\{{}^{2}_{2}Z-\ldots\right\}$$
$$+\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2}\left\{{}^{3}_{1}Z-\ldots\right\}$$
$$\text{ꝛc.}\qquad\text{ꝛc.}$$

Dieser Ausdruck besteht aus drei verschiedenartigen Theilen, von denen der eine mit doppelten Integralzeichen, der andere mit dem einfachen behaftet, der letzte aber von dem Integralzeichen befreit ist. Weitere Belehrung suche man in besondern, unten anzuführenden, Werken über die Variationsrechnung.

30. Sey jetzt, um noch ein Paar zusammengesetztere Fälle zu betrachten,

$$v' = f(x, y, y_1, y_2, \ldots. y_\mu),$$
$$V' = \int v'\partial x;$$

Digitized by Google

$$v = f(V', x, y, y_1, y_2, \ldots, y_\nu),$$
$$V = \int v \partial x;$$

man soll δV finden. Das δx enthaltende Glied ist wie immer $=$

$$\left(\frac{\partial \int v \partial x}{\partial x}\right) \delta x = v \delta x,$$

so daß nun die Variation bloß in Bezug auf y, y_1, y_2, ..., wie absolut-unabhängige Größen betrachtet, zu entwickeln ist. Da aber v auch von V' abhängt; so ist zugleich nach der gewöhnlichen Transformation der Variationen der Differentialquotienten:

$$\delta v =$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \delta V' + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial y_\nu}\right) \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu}.$$

Aber $\delta V' = \delta \int v' \partial x = \int \delta v' \partial x$, $\delta V = \delta \int v \partial x = \int \delta v \partial x$. Folglich, wenn man zugleich δx berücksichtigt:

$$\delta V =$$
$$v \delta x + \int \left| \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \int \delta v' \partial x \right| \partial x$$
$$+ \int \left| \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v}{\partial y_\nu}\right) \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \right| \partial x$$
$$= v \delta x + \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \cdot \int \delta v' \partial x - \int \left| \delta v' \partial x \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \right|$$
$$+ \int \left| Y \delta y + {}^1Y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + {}^2Y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \ldots + {}^\nu Y \frac{\partial^\nu \delta y}{\partial x^\nu} \right| \partial x$$

alle Integrale zwischen denselben gegebenen Gränzen genommen. Setzen wir nun den zwischen denselben Gränzen genommenen Werth von $\int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x = \mathfrak{J}$; so ist klar, daß, da $\int \delta v' \partial x$ zwischen denselben Gränzen genommen werden muß,

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x \cdot \int \delta v' \partial x = \int \mathfrak{J} \delta v' \partial x$$

ist, letzteres Integral zwischen denselben Gränzen genommen. Folglich ist, für

$$\mathfrak{J} - \int \left(\frac{\partial v}{\partial V'}\right) \partial x = I,$$

Digitized by Google

$$\delta V =$$

$$v\delta x + \int I\,\delta v'\,\partial x + \int \Big\{ Y\delta y + {}^{1}Y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + {}^{2}Y\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + {}^{\nu}Y\frac{\partial^\nu\delta y}{\partial x^\nu}\Big\}\partial x .$$

Aber

$$\delta v' = \left(\frac{\partial v'}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \ldots + \left(\frac{\partial v'}{\partial y_\mu}\right)\frac{\partial^\mu \delta y}{\partial x}$$

$$= Y'\delta y + {}^{1}Y'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + {}^{2}Y'\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + {}^{\mu}Y'\frac{\partial^\mu\delta y}{\partial x} .$$

Also

$$\delta V =$$

$$v\delta x + \int \Big\{ Y\delta y + {}^{1}Y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + {}^{2}Y\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + {}^{\nu}Y\frac{\partial^\nu\delta y}{\partial x^\nu}\Big\}\partial x$$

$$+ \int I\Big\{ Y'\delta y + {}^{1}Y'\frac{\partial\delta y}{\partial x} + {}^{2}Y'\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots + {}^{\mu}Y'\frac{\partial^\mu\delta y}{\partial x^\mu}\Big\}\partial x$$

$$= v\delta x$$
$$+ \int Y\delta y\,\partial x$$
$$- \int \frac{\partial {}^{1}Y}{\partial x}\delta y\,\partial x + {}^{1}Y\delta y$$
$$+ \int \frac{\partial^2 {}^{2}Y}{\partial x^2}\delta y\,\partial x + {}^{2}Y\frac{\partial\delta y}{\partial x} - \frac{\partial {}^{2}Y}{\partial x}\delta y$$
$$- \int \frac{\partial^3 {}^{3}Y}{\partial x^3}\delta y\,\partial x + {}^{3}Y\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial {}^{3}Y}{\partial x}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^{3}Y}{\partial x^2}\delta y$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm \int \frac{\partial^\nu {}^{\nu}Y}{\partial x^\nu}\delta y\,\partial x + {}^{\nu}Y\frac{\partial^{\nu-1}\delta y}{\partial x^{\nu-1}} - \frac{\partial {}^{\nu}Y}{\partial x}\frac{\partial^{\nu-2}\delta y}{\partial x^{\nu-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-1} {}^{\nu}Y}{\partial x^{\nu-1}}\delta y$$
$$+ \int I Y'\delta y\,\partial x$$
$$- \int \frac{\partial . I {}^{1}Y'}{\partial x}\delta y\,\partial x + I {}^{1}Y'\delta y$$
$$+ \int \frac{\partial^2 . I {}^{2}Y'}{\partial x^2}\delta y\,\partial x + I {}^{2}Y'\frac{\partial\delta y}{\partial x} - \frac{\partial . I {}^{2}Y'}{\partial x}\delta y$$
$$- \int \frac{\partial^3 . I {}^{3}Y'}{\partial x^3}\delta y\,\partial x + I {}^{3}Y'\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} - \frac{\partial . I {}^{3}Y'}{\partial x}\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \frac{\partial^2 . I {}^{3}Y'}{\partial x^2}\delta y$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm \int \frac{\partial^\mu . I {}^{\mu}Y'}{\partial x^\mu}\delta y\,\partial x + I {}^{\mu}Y'\frac{\partial^{\mu-1}\delta y}{\partial x^{\mu-1}} - \frac{\partial . I {}^{\mu}Y'}{\partial x}\frac{\partial^{\mu-2}\delta y}{\partial x^{\mu-2}} + \ldots \mp \frac{\partial^{\mu-1} . I {}^{\mu}Y'}{\partial x^{\mu-1}}\delta y$$

Digitized by Google

$$= v\partial x$$

$$+ \int \partial y \left\{ Y - \frac{\partial^1 Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} + \ldots \pm \frac{\partial^\nu Y}{\partial x^\nu} \right\} \partial x$$

$$+ \partial y \left\{ {}^1Y - \frac{\partial {}^2Y}{\partial x} + \frac{\partial^2 {}^3Y}{\partial x^2} - \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-1} {}^\nu Y}{\partial x^{\nu-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \partial y}{\partial x} \left\{ {}^2Y - \frac{\partial {}^3Y}{\partial x} + \ldots \pm \frac{\partial^{\nu-2} {}^\nu Y}{\partial x^{\nu-2}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial^2 \partial y}{\partial x^2} \left\{ {}^3Y - \ldots \mp \frac{\partial^{\nu-3} {}^\nu Y}{\partial x^{\nu-3}} \right\}$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$+ \frac{\partial^{\nu-1} \partial y}{\partial x^{\nu-1}} {}^\nu Y$$

$$+ \int \partial y \left\{ IY' - \frac{\partial . IY'}{\partial x} + \frac{\partial^2 . I^2 Y'}{\partial x^2} - \ldots \pm \frac{\partial^\mu . I^\mu Y'}{\partial x^\mu} \right\} \partial x$$

$$+ \partial y \left\{ I^1 Y' - \frac{\partial . I^2 Y'}{\partial x} + \ldots \mp \frac{\partial^{\mu-1} . I^\mu Y'}{\partial x^{\mu-1}} \right\}$$

$$+ \frac{\partial \partial y}{\partial x} \left\{ I^2 Y' - \ldots \pm \frac{\partial^{\mu-2} . I^\mu Y'}{\partial x^{\mu-2}} \right\}$$

$$\ldots \quad \ldots$$

$$+ \frac{\partial^{\mu-1} \partial y}{\partial x^{\mu-1}} I^\mu Y' .$$

31. Wäre

$$v'' = f^{\lambda}(x, y, y_1, y_2, \ldots y_\lambda) ,$$
$$V'' = \int v'' \partial x ;$$

$$v' = f(V'', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\mu) ,$$
$$V' = \int v' \partial x ;$$

$$v = f(V', x, y, y_1, y_2, \ldots y_\nu) ,$$
$$V = \int v \partial x ;$$

und δV zu entwickeln; so würde nach einem ganz ähnlichen Verfahren wie vorher zu der vorigen Entwickelung noch ein dem zweiten Haupttheile derselben ganz ähnlicher Theil hinzutreten, wenn man nur überall λ statt μ setzt, I' statt I, und Y'' statt Y' schreibt, wo

$$\mathfrak{Y} = \int I \left(\frac{\partial v'}{\partial V''} \right) \partial x$$

zwischen den gegebenen Gränzen, und

Digitized by Google

$$V = \mathfrak{V} - \int \left(\frac{\partial v'}{\partial V''}\right) \partial x$$

gesetzt ist, woraus denn auch leicht das allgemeine Gesetz erhellen wird.

II. Anwendung der Variationsrechnung auf die Lehre von dem Größten und Kleinsten.

32. Die Lehre von dem Größten und Kleinsten enthält mehrere Theile, welche man wohl von einander trennen muß.

Der erste und leichteste beschäftigt sich mit der Frage, in einer Gleichung zwischen x und y die Werthe von x zu finden, für welche die zugehörigen Werthe von y Größte oder Kleinste werden, d. h. größer oder kleiner sind als alle unmittelbar vorhergehenden oder nachfolgenden Werthe von y. Die Beantwortung dieser Frage gehört ganz in das Gebiet der Differentialrechnung, und ist in diesem Wörterbuche in dem Art. Größtes und Kleinstes gegeben.

Zweitens aber kann man, wenn irgend ein unbestimmter Integralausdruck gegeben ist, unter allen möglichen Relationen, welche zwischen den veränderlichen Größen desselben statt finden können, diejenigen aufzufinden verlangen, für welche der gegebene Integralausdruck, zwischen denselben Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Sollte z. B. die Curve gefunden werden, welche, zwei gegebene Punkte mit einander verbindend, bei der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt; so würde (Complanation. Thl. I. S. 514.) diese Frage darauf zurück kommen, die Relation oder die Gleichung zwischen x und y zu finden, für welche der unbestimmte Integralausdruck

$$2\pi \int y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

zwischen den durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten Gränzen genommen, ein Kleinstes wird. Solche

Digitized by Google

Größte oder Kleinste nennt man nach Eulers Vorgange absolute Maxima und Minima. Methodus maximorum et minimorum absoluta docet, inter omnes curvas, ad eandem abscissam relatas, determinare eam, in qua proposita quaedam variabilis maximum minimumve obtineat valorem (Euleri Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Laus. et Genèv. 1744. p. 4.), welches offenbar mit dem obigen rein analytischen Begriff übereinkommt.

Drittens kann man endlich auch unter allen Relationen der veränderlichen Größen, welche für einen oder mehrere gegebene unbestimmte Integralausdrücke, zwischen denselben Gränzen genommen, dieselben bestimmten Werthe geben, diejenigen aufzufinden verlangen, für welche ein anderer, ebenfalls gegebener Integralausdruck, zwischen denselben Gränzen genommen, ein Größtes oder ein Kleinstes wird. Sollte z. B. unter allen den Curven, welche zwischen zwei gegebenen Punkten einerley Länge haben, diejenige gefunden werden, welche bei der Umdrehung um die Abcissenaxe die kleinste Oberfläche erzeugt; so würde diese Aufgabe offenbar darauf zurückkommen, die Relation oder Gleichung zwischen x und y zu finden, für welche zwischen den gegebenen, durch die beiden gegebenen Punkte bestimmten, Gränzen

$$\int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \text{Const},$$

und $2\pi \int y \, \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ ein Minimum wird. Solche Größte und Kleinste heißen relative Maxima und Minima. Methodus maximorum et minimorum relativa docet, non inter omnes omnino curvas eidem abscissae respondentes, sed inter eas tantum, quae praesciptam quandam proprietatem communem habeant, eam determinare, quae maximi minimive proprietate gaudeat (l. c. p. 5.)

Zu dieser letzten Klasse von Aufgaben gehört auch das so berühmte isoperimetrische Problem, welches un-

Digitized by Google

ter allen Curven von einerlei Länge zwischen gegebenen Gränzen diejenige zu finden lehrt, durch welche eine gegebene Bedingung des Größten oder Kleinsten erfüllt wird, worüber unter den historischen Notizen am Ende ein Mehreres.

A. Absolute Maxima und Minima.

33. Sey nun, wenn y als Function von x betrachtet wird,

$$v = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots\right),$$

oder auch, wenn auch z als Function von x betrachtet wird,

$$v = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots; z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots\right),$$

und $V = \int v \partial x$, dieses Integral zwischen bestimmten Gränzen genommen. Man soll die Relation zwischen x und y so bestimmen, daß der zwischen den gegebenen Gränzen genommene Werth dieses Integrals ein Maximum oder Minimum werde, d. h. so, daß, wenn man sich die Relation zwischen x und y allmählig, oder stetig, geändert denkt, woraus auch eine stetige Aenderung besagten Werthes unsers Integrals hervorgehen wird, derselbe größer oder kleiner werde als alle unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Nachbarwerthe, so daß aber die Aenderung des Werthes immer als durch die Aenderung der zwischen x und y statt findenden Relation hervorgebracht gedacht wird. Man denke sich nun die gesuchte Relation zwischen x und y gefunden, und dann auf irgend eine Art geändert; so geht V über in

$$V_i = V + \partial V \cdot \frac{i}{1} + \partial^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \partial^3 V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots;$$

woraus

$$V_i - V = \partial V \cdot \frac{i}{1} + \partial^2 V \cdot \frac{i^2}{1.2} + \partial^3 V \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Soll nun der zwischen den gegebenen Gränzen genommene Werth von $V = \int v \partial x$ ein Maximum oder Minimum werden; so muß zwischen diesen Gränzen für jede noch so

Digitized by Google

kleine Aenderung der Relation zwischen x und y, d. i. für jedes noch so kleine i, für das Maximum $V_i - V < o$, für das Minimum $V_i - V > o$ seyn. Da man sich aber i so klein genommen denken kann, daß das Zeichen von $V_i - V$ bloß von dem ersten Gliede $\delta V . \frac{i}{1}$ (Vergl. Taylors Lehrsatz. 29. — 32.), welches, da i von einer ungeraden Potenz ist, sowohl positiv als negativ seyn kann, abhängt; so kann offenbar keine der beiden obigen Bedingungen für alle noch so kleine i statt finden, wenn nicht dieses Glied, unabhängig von i, zwischen den gegebenen Gränzen $= o$ ist, woraus sich als gemeinschaftliche Bedingung das Maximum und Minimum

$$\delta V = o$$

ergiebt, die Variation zwischen den gegebenen Gränzen genommen.

Also ist

$$V_i - V = \delta^2 V . \frac{i^2}{1.2} + \delta^3 V . \frac{i^3}{1.2.3} + \delta^4 V . \frac{i^4}{1 \ldots 4} + \ldots$$

wo man aber i wieder so klein nehmen kann, daß das Zeichen von $V_i - V$ bloß von dem ersten Gliede $\delta^2 V . \frac{i^2}{1.2}$, d. i., da i^2 immer positiv ist, bloß von $\delta^2 V$ abhängt, woraus als Bedingung des Maximum

$$\delta^2 V < o ,$$

als Bedingung des Minimum

$$\delta^2 V > o ,$$

immer zwischen den gegebenen Gränzen genommen, folgt.

Setzt man $\int v \partial x$ für V; so erhält man als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum:

$$\delta \int v \partial x = o , \quad \int (\delta v) \partial x = o ;$$

als Bedingung des Maximum:

$$\delta^2 \int v \partial x < o , \quad \int (\delta^2 v) \partial x < o ,$$

und als Bedingung des Minimum:

$$\delta^2 \int v \partial x > o , \quad \int (\delta^2 v) x > o ,$$

immer zwischen den gegebenen Gränzen genommen.

34. Wenn, wie wir hier voraussetzen, die Gränzen, zwischen denen das Integral in Bezug auf x zu nehmen ist,

Digitized by Google

völlig bestimmt und gegeben sind; so wird man offenbar von den Variationen von x völlig zu abstrahiren, und bloß y sich als variirt zu denken haben, obgleich auch, wie wir weiter unten sehen werden, unter gewissen Bedingungen auch die Variationen von x zu berücksichtigen seyn können. Um dieser Bemerkung mehr Anschaulichkeit zu geben, setze man z. B. es sey die Curve zu finden, welche zwischen zwey gegebenen Punkten P, P′ (Fig. 95.) bey der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt, und nehme an, PP′ sey die gesuchte Curve; so kann offenbar zwischen denselben, durch die beiden gegebenen Gränzen von x völlig bestimmten, Ordinaten PQ, P′Q′ jede andere willkührliche Curve pp′ bloß durch Variation von y hervorbringen, indem die Abscisse x ganz ungeändert bleibt. Abstrahiren wir also, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, von den Variationen von x zunächst gänzlich, und setzen daher $\delta x = 0$.

35. Mit Anwendung der von Euler eingeführten Bezeichnung (27.), nach welcher

$$\partial y = p\partial x,\ \partial p = q\partial x,\ \partial q = x\partial x,\ \partial r = s\partial x,\ \ldots;$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = N,\ \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = P,\ \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right) = Q,\ \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right) = R,\ \ldots;$$

$$v = f(x, y, p, q, r, \ldots)$$

gesetzt wird, ist (27.):

$$\begin{aligned}\delta V = &\left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\\ &+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\\ &+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\\ &+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3 \delta y}{\partial x^3}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x\,.\end{aligned}$$

Diese Variation muß, als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum, zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$, für jedes willkührliche δy, d. h. unabhängig von jeder besondern Form dieser Varia-

Digitized by Google

tion, als Function von y oder x gedacht, $= 0$ seyn. Bezeichnen wir also, indem die Anzahl der Glieder der Reihe unter dem Integralzeichen $= \alpha + 1$, die Anzahl der Glieder des von dem Integralzeichen befrei'ten Theils also $= \alpha$ gesetzt wird, die einzelnen Glieder dieses Theils durch

$$\overset{1}{K}\delta y, \overset{2}{K}\frac{\partial\delta y}{\partial x}, \overset{3}{K}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}, \ldots, \overset{\alpha}{K}\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}},$$

und die Werthe derselben für $x = a$ und $x = b$ durch Beifügung von a und b unten zur rechten Hand; so ist für das Maximum und Minimum;

$$\begin{aligned} 0 = {} & \overset{1}{K}_b(\delta y)_b - \overset{1}{K}_a(\delta y)_a \\ & + \overset{2}{K}_b\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b - \overset{2}{K}_a\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right) \\ & + \overset{3}{K}_b\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_b - \overset{3}{K}_a\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_a \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \overset{\alpha}{K}_b\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b - \overset{\alpha}{K}_a\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a \\ & + \int_a^b \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x \end{aligned}$$

für jedes beliebige δy. Man denke sich nun für δy eine beliebige Function mit $2\alpha + 1$ willkührlichen Constanten gesetzt; so wird man 2α dieser Constanten sich immer so bestimmt denken können, daß

$$0 = \int_a^b \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \cdots\right\}\delta y\,\partial x,$$

$$0 = (\delta y)_a = \left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_a = \left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_a = \ldots = \left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a,$$

$$0 = \left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b = \left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)_b = \ldots = \left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b,$$

und die letzte noch übrige willkührliche Constante wird man dazu benutzen können, $(\delta y)_b$ so zu bestimmen, daß es nicht $= 0$ ist. Unsere obige für jedes δy statt findende Gleichung reducirt sich hiernach, da $(\delta y)_b$ nicht $= 0$ ist auf

$$\overset{1}{K}_b(\delta y)_b = 0, \quad \overset{1}{K}_b = 0.$$

Ganz auf dieselbe Weise überzeugt man sich, daß

Digitized by Google

$$o = \overset{1}{K} = \overset{2}{K} = \overset{3}{K}_a = \ldots \overset{\alpha}{K}_a ;$$
$$o = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots \overset{\alpha}{K}_b ;$$

woraus nun ferner unmittelbar folgt, daß für jedes ∂y

$$\int_a^b \left\{ N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots \right\} \partial y \, \partial x = o$$

seyn muß, woraus ferner sogleich folgt, daß identisch

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots = o$$

seyn muß. Denn, wäre dies nicht der Fall; so setze man, vorhergehende Reihe durch φx bezeichnend, einmal $\partial y = \frac{fx}{\varphi x}$, wo fx eine ganz willkührliche Function von x bezeichnet. Dann wäre

$$\int_a^b \varphi x \frac{fx}{\varphi x} \partial x = \int_a^b fx . \partial x = o ,$$

d. h. für jede willkührliche Function fx das Integral $\int fx \partial x$, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen, $= o$, welches offenbar ungereimt ist. Also muß φx identisch $= o$ seyn, so daß also

$$o = \overset{1}{K}_a = \overset{2}{K}_a = \overset{3}{K}_a = \ldots = \overset{\alpha}{K}_a ;$$
$$o = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots = \overset{\alpha}{K}_b ;$$
$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots = o$$

ist. Die ersten 2α Gleichungen heißen die Gränzgleichungen, die letzte heißt die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum, die also mit der Bedingungsgleichung der Integrabilität (28.) einerlei ist

36. Die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum läßt sich für

$$v = f(x, y, y_1, y_2, \ldots y_\alpha)$$

mittelst der in (26.) gebrauchten Bezeichnung auch so darstellen;

$$Y - \frac{\partial \overset{1}{Y}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \overset{2}{Y}}{\partial x^2} - \ldots \pm \frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha} = o .$$

Dies ist im Allgemeinen eine Differentialgleichung vom

Digitized by Google

Grade 2α. Denn $\overset{\alpha}{Y} = \left(\frac{\partial v}{\partial y_\alpha}\right)$ kann offenbar den Differentialquotienten $y_\alpha = \frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha}$, folglich $\frac{\partial^\alpha \overset{\alpha}{Y}}{\partial x^\alpha}$ den Differentialquotienten $\frac{\partial^{2\alpha} y}{\partial x^{2\alpha}}$ enthalten. Durch die Integration dieser Gleichung, welche auf die gesuchte Relation zwischen x und y führt, werden also 2α willkührliche Constanten in die Rechnung eingeführt, zu deren Bestimmung die 2α Gränzgleichungen dienen, nachdem nämlich die gesuchte Relation schon im Allgemeinen gefunden. In einigen besondern Fällen, wovon wir jetzt einige der wichtigsten durchgehen wollen, läßt sich indeß der Grad der allgemeinen Bedingungsgleichung des Maximum und Minimum erniedrigen.

37. α. Enthielte v die Größe y nicht; so wäre $N = 0$ zu setzen; also die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots = 0,$$

$$\partial P - \frac{\partial^2 Q}{\partial x} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^3} + \ldots = 0,$$

$$\partial P - \partial \frac{\partial Q}{\partial x} + \partial \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \partial \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots = 0,$$

woraus durch Integration:

$$P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots = C,$$

offenbar eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 1$.

β. Wäre in v weder y, noch $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ enthalten; so wäre auch $P = 0$ zu setzen, und folglich

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \ldots = C,$$

$$-\partial Q + \frac{\partial^2 R}{\partial x} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^3} - \ldots = C\partial x,$$

$$-Q + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots = Cx + C',$$

eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 2$.

γ. Enthielte v ferner auch $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht; so wäre auch $Q = 0$,

Digitized by Google

$$\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \ldots = Cx + C',$$

$$R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots = Cx\partial x + C'\partial x,$$

$$R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots = Cx^2 + C'x + C'',$$

wenn nur C statt $\frac{1}{2}$ C gesetzt wird. Diese Differentialgleichung ist nur vom Grade $2\alpha - 3$. Wie man weiter gehen kann, erhellet leicht.

δ. Wäre ferner x nicht unmittelbar in v enthalten; so wäre (27.)

$$\partial v = N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots.$$

Aber, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum:

$$N = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots,$$

welches, in obige Gleichung gesetzt, giebt:

$$\begin{aligned}
\partial v &= P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots \\
&\quad + \frac{\partial P}{\partial x}\partial y - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial y + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial y - \ldots \\
&= P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots \\
&\quad + p\frac{\partial P}{\partial x}\partial x - p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x + p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x - \ldots \\
v &= \int P\partial p + \int Q\partial q + \int R\partial r + \int S\partial s + \ldots \\
&\quad + \int p\frac{\partial P}{\partial x}\partial x - \int p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x + \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x - \ldots.
\end{aligned}$$

Aber (Thl. II. S. 783.):

$$\int P\partial p = \int P\frac{\partial p}{\partial x}\partial x = Pp - \int p\frac{\partial P}{\partial x}\partial x;$$

$$\begin{aligned}
\int Q\partial q &= \int Q\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\partial x \\
&= Q\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}p + \int\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}p\partial x \\
&= Qq - p\frac{\partial Q}{\partial x} + \int p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int R\partial r &= \int R\frac{\partial^3 p}{\partial x^3}\partial x \\
&= R\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}p - \int\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}p\,\partial x \\
&= Rr - q\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x;
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\int S\partial s = \int S\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}\partial x$$
$$= S\frac{\partial^3 p}{\partial x^3} - \frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}p + \int\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}p\,\partial x$$
$$= Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}\partial x\,;$$

u. s. f. u. s. f.

Substituirt man dies in obigen Ausdruck für v; so erhellet, daß die mit dem Integralzeichen behafteten Theile sich aufheben, und daß

$$v = p\left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}$$
$$+ q\left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}$$
$$+ r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}$$
$$+ s\left\{S - \ldots\right\}$$
$$\ldots\ldots$$
$$+ C$$

offenbar eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 1$ (S. das Vorhergehende).

ε. Wäre weder x noch y in v enthalten; so wäre

$$\partial v = P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \ldots,$$
$$o = \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + \ldots$$
$$= \partial P - \frac{\partial^2 Q}{\partial x} + \frac{\partial^3 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 S}{\partial x^3} + \ldots,$$
$$C = P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots,$$
$$P = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \ldots + C,$$

und folglich, dies in obigen Ausdruck für ∂v gesetzt,

$$\partial v = Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \ldots$$
$$+ \frac{\partial Q}{\partial x}\partial p - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial p + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial p - \ldots + C\partial p$$
$$= Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \ldots$$
$$+ q\frac{\partial Q}{\partial x}\partial x - q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial x + q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial x - \ldots + C\partial p,$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
v &= \int Q\partial q + \int R\partial r + \int S\partial s + \int T\partial t + \ldots \\
&+ \int q\frac{\partial Q}{\partial x}\partial x - \int q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial x + \int q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial x - \ldots + Cp + C' \\
&= Qq - p\frac{\partial Q}{\partial x} + \int p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\partial x \\
&+ Rr - q\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x \\
&+ Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}\partial x \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \int q\frac{\partial Q}{\partial x}\partial x - \int q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\partial x + \int q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\partial x - \ldots \\
&+ Cp + C' \\
&= q\left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \ldots\right\} \\
&+ r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \ldots\right\} \\
&+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \ldots\right\} \\
&+ t\left\{T - \ldots\right\} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots \\
&- p\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \ldots\right\} \\
&+ \int\left\{p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + q\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}\partial x \\
&- \int\left\{p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + q\frac{\partial^2 R}{\partial x^2}\right\}\partial x \\
&+ \int\left\{p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} + q\frac{\partial^3 S}{\partial x^3}\right\}\partial x \\
&- \ldots\ldots\ldots \\
&+ Cp + C'.
\end{aligned}
$$

Aber

$$
p\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + q\frac{\partial Q}{\partial x} = p\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial\left(p\frac{\partial Q}{\partial x}\right)}{\partial x},
$$

und eben so für die übrigen mit dem Integralzeichen behafteten Theile, so daß also die Summe dieser Integrale

$$
= p\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \ldots\right\}
$$

welches sich gegen die letzte vom Integralzeichen freie Reihe aufhebt. Also

Digitized by Google

$$v = q\left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + \dots\right\}$$
$$+ r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dots\right\}$$
$$+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \dots\right\}.$$
$$+ t\left\{T - \dots\right\} + \dots + Cp + C'$$

eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 2$.

ζ. Wäre auch p nicht in v enthalten, also $P = 0$; so wäre (β.):

$$-Q + \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \dots = Cx + C',$$
$$Q = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \dots - Cx - C'.$$

Aber

$$\partial v = Q\partial q + R\partial r + S\partial s + T\partial t + \dots$$
$$= R\partial r + S\partial s + T\partial t + \dots$$
$$+ \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial t - \dots - Cx\partial q - C'\partial q.$$

Aber $\int x\partial q = xq - \int q\partial x = xq - \int \partial p = xq - p$.

Folglich

$$v = \int R\partial r + \int S\partial s + \int T\partial t + \dots$$
$$+ \int \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \int \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \int \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial q - \dots$$
$$+ pC - q(Cx + C') + C''$$
$$= Rr - q\frac{\partial R}{\partial x} + p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \int p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3}\partial x$$
$$+ Ss - r\frac{\partial S}{\partial x} + q\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \int p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4}\partial x$$
$$+ Tt - s\frac{\partial T}{\partial x} + r\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - q\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} + p\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \int p\frac{\partial^5 T}{\partial x^5}\partial x$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \int \frac{\partial R}{\partial x}\partial q - \int \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial q + \int \frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial q - \dots$$
$$+ pC - q(Cx + C') + C''$$
$$= r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dots\right\}$$
$$+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \dots\right\}$$
$$+ t\left\{T - \dots\right\}$$
$$+ \dots\dots\dots$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&+ p\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \dots\right\}\\
&- q\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \dots\right\}\\
&- \int\left\{p\frac{\partial^3 R}{\partial x^3} - r\frac{\partial R}{\partial x}\right\}\partial x\\
&+ \int\left\{p\frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - r\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\right\}\partial x\\
&- \int\left\{p\frac{\partial^5 T}{\partial x^5} - r\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\right\}\partial x\\
&+ \dots\dots\dots\\
&+ pC - q(Cx + C') + C''\\
= \;& r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dots\right\}\\
&+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \dots\right\}\\
&+ t\left\{T - \dots\right\}\\
&\dots\dots\dots\\
&+ p\left\{\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} - \dots\right\}\\
&- q\left\{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \dots\right\}\\
&- p\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial x} - \int\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial R}{\partial x}\partial x + \int r\frac{\partial R}{\partial x}\partial x\\
&+ p\frac{\partial^3 S}{\partial x^3} - \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \int\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial x - \int r\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}\partial x\\
&- p\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3} - \int\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial x + \int r\frac{\partial^3 T}{\partial x^3}\partial x\\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\\
&+ pC - q(Cx + C') + C''.
\end{aligned}
$$

Da nun aber $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, $r = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ ist; so ist

$$
\begin{aligned}
v = \;& r\left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \dots\right\}\\
&+ s\left\{S - \frac{\partial T}{\partial x} + \dots\right\}\\
&+ t\left\{T - \dots\right\}\\
&\dots\dots\dots\\
&+ pC - q(Cx + C') + C'',
\end{aligned}
$$

eine Differentialgleichung vom Grade $2\alpha - 3$. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt in die Augen.

Digitized by Google

38. Seyen nun y, z Functionen von x. Die vorige Bezeichnung beibehaltend, setze man

$$\partial z = p'\partial x,\ \partial p' = q'\partial x,\ \partial q' = r'\partial x,\ \partial r' = s'\partial x, \ldots;$$
$$v = f(x, y, p, q, r, \ldots z, p', q', r', \ldots),$$
$$V = \int v\partial x,$$

und es sey dieses Integral, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Sey nun nach einer ähnlichen Bezeichnung wie vorher

$$\partial v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x$$
$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\partial y + \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\partial p + \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right)\partial q + \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)\partial r + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)\partial z + \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right)\partial p' + \left(\frac{\partial v}{\partial q'}\right)\partial q' + \left(\frac{\partial v}{\partial r'}\right)\partial r' + \ldots$$
$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\partial x$$
$$+ N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + \ldots$$
$$+ N'\partial z + P'\partial p' + Q'\partial q' + R'\partial r' + \ldots.$$

Wird also zur Bestimmung des Maximum oder Minimum $\partial V = 0$ gesetzt; so erhält man (26.):

$$0 = \left\{P - \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S}{\partial x^3} + \ldots\right\}\partial y$$
$$+ \left\{Q - \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - \ldots\right\}\frac{\partial\partial y}{\partial x}$$
$$+ \left\{R - \frac{\partial S}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2\partial y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S - \ldots\right\}\frac{\partial^3\partial y}{\partial x^3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \left\{P' - \frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial^2 R'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 S'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\partial z$$
$$+ \left\{Q' - \frac{\partial R'}{\partial x} + \frac{\partial^2 S'}{\partial x^2} + \ldots\right\}\frac{\partial\partial z}{\partial x}$$
$$+ \left\{R' - \frac{\partial S'}{\partial x} + \ldots\right\}\frac{\partial^2\partial y}{\partial x^2}$$
$$+ \left\{S' - \ldots\right\}\frac{\partial^3\partial y}{\partial x^3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\partial y\,\partial x$$
$$+ \int\left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots\right\}\partial z\,\partial x$$

Digitized by Google

$$= {}^{1}K\delta y + {}^{2}K\frac{\partial\delta y}{\partial x} + {}^{3}K\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + \ldots {}^{\alpha}K\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}$$

$$+ {}^{1}K'\delta z + {}^{2}K'\frac{\partial\delta z}{\partial x} + {}^{3}K'\frac{\partial^2\delta z}{\partial x^2} + \ldots {}^{\beta}K'\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}$$

$$+ \int\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta y\,\partial x$$

$$+ \int\left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots\right\}\delta z\,\partial x$$

zwischen den gegebenen Gränzen genommen, für jedes δy und δz. Also

$$\begin{aligned}
0 = {} & {}^{1}K_b(\delta y)_b - {}^{1}K_a(\delta y)_a \\
& + {}^{2}K_b\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_b - {}^{2}K_a\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)_a \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + {}^{\alpha}K_b\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_b - {}^{\alpha}K_a\left(\frac{\partial^{\alpha-1}\delta y}{\partial x^{\alpha-1}}\right)_a \\
& + {}^{1}K'_b(\delta z)_b - {}^{1}K'_a(\delta z)_a \\
& + {}^{2}K'_b\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)_b - {}^{2}K'_a\left(\frac{\partial\delta z}{\partial x}\right)_a \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + {}^{\beta}K'_b\left(\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}\right)_b - {}^{\beta}K'_a\left(\frac{\partial^{\beta-1}\delta z}{\partial x^{\beta-1}}\right)_a \\
& + \int_a^b\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\,\partial x \\
& + \int_a^b\left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta z\,\partial x
\end{aligned}$$

Hier sind nun zwey Fälle zu unterscheiden, jenachdem nämlich y und z von einander ganz unabhängig, oder selbst durch eine Gleichung mit einander verbunden sind. Im ersten Falle denke man sich für δz irgend eine Function mit $2\beta + 1$ willkührlichen Constanten gesetzt, und diese Constanten so bestimmt, daß alle mit δz und dessen Differentialquotienten behafteten Glieder (deren Anzahl $= 2\beta + 1$) verschwinden; so reducirt sich die obige Gleichung auf die Gleichung in (35.), und man kann nun ferner hier, wie dort, für δy jede willkührliche Function setzen, da y von z ganz unabhängig ist. Man kann aber dies auch umkehren, und sich zuerst für δy eine willkührliche Function mit

Digitized by Google

$2\alpha+1$ unbestimmten Constanten gesetzt, und diese Constanten sich so bestimmt denken, daß alle mit δy und dessen Differentialquotienten behafteten Glieder (deren Anzahl $=2\alpha+1$) verschwinden, wodurch sich die Gleichung auf eine ganz ähnliche Gleichung, in Bezug auf z, wie in (35.) reducirt, in welcher man, da y und z von einander ganz unabhängig sind, nun ferner für δz jede beliebige Function setzen kann. Folglich erhält man in diesem Falle nach (35.):

$$0 = \overset{1}{K}_a = \overset{2}{K}_a = \overset{3}{K}_a = \ldots = \overset{\alpha}{K}_a,$$

$$0 = \overset{1}{K}_b = \overset{2}{K}_b = \overset{3}{K}_b = \ldots = \overset{\alpha}{K}_b;$$

$$0 = \overset{1}{K'}_a = \overset{2}{K'}_a = \overset{3}{K'}_a = \ldots = \overset{\beta}{K'}_a;$$

$$0 = \overset{1}{K'}_b = \overset{2}{K'}_b = \overset{3}{K'}_b = \ldots = \overset{\beta}{K'}_b;$$

$$0 = N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \ldots,$$

$$0 = N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S'}{\partial x^4} - \ldots.$$

Die beiden letzten Gleichungen heißen auch hier die allgemeinen Bedingungen des Maximum und Minimum, die erstern, im Allgemeinen an der Zahl $=2(\alpha+\beta)$, die Gränzgleichungen, welche, wie oben, zur Bestimmung der bey der Integration einzuführenden willkührlichen Constanten dienen.

Sind aber y, z selbst von einander abhängig, und folglich zwischen diesen Größen eine Gleichung

$$u = \psi(x, y, z) = 0$$

gegeben, wie z. B., wenn eine, einer gewissen Bedingung des Maximum oder Minimum entsprechende, Curve gesucht werden soll, welche auf einer gegebenen, durch obige Gleichung characterisirten Fläche liegt; so müssen offenbar y, z, unter welchen Zuständen man sie sich auch denken mag, doch immer der obigen Gleichung entsprechen, so daß also selbige auch noch gelten muß, wenn man statt y, z die variirten y_i, z_i setzt, wodurch man erhält:

$$u_i = \psi(x, y_i, z_i) = 0,$$

Digitized by Google

also $u_1 - u = o$, $\delta u = o$, oder

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z = o .$$

Mittelst dieser Gleichung kann man δz, und folglich auch alle Differentialquotienten von δz, durch δy und dessen Differentialquotienten ausdrücken, wodurch dieser Fall also, wenn man sich die erhaltenen Ausdrücke in die obige allgemeine Gleichung für die entsprechenden Größen gesetzt denkt, ganz auf (35.) reducirt wird, und man folglich ganz wie dort für jedes δy, und das davon abhängende δz, erhält:

$$o = \int_a^b \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta y\,\partial x$$
$$+ \int_a^b \left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\delta z\,\partial x$$
$$= \int_a^b \varphi x\,\delta y\,\partial x + \int_a^b \varphi' x\,\delta z\,\partial x ,$$

woraus sich leicht ergiebt, daß identisch

$$\varphi x\,\delta y + \varphi' x\,\delta z = o$$

seyn muß. Denn, wäre dies nicht; so sey $\delta y = fx$, eine willkührliche Function von x, und das davon abhängende $\delta z = F(fx)$. Dann müßte also für jedes fx

$$o = \int_a^b \left\{\varphi x . fx + \varphi' x . F(fx)\right\}\partial x$$

seyn, welches offenbar ungereimt ist. Also hat man als allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum in diesem Falle:

$$o = \varphi x\,\delta y + \varphi' x\,\delta z$$
$$= N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots .$$
$$+ \left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots .\right\}\frac{\delta z}{\delta y} ,$$

woraus, in Verbindung mit

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\delta z}{\delta y} = o ,$$

$\frac{\delta z}{\delta y}$ eliminirt werden kann. Dies giebt:

$$\left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$= \left\{N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots\right\}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Digitized by Google

als allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum.

In Bezug auf die Gränzgleichungen müßte man, wie schon erinnert,

$$\delta z, \frac{\partial \delta z}{\partial x}, \frac{\partial^2 \delta z}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 \delta z}{\partial x^3}, \ldots$$

mittelst der Gleichung

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

durch δy ausdrücken, die Resultate in den allgemeinen Ausdruck der Variation δV für die entsprechenden Größen substituiren, und dann die Variation zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$, unabhängig von der Variation von y, $= 0$ setzen. Die vollständige Ausführung kann füglich hier übergangen werden.

Ein Beispiel der hier betrachteten allgemeinen Aufgabe liefert die wichtige Aufgabe, zwischen zwey auf einer krummen Fläche gegebenen Punkten die kürzeste Linie auf dieser krummen Fläche zu finden, wovon bey Gelegenheit der sphäroidischen Trigonometrie im Art. Trigonometrie (152. ff.) ausführlich gehandelt worden ist. Die zwischen y und z statt findende Relation liefert in diesem Falle die Gleichung der gegebenen Fläche. Noch einige hierher gehörende Beispiele, an denen sich noch Verschiedenes wird erläutern lassen, sollen weiter unten vorkommen.

39. Was nun ferner die Unterscheidung des Maximum und Minimum betrifft; so wird es hinreichend seyn, nur an ein Paar besondern Fällen zu zeigen, wie diese Untersuchung zu führen ist. Zunächst sind die Bedingungen fest zu stellen, unter welchen ein homogener Ausdruck von der Form $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + 2Dpr + 2Eqr + Fr^2$, wo A, B, C, D, E, F gegebene Größen bezeichnen, für alle reellen Werthe von p, q, r stets positiv oder stets negativ ist. Die Art der Darstellung wird zeigen, wie man sich bey complicirtern homogenen Ausdrücken des zweiten Grades mit mehreren veränderlichen Größen p, q, r, s, ... zu verhalten hat. Man denke sich obigen Ausdruck auf die Form

Digitized by Google

$$\mathfrak{A}(p + \alpha q + \alpha' r)^2 + \mathfrak{B}(q + \beta r)^2 + \mathfrak{C}r^2$$

gebracht, so wird diese Größe durch Entwickelung der Quadrate;

$$\mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{A}\alpha pq + (\mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B})q^2 + 2\mathfrak{A}\alpha' pr$$
$$+ 2(\mathfrak{A}\alpha\alpha' + \mathfrak{B}\beta)qr + (\mathfrak{A}\alpha'^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C})r^2,$$

welches, mit dem gegebenen Ausdrucke verglichen, folgende Gleichungen giebt:

$$\mathfrak{A} = A,\ \mathfrak{A}\alpha = B,\ \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B} = C,$$
$$\mathfrak{A}\alpha' = D,\ \mathfrak{A}\alpha\alpha' + \mathfrak{B}\beta = E,\ \mathfrak{A}\alpha'^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C} = F;$$

woraus;

$$\mathfrak{A} = A,\ \alpha = \frac{B}{A},\ \alpha' = \frac{D}{A},$$
$$\mathfrak{B} = C - \frac{B^2}{A},\ \beta = \frac{E - A\alpha\alpha'}{\mathfrak{B}},$$
$$\mathfrak{C} = F - \frac{D^2}{A} - \frac{(E - A\alpha\alpha')^2}{\mathfrak{B}},$$

wo für α, α', $\mathfrak{B}$ leicht ihre entwickelten Werthe gesetzt werden können. Ist also A nicht $= 0$; so lassen sich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, α, α', β immer bestimmen. Hierunter ist auch der einfachere Fall, wenn die gegebene homogene Function von der Form

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$$

ist, enthalten, da man im Obigen bloß $D = E = F = 0$ zu setzen braucht. Setzt man nämlich diesen Ausdruck

$$= \mathfrak{A}(p + \alpha q)^2 + \mathfrak{B}q^2;$$

so wird,

$$\mathfrak{A} = A,\ \mathfrak{B} = C - \frac{B^2}{A},\ \alpha = \frac{B}{A}.$$

Die Erweiterung dieses Verfahrens auf complicirtere homogene Functionen des zweiten Grades ist keinen Schwierigkeiten unterworfen. Wäre $A = 0$; so erhellet leicht, daß die hier betrachteten homogenen Functionen des zweiten Grades nie für alle reelle Werthe von p, q, r einerley Zeichen behalten können, wenn nicht auch die Coefficienten aller mit p behafteten Glieder $= 0$ sind, wodurch sie sich auf die einfachern Functionen $Cq^2 + 2Eqr + Fr^2$, und Cq^2 reduciren.

Ist nun A nicht $= 0$; so leuchtet ein, daß die gegebenen homogenen Functionen für alle reellen Werthe von

Digitized by Google

p, q, r oder p, q positiv oder negativ seyn werden, wenn $A > o$ oder $A < o$ ist, B, C oder B dagegen im ersten Falle nicht $< o$, im letzten nicht $> o$ sind.

Wäre im letzten einfachern Falle $AC - B^2 = o$; so würde offenbar das Zeichen von $Ap^2 + 2Bpq + Cq^2$ bloß von $\mathfrak{A} = A$ abhängen. Sollte im ersten Falle auch das Zeichen bloß von A abhängen; so setze man

$$\begin{aligned} &Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + 2Dpr + 2Eqr + Fr^2 \\ &= \mathfrak{A}(p + \alpha q + \alpha' r)^2 \\ &= \mathfrak{A}p^2 + 2\mathfrak{A}\alpha pq + \mathfrak{A}\alpha^2 q^2 + 2\mathfrak{A}\alpha' pr + 2\mathfrak{A}\alpha\alpha' qr + \mathfrak{A}\alpha'^2 r^2, \end{aligned}$$

woraus durch Vergleichung:

$$\mathfrak{A} = A,\ \mathfrak{A}\alpha = B,\ \mathfrak{A}\alpha^2 = C,\ \mathfrak{A}\alpha' = D,\ \mathfrak{A}\alpha\alpha' = E,\ \mathfrak{A}\alpha'^2 = F;$$

folglich, wenn α und α' eliminirt werden:

$$AC - B^2 = o,\ AF - D^2 = o,\ BD - AE = o,$$

welche Gleichungen also erfüllt seyn müssen, wenn das Zeichen des obigen homogenen Ausdruckes bloß von A abhängen soll.

40. Sey nun, um mit dem einfachsten Falle anzufangen, $v = f(x, y)$, und $\int v \partial x$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum ist in diesem Falle (35.)

$$\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = o,$$

und nach (21.) ist

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2.$$

Folglich, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, bloß zu setzen:

$$\delta^2 \int v \partial x = \int (\delta^2 v)\partial x = \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 \partial x,$$

zwischen den gegebenen Gränzen. Nun ist aber

$$\int_a^b \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 \partial x,$$

als die Summe aller Werthe des Differentialquotienten $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2$ zwischen den gegebenen Gränzen, offenbar positiv oder negativ, wenn dieser Differentialquotient zwischen

Digitized by Google

den gegebenen Gränzen selbst immer positiv oder negativ ist, so daß also, da δy^2 keinen Einfluß auf das Zeichen hat, $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv oder negativ ist, d. h. ein Minimum oder Maximum statt findet, wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen entweder immer positiv, oder immer negativ ist.

41. Sey ferner $v = f(x, y, y_1)$, und wieder $\int v \partial x$ zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum und die Gränzgleichungen (35.) sind:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o, \quad P = o, \quad P_b = o.$$

Ferner ist (21.):

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2.$$

Integrirt man die beiden ersten Glieder theilweise; so wird,

$$\int \left\{\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right\}\partial x = \int N \delta^2 y \partial x + \int P \partial \delta^2 y$$

$$= \int N \delta^2 y \partial x + P\delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta^2 y \partial x$$

$$= \int \left(N - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\delta^2 y \partial x + P\delta^2 y,$$

woraus nach dem Obigen erhellet, daß man zwischen den gegebenen Gränzen bloß

$$\delta^2 \int v \partial x = \int (\delta^2 v)\partial x =$$

$$\int \left\{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_1}\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right\}\partial x$$

$$= \int \left\{N' \delta y^2 + 2P' \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2\right\}\partial x$$

zu setzen braucht. Man setze nun, wenn φ eine willkührliche Function von x bedeutet, dieses Integral $=$

$$\varphi \delta y^2 + \int \left\{A\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + C\delta y^2\right\}\partial x.$$

Differentiirt man nach x; so erhält man:

Digitized by Google

$$N'\delta y^2 + 2P'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 =$$

$$A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2(B+\varphi)\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \left(C+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta y^2,$$

woraus durch Vergleichung:

$$A = Q',\ B = P' - \varphi,\ C = N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

für eine beliebige Function φ von x, so daß man sich also φ so bestimmt denken kann, daß

$$AC - B^2 = 0,\ \text{d. i. } Q'\left(N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - (P' - \varphi)^2 = 0$$

ist. Dann hängt aber, wie aus (39.) augenblicklich folgt, das Zeichen von

$$A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2$$

für jedes δy bloß von A ab, und es ist also, wenn $A = \frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}$ zwischen den gegebenen Gränzen immer positiv oder negativ ist, nach einem ähnlichen Raisonnement wie in (40.) auch

$$\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x$$

positiv oder negativ. Der zwischen den Gränzen $x = a$ $x = b$ genommenen Werth von $\delta^2\int v\partial x$ ist $=$

$$\varphi_b\,\delta y_b{}^2 - \varphi_a\,\delta y_a{}^2$$
$$+\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x.$$

Da aber φ durch die Differentialgleichung

$$Q'\left(N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - (P' - \varphi)^2 = 0$$

bestimmt wird; so läßt sich allemal eine willkührliche Constante einführen, welche, offenbar in

$$\varphi_b\,\delta y_b{}^2 - \varphi_a\,\delta y_a{}^2$$

eingehend, für jedes δy zwar anders, aber doch immer so bestimmt gedacht werden kann, daß diese Differenz mit

$$\int_a^b \left\{ A\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2B\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + C\delta y^2 \right\}\partial x$$

Digitized by Google

einerley Zeichen hat, so daß also auch $\delta^2 \int v \partial x$, zwischen den gegebenen Gränzen genommen, positiv oder negativ ist, d. i. ein Minimum oder Maximum statt findet, wenn $A = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ ist. Wäre A für jeden Werth von x, wenigstens zwischen den gegebenen Gränzen, $= o$; so müßte, wenn $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen diesen Gränzen immer einerley Zeichen behalten sollte, da $A = Q' = o$ ist, auch $P' = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_1} = o$ seyn (39.), und dann wäre offenbar $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv oder negativ, wenn $N' = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ wäre, wodurch in diesem Falle das Minimum und Maximum bedingt werden würde.

42. Weiter sey $v = f(x, y, y_1, y_2)$; so ist die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum nebst den Gränzgleichungen:

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o;$$

$$\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)_a = o, \quad \left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)_b = o; \quad Q_a = o, \quad Q_b = o.$$

Die zweite Variation ist (21.):

$$\begin{aligned} \delta^2 v = {} & \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) \frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} \\ & + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial y \partial y_1} \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} \\ & + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial y_2} \delta y \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} \\ & + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y_1 \partial y_2} \cdot \frac{\partial \delta y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right) \left(\frac{\partial^2 \delta y}{\partial x^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Durch theilweise Integration der drey ersten Glieder erhält man:

$$\begin{aligned} & \int \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) \delta^2 y + \left(\frac{\partial v}{\partial y_1}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y_2}\right) \frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} \right\} \partial x \\ = {} & \int \left\{ N \delta^2 y + P \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + Q \frac{\partial^2 \delta^2 y}{\partial x^2} \right\} \partial x \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$= \int N\delta^2y\,\partial x + P\delta^2y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta^2y\,\partial x$$
$$+ Q\frac{\partial\delta^2y}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial x}\delta^2y + \int \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\delta^2y\,\partial x$$
$$= \int \left\{N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right\}\delta^2y\,\partial y$$
$$+ \left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\delta^2y + Q\frac{\partial\delta^2y}{\partial x},$$

woraus, in Verbindung mit der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum und den Gränzgleichungen, erhellet, daß man zwischen den gegebenen Gränzen nur

$$\delta^2\int v\,\partial x = \int(\delta^2 v)\,\partial x =$$
$$\int \left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial y_1}\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial y^2}\delta y\frac{\partial^2\delta v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y_1\,\partial y_2}\frac{\partial\delta y}{\partial x_2}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right)\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)^2\end{array}\right\}\partial x$$
$$= \int \left\{\begin{array}{l}N'\delta y^2 + 2P'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2R'\delta y\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + 2S'\frac{\partial\delta y}{\partial x}\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + T'\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)^2\end{array}\right\}\partial x.$$

Man setze nun, wenn φ, φ', φ'' willkührliche Functionen von x bezeichnen:

$$\delta^2\int v\partial x =$$
$$\varphi\delta y^2 + 2\varphi'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \varphi''\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2$$
$$+ \int \left\{\begin{array}{l}A\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)^2 + 2B\frac{\partial\delta y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + C\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 \\ + 2D\delta y\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + 2E\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + F\delta y^2\end{array}\right\}\partial x,$$

und differentiire nach x; so wird:

$$N'\delta y^2 + 2P'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + Q'\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2$$
$$+ 2R'\delta y\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + 2S'\frac{\partial\delta y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2} + T'\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)^2$$
$$= A\left(\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}\right)^2 + 2(B+\varphi'')\frac{\partial\delta y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}$$
$$+ \left(C + 2\varphi' + \frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2 + 2(D+\varphi')\delta y\frac{\partial^2\delta y}{\partial x^2}$$
$$+ 2\left(E + \varphi + \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right)\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \left(F + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\delta y^2,$$

Digitized by Google

woraus durch Vergleichung:

$$A = T', B = S' - \varphi'', C = Q' - 2\varphi' - \frac{\partial\varphi''}{\partial x},$$

$$D = R' - \varphi', E = P' - \varphi - \frac{\partial\varphi'}{\partial x}, F = N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}.$$

φ, φ', φ'' sind willkührliche Functionen von x. Daher kann man diese Functionen sich so genommen denken, daß

$$AC - B^2 = 0, AF - D^2 = 0, BD - AE = 0$$

ist. Dann hängt das Zeichen der Größe unter dem Integralzeichen in $\delta^2 \int v\partial x$ bloß von $A = T' = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right)$ ab (39.), und das entsprechende Integral selbst wird daher, zwischen den gegebenen Gränzen genommen, positiv oder negativ seyn, wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ ist. Zur Bestimmung von φ, φ', φ'' erhält man aber aus dem Obigen folgende Differentialgleichungen:

$$T'\left(Q' - 2\varphi' - \frac{\partial\varphi''}{\partial x}\right) - (S' - \varphi'')^2 = 0,$$

$$T'\left(N' - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - (R' - \varphi')^2 = 0,$$

$$(S' - \varphi'')(R' - \varphi') - T'\left(P' - \varphi - \frac{\partial\varphi'}{\partial x}\right) = 0;$$

so daß also die Bestimmung von φ, φ', φ'' drey willkührliche Constanten herbeiführt, welche man sich so genommen denken kann, daß

$$\left\{\varphi\delta y^2 + 2\varphi'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \varphi''\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2\right\}_b$$

$$-\left\{\varphi\delta y^2 + 2\varphi'\delta y\frac{\partial\delta y}{\partial x} + \varphi''\left(\frac{\partial\delta y}{\partial x}\right)^2\right\}_a$$

mit dem bestimmten Integrale in $\delta^2 \int v\partial x$ einerley Zeichen hat, so daß also auch $\delta^2 \int v\partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv oder negativ ist, d. i. ein Minimum oder Maximum statt findet, wenn $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right)$ zwischen diesen Gränzen immer positiv oder immer negativ ist. Wäre $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right)$ für

Digitized by Google

alle Werthe von x zwischen den gegebenen Gränzen $= 0$; so kann, weil $A = T' = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_2^2}\right) = 0$ ist, $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen nicht immer einerlei Zeichen behalten, wenn nicht auch $R' = S' = 0$ ist, für jeden Werth von x zwischen diesen Gränzen (39.). Dann wird $\delta^2 \int v \partial x =$

$$N' \delta y^2 + 2P' \delta y \frac{\partial \delta y}{\partial x} + Q' \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2,$$

und es tritt nun der in (41.) betrachtete Fall ein.

Wie man auf diese Art weiter gehen könnte, erhellet leicht. Indeß wird das Obige für die folgenden Anwendungen hinreichend seyn, und auch genugsam den Weg andeuten, welcher bey dieser Untersuchung einzuschlagen ist, wenn in v, außer y und seinen Differentialquotienten auch noch die von x abhängige Größe z nebst ihren Differentialquotienten vorkommt.

43. Die wichtigsten und lehrreichsten Anwendungen der hier entwickelten Sätze bietet in der reinen Mathematik die höhere Geometrie dar. Gewöhnlich sind aber bey den hierher gehörenden Aufgaben noch besondere Bedingungen in Bezug auf die Gränzen zu berücksichtigen, wodurch noch einige Erläuterungen nöthig gemacht werden, indem wir größerer Deutlichkeit wegen immer die geometrische Beziehung solcher Aufgaben ins Auge fassen.

44. Sey zunächst eine durch zwey gegebene Punkte gehende Curve zu finden, für welche ein gewisses unbestimmtes Integral $\int v \partial x$ ein Maximum oder Minimum wird, und seyen $x = a$, $x = b$ die Abscissen der beiden gegebenen Punkte; so ist $\int v \partial x$ zwischen diesen beiden Gränzen im Allgemeinen zu einem Maximo oder Minimo zu machen. Da nun aber an den Gränzen auch $y = a'$, $y = b'$, und, bey Punkten im Raume, auch $z = a''$, $z = b''$ gegeben ist; so soll man nicht unter allen Relationen zwischen x, y, oder x, y, z, diejenige finden, für welche $\int v \partial x$, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, ein Maximum oder Minimum wird, sondern nur unter allen den Relationen zwischen x, y, oder x, y, z, für welche

Digitized by Google

zugleich, wenn $x = a$, $x = b$ gesetzt wird, $y = a'$, $y = b'$, oder $y = a'$, $y = b'$; $z = a''$, $z = b''$ ist, so daß also auch δy, δz in diesem Falle nicht ganz willkührlich, sondern, da y, z an den Gränzen nicht variiren dürfen, der Bedingung unterworfen sind, daß $\delta y_a = \delta y_b = 0$, $\delta z_a = \delta z_b = 0$, und daher bloß

$$\delta y = (x-a)^m (x-b)^n . fx, \quad \delta z = (x-a)^p (x-b)^q . f'x$$

gesetzt werden kann. Zugleich läßt sich annehmen, daß die, übrigens völlig willkührlichen, Functionen fx und $f'x$ die Größen $x - a$ und $x - b$ nicht mehr als Factoren enthalten, und daß die Exponenten m, n; p, q groß genug sind, daß auch alle Differentialquotienten von δy und δz bis zu irgend einer gewissen Gränze für $x = a$, $x = b$ ebenfalls verschwinden. In diesem Falle sind also in (35.) und (38 am Ende.) die von dem Integralzeichen befreiten Theile der Variation zwischen den gegebenen Gränzen an sich $= 0$, so daß also hier die dortige Entwickelung in Bezug auf die Gränzgleichungen natürlich keine Anwendung findet, aber für

$$\varphi x = N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \ldots,$$

$$\varphi' x = N' - \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q'}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R'}{\partial x^3} + \ldots,$$

doch immer als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum sich ergiebt:

$$0 = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \varphi x \, fx \, \partial x$$

und

$$0 = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \varphi x \, fx \, \partial x + \int_a^b (x-a)^p (x-b)^q \varphi' x \, f'x \, \partial x,$$

für jedes willkührliche, nicht mehr $x - a$, $x - b$ als Factor enthaltende, fx und $f'x$. Wäre nun, in Bezug auf das erste Integral, φx nicht identisch $= 0$; so könnte man $fx = \frac{1}{\varphi x}$ setzen, und es wäre also

$$0 = \int_a^b (x-a)^m (x-b)^n \partial x,$$

welches ungereimt ist, wie auch auf folgende Art gezeigt werden kann. Durch theilweise Integration erhält man nämlich leicht

Digitized by Google

$$\int(x-a)^m(x-b)^n\partial x =$$
$$(x-a)^m\int(x-b)^n\partial x$$
$$-\,m(x-a)^{m-1}\int\partial x\int(x-b)^n\partial x$$
$$+\,m(m-1)(x-a)^{m-2}\int\partial x\int\partial x\int(x-b)^n\partial x$$
$$-\,m(m-1)(m-2)(x-a)^{m-3}\int\partial x\int\partial x\int\partial x\int(x-b)^n\partial x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm\,m(m-1)(m-2)\ldots 2.1\int\partial x\int\partial x\ldots\int\partial x\int(x-b)^n\partial x$$
$$=\frac{(x-a)^m(x-b)^{n+1}}{n+1}-\frac{m(x-a)^{m-1}(x-b)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
$$+\frac{m(m-1)(x-a)^{m-2}(x-b)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}-\ldots.$$
$$\ldots\pm\frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1.(x-b)^{n+m+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m+1)}$$

Also $\int_a^b(x-a)^m(x-b)^n\partial x$
$$=\mp\frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2.1.(a-b)^{n+m+1}}{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m+1)}$$

und folglich nicht $=0$. Also muß φx identisch $=0$ seyn, und die gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum ist also dieselbe, wie in (35.). Ganz auf ähnliche Art überzeugt man sich, daß auch im zweiten Falle, wo v noch z enthält, die gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum mit der in (38.) bewiesenen übereinstimmt. Da die oben entwickelten Gränzgleichungen hier nicht statt finden; so müssen die Constanten allein aus den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden, so daß also dieselbe nur dann völlig bestimmt seyn wird, wenn die Bedingungen zur Bestimmung der einzuführenden willkührlichen Constanten hinreichen.

45. Soll ferner die gesuchte Curve nur durch einen gegebenen Punkt gehen; so wird man sich auf ähnliche Art, mit Zuziehung von (35.) und (38.), überzeugen, daß auch in diesem Falle dieselben allgemeinen Bedingungen des Maximum und Minimum gelten, wie früher, und daß zugleich die eine Reihe der Gränzgleichungen statt findet, nämlich die, welche der Gränze entspricht, für welche keine bestimmten Werthe von y und z gegeben sind.

Daß alles dies auch statt findet, wenn zwischen x, y, z eine Gleichung gegeben ist (38.), erhellet eben so leicht.

Digitized by Google

46. Was die Kriterien des Maximum und Minimum in (40. 41. 42.) betrifft; so hat man für die beiden hier betrachteten Fälle nur zu setzen, in (40.): $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = o$ für beide Fälle; in (41.):

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \delta^2 y_b = o$$

für den ersten, und

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ P_b = o$$

für den zweiten Fall; in (42.) dagegen

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\delta^2 y_b = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_b = o$$

für den ersten, und

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = o,\ \delta^2 y_a = o,\ \left(\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\left(P - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)_b = o,\ Q_b = o$$

für den zweiten Fall, ganz den Bedingungen der Aufgaben (44. 45.) gemäß. Dann werden alle Betrachtungen aa. aa. OO., und folglich dieselben Kriterien des Maximum und Minimum, mit Rücksicht auf die besondern Bedingungen der Aufgabe, auch hier gelten.

47. Sey zunächst zwischen irgend zwey durch ihre Coordinaten a, a′, a″; b, b′, b″ gegebenen Punkten im Raume die kürzeste Linie zu finden; so ist, wenn wir die Länge der gesuchten Linie $= s$ setzen,

$$s = \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2} = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

$$v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

(Krumme Linie von gedoppelter Krümmung. 9.), und vorstehendes Integral soll also ein Minimum werden. Da y in v nicht enthalten; so ist

$$N = Q = R = \ldots = o,\ N' = Q' = R' = \ldots = o;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = o,\ \frac{\partial P'}{\partial x} = o;\ P = A,\ P' = A';$$

Digitized by Google

wo A, A′ zwey willkührliche Constanten bezeichnen. Also

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = A,$$

$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = A';$$

$$\frac{A}{p} = \frac{A'}{p'}, \quad p'A = pA';$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{A'}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A'}{A}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Setzt man nun den Werth von $\frac{\partial z}{\partial x} = p'$ in den obigen Ausdruck für A, den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ in den Ausdruck für A′, und entwickelt im ersten Falle $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, im andern $\frac{\partial z}{\partial x} = p'$; so erhält man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{A}{\sqrt{1-A^2-A'^2}} = B,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{A'}{\sqrt{1-A^2-A'^2}} = B';$$

$$\partial y = B\partial x, \quad \partial z = B'\partial x;$$

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C',$$

wo C, C′ zwey neue willkührliche Constanten sind. Dies sind die Gleichungen einer geraden Linie im Raume. Die Constanten B, B′, C, C′ müssen aus der Bedingung, daß die Curve durch zwey gegebene Punkte gehen soll, bestimmt werden. Aus dieser Bedingung erhält man:

$$a' = Ba + C, \quad b' = Bb + C;$$
$$a'' = B'a + C', \quad b'' = B'b + C';$$

vier Gleichungen mit vier unbekannten Größen. Also

$$y = \frac{a'-b'}{a-b}x + \frac{ab'-a'b}{a-b},$$

$$z = \frac{a''-b''}{a-b}x + \frac{ab''-a''b}{a-b}.$$

48. Sollte die gesuchte Linie nur durch einen gegebenen Punkt, dessen Coordinaten a, a′, a″ sind, gehen; so würde, da das Integral zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen werden soll, der Sinn der Aufgabe kein anderer seyn, als unter allen durch den gegebenen Punkt gehenden, und zwischen zwey auf der Axe der x

Digitized by Google

senkrechten, den Abscissen $x = a$ und $x = b$ entsprechenden, Ebenen liegenden Linien die kürzeste zu finden. Wie vorher erhält man:

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C',$$

und zur Bestimmung der Constanten (45. 38.):

$$a' = Ba + C, \; a'' = B'a + C, \; P_b = o, \; P'_b = o.$$

Aber

$$P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{B}{\sqrt{1+B^2+B'^2}},$$

$$P' = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}} = \frac{B'}{\sqrt{1+B^2+B'^2}}.$$

Folglich müssen p und p' für $x = b$ verschwinden. Da aber p und p' constant, $= B$ und $= B'$ sind, also immer, und demnach auch für $x = b$, einerley Werth behalten, so erhellet, daß $B = B' = o$, und folglich $C = a'$, $C' = a''$; also

$$y = a', \; z = a''$$

ist. Aus diesen Gleichungen erhellet, daß die gesuchte Curve eine durch den gegebenen Punkt gehende, mit der Axe der x parallele, gerade Linie ist, ganz der Natur der Sache gemäß.

49. Wäre gar kein Punkt gegeben, und die Frage also überhaupt nach der Linie, welche unter allen zwischen den beiden auf der Axe der x senkrechten, der Abscissen $x = a$, $x = b$ entsprechenden, Ebenen liegenden Linien die kürzeste ist; so wäre, da hier die allgemeine Aufgabe in (38.) ihre Anwendung findet,

$$P_a = o, \; P'_a = o, \; P_b = o, \; P'_b = o;$$

woraus man wie vorher schließt, daß $B = B' = o$, und folglich

$$y = C, \; z = C'$$

ist. Also ist die gesuchte Linie wieder eine der Axe der x parallele gerade Linie. C und C' bleiben unbestimmt, indem alle der Axe der x parallele gerade Linien zwischen den genannten Ebenen einander gleich sind.

50. Zur Unterscheidung des Maximum und Minimum hat man nach (22.)

Digitized by Google

$$\delta^2 \int v \partial x =$$

$$\int \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) \frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \partial x$$

$$+ \int \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right) \frac{\partial \delta^2 z}{\partial x} \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p'^2}\right) \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x}\right)^2 \partial x$$

$$= P \delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x} \delta^2 y \, \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) (\delta p)^2 \partial x$$

$$+ P' \delta^2 z - \int \frac{\partial P'}{\partial x} \delta^2 z \, \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p'^2}\right) (\delta p')^2 \partial x .$$

Nun ist im ersten der drey vorher betrachteten Fälle:

$$\delta^2 y_a = 0, \ \delta^2 z_a = 0, \ \delta^2 y_b = 0, \ \delta^2 z_b = 0 ;$$

im zweiten dagegen:

$$\delta^2 y_a = 0, \ \delta^2 z_a = 0, \ P_b = 0, \ P'_b = 0 ;$$

und im dritten

$$P_a = 0, \ P'_a = 0, \ P_b = 0, \ P'_b = 0 ;$$

in allen dreyen aber, wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, identisch

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0 , \ \frac{\partial P'}{\partial x} = 0 ;$$

so daß also, wenn $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$ genommen wird, bloß

$$\delta^2 \int v \partial x = \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) (\delta p)^2 \partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p'^2}\right) (\delta p')^2 \partial x$$

zu setzen ist. Die Summe der Größen unter dem Integralzeichen erhält man leicht

$$= \frac{1 + p'^2}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)^3}} (\delta p)^2 + \frac{1 + p^2}{\sqrt{(1 + p^2 + p'^2)^3}} (\delta p'^2),$$

welches offenbar immer positiv ist, da die Quadratwurzel natürlich positiv zu nehmen ist, indem hier von keiner Entgegensetzung die Rede seyn kann, und auch in

$$s = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

die Quadratwurzel als positiv angesehen worden. Folglich ist auch $\delta^2 \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen positiv, so daß also in der That ein Minimum statt findet.

51. Das erste Problem aus der Klasse der absoluten Maxima und Minima ward von Joh. Bernoulli in

Google

den Act. Erud. 1696. den Geometern seiner Zeit vorgelegt. Es verlangte zwischen zwey gegebenen Punkten A, B die Curve zu finden, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt. Gehört das Problem auch eigentlich der Mechanik an; so darf es doch hier nicht fehlen, indem sich demselben auch leicht eine rein theoretische Ansicht abgewinnen läßt, und es ein gutes Beispiel darbietet, für die Auffindung der Bedingungen, unter welchen ein gegebenes Integral zwischen gegebenen Gränzen ein Minimum wird.

Die Coordinaten der gegebenen Punkte A, B im Raume seyen wieder a, a′, a″; b, b′, b″, und t die Zeit des Falls von A bis B, der Bogen AB = s; so ist für AP = x — a (Fig. 96.) nach Principien der Mechanik:

$$\partial t = \frac{\partial s}{2\sqrt{g(x-a)}},$$

wo g, wie gewöhnlich, den Fallraum (nämlich beym freien Falle) in der ersten Zeiteinheit bezeichnet. Aber, wie vorher,

$$\partial s = \partial x\sqrt{1+p^2+p'^2};$$

so daß also

$$t = \frac{\partial x\sqrt{1+p^2+p'^2}}{2\sqrt{g(x-a)}}$$

zwischen den Gränzen x = a, x = b ein Minimum werden soll. Da in diesem Falle

$$v = \frac{\sqrt{1+p^2+p'^2}}{2\sqrt{g(x-a)}}$$

bloß p und p′ enthält; so ist

$$N = Q = R = \ldots = 0,\ N' = Q' = R' = \ldots = 0;$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial P'}{\partial x} = 0;\ P = \alpha,\ P' = \alpha';$$

wo α, α′ zwey willkührliche Constanten. Also

$$P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{2\sqrt{g(x-a)(1+p^2+p'^2)}} = \alpha,$$

$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{2\sqrt{g(x-a)(1+p^2+p'^2)}} = \alpha';$$

woraus unmittelbar:

Digitized by Google

$$\alpha p' - \alpha' p = 0, \quad \alpha \partial z - \alpha' \partial y = 0,$$

und folglich, wenn man integrirt:

$$\alpha z - \alpha' y = \alpha'',$$

wo α'' eine neue willkührliche Constante. Da nun die Gleichung der Ebene der yz offenbar

$$x + 0.y + 0.z = 0$$

ist; so ist (Linie und Ebene. 48.) vorhergehende Gleichung

$$\alpha z - \alpha' y = \alpha''$$

die Gleichung einer auf der Ebene der yz senkrechten Ebene, in welcher also die gesuchte Curve liegen muß; also, da nach mechanischen Principien AP als vertikal angenommen werden muß, eine durch A und B gehende Vertikalebene. Da demnach die gesuchte Curve eine Curve von einfacher Krümmung ist; so haben wir bloß zu setzen:

$$\frac{p}{2\sqrt{g(x-a)(1+p^2)}} = \alpha,$$

oder, wenn wir A als Anfang der Abscissen annehmen, also $a = 0$, und, der Kürze wegen, $\frac{1}{4\alpha^2 g} = \gamma$ setzen:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{\gamma x - x^2}},$$

woraus durch Zerlegung leicht:

$$\partial y = \frac{\gamma \partial x}{2\sqrt{\gamma x - x^2}} - \frac{(\gamma - 2x)\partial x}{2\sqrt{\gamma x - x^2}},$$

und, für $\frac{2x}{\gamma} = u$, $\gamma x - x^2 = w$:

$$\partial y = \frac{\gamma \partial u}{2\sqrt{2u - u^2}} - \tfrac{1}{2} w^{-\frac{1}{2}} \partial w,$$

$$y = \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Arc\,sin\,vers} u - \sqrt{w} + C$$

$$= \tfrac{1}{2}\gamma \operatorname{Arc\,sin\,vers} \frac{2x}{\gamma} - \sqrt{\gamma x - x^2} + C.$$

Da nun A als Anfang der Abscissen angenommen; so ist $y = 0$ für $x = 0$. Also $C = 0$, und, für $\gamma = 2r$:

$$y = r \operatorname{Arc\,sin\,vers} \frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2},$$

Setzt man im Art. Cycloide. I. r für a, und vertauscht x, y gegen einander; so ist

$$x = r(1 - \cos\varphi), \quad y = r(\varphi - \sin\varphi);$$

und folglich, wenn man φ eliminirt:

Digitized by Google

$$x = r \sin\text{vers}\,\varphi,\quad \varphi = \text{Arc}\sin\text{vers}\,\frac{x}{r};$$

$$\cos\varphi = \frac{r-x}{r},\quad \sin\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{2rx - x^2},$$

woraus, dieses in die Formel $y = r(\varphi - \sin\varphi)$ für φ und $\sin\varphi$ gesetzt, die obige Gleichung hervorgeht, so daß also unsere Curve eine Cycloide ist, deren Anfang A, und Basis eine durch A auf AP senkrechte Linie ist. Den Radius r des erzeugenden Kreises findet man aus der Bedingung, daß $y = b'$ für $x = a'$, mittelst der gefundenen Gleichung.

Wäre nur der Punkt A gegeben; so würde der Sinn der Frage kein anderer seyn, als die Curve zu finden, auf welcher ein schwerer Punkt in der kürzesten Zeit durch den Fall von A bis zu der auf AP durch P senkrechten Linie PB, welche der Abscisse $x = b$, als zweiten Gränze des Integrals entspricht, gelangt. Für diesen Fall erhält man wieder die obige Gleichung, nur muß r aus der Gleichung

$$P_b = o$$

bestimmt werden, woraus sich leicht

$$k_o = \frac{b : \sqrt{\gamma b - b^2}}{2\sqrt{gb\left(1 + \frac{b^2}{\gamma b - b^2}\right)}} = \frac{b}{2\sqrt{g\gamma b^2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{g\gamma}} = \frac{1}{4g\gamma} = \frac{1}{8gr} = \frac{1}{r},$$

also $r = \frac{1}{o} = \infty$ ergiebt. Für diesen Werth geben aber die Gleichungen

$$x = r(1 - \cos\varphi),\ y = r(\varphi - \sin\varphi);$$
$$\cos\varphi = 1,\ \sin\varphi = \varphi,\ \text{d. i. } \varphi = o;$$

so daß also dieser Winkel immer $= o$, woraus (Vergl. Cycloide. I.) sogleich folgt, daß in diesem Falle die Cycloide mit der geraden Linie AP zusammenfällt, auf welcher also, da sie vertikal ist, der schwere Punkt freyfallend in der kürzesten Zeit von A bis zur Linie PB gelangt, ganz der Natur der Sache gemäß.

Ein ganz ähnliches Resultat würde man erhalten, wenn man keinen Punkt als gegeben annähme (Vergl. 49.).

Digitized by Google

52. Zur Unterscheidung des Maximum und Minimum hat man (21.), da v kein y enthält:

$$\delta^2 v = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\frac{\partial \delta^2 y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2,$$

und durch theilweise Integration des ersten Theils, für $\frac{\partial v}{\partial p} = P$:

$$\delta^2 \int v \partial x =$$

$$P\delta^2 y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta^2 y\,\partial x + \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)\left(\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)^2 \partial x,$$

woraus man ganz wie in (50.) schließt, daß, zwischen den Gränzen $x = a$, $x = b$, bloß gesetzt zu werden braucht:

$$\delta^2 \int v \partial x = \int \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)(\delta p)^2 \partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{gx(1+p^2)^3}}(\delta p)^2,$$

das Integral zwischen $x = a$, $x = b$ oder $x = o$, $x = b$ genommen, da oben $a = o$ gesetzt worden. Da nun

$$\frac{1}{\sqrt{gx(1+p^2)^3}}(\delta p)^2$$

unabhängig von δp immer positiv ist, indem, wie vorher immer, die Quadratwurzel natürlich als positiv zu betrachten ist; so ist auch vorhergehendes Integral, als die Summe aller Werthe dieses Differentialquotienten zwischen obigen Gränzen, immer positiv, und folglich die Bedingung des Minimum erfüllt.

Wegen der hier entwickelten Eigenschaft der Cycloide heißt sie die **Linie des schnellsten Falls**, oder die **Brachystochrone**.

53. Die Curve zu finden, welche, zwey gegebene Punkte mit einander verbindend, bey der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt. Sey s die erzeugte Fläche; so ist (Thl. I. S. 514.)

$$s = 2\pi \int y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2\pi \int y \partial x \sqrt{1+p^2},$$

und dieses Integral soll also, wenn a, a'; b, b' die Coordinaten der gegebenen Punkte sind, zwischen $x = a$, $x = b$ ein Minimum werden. Es ist hier

Digitized by Google

$$v = y\sqrt{1+p^2},\ N = \sqrt{1+p^2},\ P = \frac{py}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$Q = R = S = \ldots = o.$$

Da x in v nicht unmittelbar enthalten; so ist (37. δ.) die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum:

$$v = pP + C = \frac{p^2y}{\sqrt{1+p^2}} + C,$$

und folglich, wenn für v sein obiger Werth gesetzt wird,

$$p^2 = \frac{y^2 - C^2}{C^2} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,\ \frac{\partial x}{C} = \frac{\partial y}{\sqrt{y^2 - C^2}};$$

$$\frac{x}{C} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{(y + \sqrt{y^2 - C^2})\,\partial y}{(y + \sqrt{y^2 - C^2})\sqrt{y^2 - C^2}}$$

$$= \int \frac{\partial y + \frac{1}{2}(y^2 - C^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y\,\partial y}{y + \sqrt{y^2 - C^2}} = \int \frac{\partial (y + \sqrt{y^2 - C^2})}{y + \sqrt{y^2 - C^2}}.$$

Folglich (Integralformel. 3.):

$$\frac{x}{C} = \log n (y + \sqrt{y^2 - C^2}) + C'.$$

Die Constanten C, C′ ergeben sich aus der Bedingung, daß die gesuchte Curve durch die beiden gegebenen Punkte gehen soll. Die möglichst kleinste Ordinate ist = C, weil für $y < C$ die Radikalgröße imaginär wird. Um die Natur unserer Curve näher zu bestimmen, nehme man diese Ordinate als Axe der y an, so daß also das Coordinatensystem jetzt ein solches ist, daß $y = C$ für $x = o$. Dies giebt $o = \log n\, C + C'$, $C' = -\log n\, C$,

$$\frac{x}{C} = \log n \frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C},$$

$$-\frac{x}{C} = -\log n \frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C} = \log n \frac{C}{y + \sqrt{y^2 - C^2}},$$

woraus, wenn man Zähler und Nenner des letztern Bruchs mit $y - \sqrt{y^2 - C^2}$ multiplicirt,

$$-\frac{x}{C} = \log n \frac{y - \sqrt{y^2 - C^2}}{C}.$$

Bezeichnet also, wie gewöhnlich, e die Basis der natürlichen Logarithmen; so ist

$$e^{\frac{x}{C}} = \frac{y + \sqrt{y^2 - C^2}}{C},\ e^{-\frac{x}{C}} = \frac{y - \sqrt{y^2 - C^2}}{C};$$

Digitized by Google

$$y = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}}\right\},$$

oder, durch Verwechslung der Abscissen und Ordinaten,

$$x = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{y}{C}} + e^{-\frac{y}{C}}\right\},$$

und, wenn man, die Ordinaten ungeändert lassend, die Abscissen von einem Anfangspuncte an rechnet, dessen Abscisse $= C$ ist, wo $C + x$ statt x in obiger Gleichung gesetzt werden muß:

$$x = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{y}{C}} + e^{-\frac{y}{C}} - 2\right\};$$

so daß also die gesuchte Curve die gemeine Kettenlinie (S. dsn. Art. 5.) ist, welche folglich die merkwürdige Eigenschaft hat, daß sie unter allen durch zwey gegebene Punkte gehenden Curven bei der Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt. Denn daß in diesem Falle wirklich ein Minimum statt findet, erhellet sogleich, wenn man (41.) $\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial p^2} = \frac{\partial P}{\partial p}$ entwickelt, wodurch man

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right) = \frac{y}{r(1+p^2)^3}$$

erhält. Aus der Gleichung

$$y = \tfrac{1}{2}C\left\{e^{\frac{x}{C}} + e^{-\frac{x}{C}}\right\}$$

erhellet aber, daß y entweder immer positiv oder immer negativ ist, d. h. daß die Curve ganz auf einer Seite der Abscissenlinie liegt, und demnach hier an keine Entgegensetzung zu denken ist, y also immer als positiv angenommen werden kann. Daher ist $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y_1^2}\right)$ positiv, und es findet folglich ein Minimum statt.

54. Die Curve zu finden, bey welcher der von dem Bogen AB (Fig. 97.), den beiden Krümmungshalbmessern AC, BD der Endpunkte desselben, welche als gegeben angesehen werden, und dem Bogen CD der Evolute eingeschlossene Raum ABCD ein Minimum ist.

Der in Rede stehende Raum sey $= S$, der Bogen $AB = s$, und der Krümmungshalbmesser, ohne Rücksicht

Digitized by Google

auf sein Zeichen, $= r$: so erhellet leicht, daß $\partial S = \frac{1}{2} r \partial s$. Aber

$$\partial s = \partial x \sqrt{1+p^2}, \; r = \pm \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q};$$

folglich

$$S = \pm \tfrac{1}{2} \int \frac{(1+p^2)^2 \partial x}{q}, \; v = \pm \frac{(1+p^2)^2}{q};$$

$$N = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \; P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \pm \frac{4p(1+p^2)}{q},$$

$$Q = \left(\frac{\partial v}{\partial q}\right) = \mp \frac{(1+p^2)^2}{q^2}, \; R = S = T = \ldots = 0.$$

Folglich (37. ε.)

$$v = qQ + Cp + C', \; \pm \frac{2(1+p^2)^2}{q} = Cp + C';$$

$$\pm \frac{2(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q} \cdot \sqrt{1+p^2} = Cp + C';$$

$$2r\sqrt{1+p^2} = Cp + C', \; r = \frac{Cp + C'}{2\sqrt{1+p^2}};$$

$$r\partial r = \frac{(C - C'p)\partial p}{2q} = \tfrac{1}{2}(C\partial x - C'\partial y);$$

$$\tfrac{1}{2}r^2 = \tfrac{1}{2}(Cx - C'y + C''), \; r^2 = cx + c'y + c'',$$

für $C = c$, $-C' = c'$, $C'' = c''$. Um die Natur der durch die gefundene Gleichung dargestellten Curve näher zu bestimmen, nehme man den Punkt, in welchem der Krümmungshalbmesser $= 0$ ist, als Anfang der Coordinaten an, und bezeichne den Winkel, welchen die willkührlich angenommene neue Abscissenaxe mit der primitiven Abscissenaxe einschließt, durch λ, die Coordinaten des neuen Anfangspunktes in Bezug auf das primitive System durch α, β, und die Coordinaten in Bezug auf das neue System überhaupt durch x', y'; so ist, (Vergl. d. Art. Coordinate).

$$x = \alpha + x'\cos\lambda - y'\sin\lambda, \; y = \beta + x'\sin\lambda + y'\cos\lambda;$$
$$r^2 = c\alpha + c'\beta + c'' + \alpha(x'\cos\lambda - y'\sin\lambda) + c'(x'\sin\lambda + y'\cos\lambda)$$
$$= c(x'\cos\lambda - y'\sin\lambda) + c'(x'\sin\lambda + y'\cos\lambda),$$

da, wegen der Bedingung, welcher das neue System in Bezug auf seinen Anfangspunkt unterworfen worden, $c\alpha + c'\beta + c'' = 0$ ist. Weil nun λ willkührlich ist; so denke man sich dasselbe so genommen, daß die Gleichung

Digitized by Google

$$c\cos\lambda + c'\sin\lambda = o$$

erfüllt wird; so ist

$$\cos\lambda = \frac{c'}{\sqrt{c^2+c'^2}},\ \sin\lambda = -\frac{o}{\sqrt{c^2+c'^2}};$$

welches, in obige Gleichung gesetzt, giebt:

$$r^2 = \frac{c^2+c'^2}{\sqrt{c^2+c'^2}}.y' = y'\sqrt{c^2+c'^2} = 8ay',$$

für $8a = \sqrt{c^2+c'^2}$. Der Gleichung $r^2 = 8ay'$ muß also die gesuchte Curve genügen. Dies führt sogleich auf die gemeine Cycloide, indem (Thl. I. S. 604. 601.) bey derselben $r = 4a\sin\frac{1}{2}\varphi$, $r^2 = 16a^2\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = 8a^2(1-\cos\varphi) = 8a.a(1-\cos\varphi) = 8ay'$ ist. Die Axe der x' ist dann die Basis der Cycloide, y' also immer positiv zu setzen, und, weil die Cycloide gegen die Basis, d. i. hier die Axe der x', concav ist, $\frac{\partial^2 y'^2}{\partial x'^2} = q'$ immer negativ (Concav und Convex. 10.). Daher ist, damit der Krümmungshalbmesser, wie oben angenommen worden, positiv sey:

$$r = -\frac{(1+p'^2)^{\frac{3}{2}}}{q'},\ v = -\frac{(1+p'^2)}{q'},$$

zu setzen. Also

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial q'^2}\right) = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2_2}\right) = -\frac{2(1+p'^2)^2}{q'^3},$$

und folglich, da q'^3 nach dem Obigen immer negativ ist, $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y'^2_2}\right)$ immer positiv, so daß also in der That ein Minimum statt findet.

Aus den beiden Gleichungen

$$r = \frac{Cp+C'}{2\sqrt{1+p^2}},\ r^2 = Cx - C'y + C''$$

ergiebt sich

$$\frac{(Cp+C')^2}{1+p^2} = 4(Cx - C'y + C'')^2,$$

woraus erhellet, daß, wegen $p = \frac{\partial y}{\partial x}$, bey der Integration noch eine vierte willkührliche Constante eingeführt wird, so daß also, wenn die gesuchte Curve völlig bestimmt seyn soll, überhaupt vier Bedingungen gegeben seyn müssen,

Digitized by Google

denen man zu genügen hat. Es werden also, nebst den zwey schon gegebenen Punkten, noch zwey andere Punkte gegeben seyn, durch welche die gesuchte Curve hindurch gehen soll, und die, diesen Bedingungen gemäß bestimmte, Cycloide, wird unter allen durch die vier gegebenen Punkte hindurch gehenden Curven der obigen Bedinguug des Minimum genügen.

55. Die Curve zu finden, bey welcher

$$\int \frac{y\partial y^3}{\partial x^2 + \partial y^2} = \int \frac{p^3 y\,\partial x}{1+p^2}$$

ein Maximum oder Minimum wird. Es ist hier

$$v = \frac{p^3 y}{1+p^2},\quad N = \frac{p^3}{1+p^2},\quad P = \frac{p^2(3+p^2)y}{(1+p^2)^2}.$$

Folglich (37. δ.):

$$v = pP + C,\ \frac{p^3 y}{1+p^2} = \frac{p^3(3+p^2)y}{(1+p^2)^2} + C;$$

$$y = -\frac{C(1+p^2)^2}{2p^3} = \frac{c(1+p^2)^2}{2p^3}$$

für $-C = c$. Aber $\partial y = p\partial x$,

$$\partial x = \frac{\partial y}{p},\ x = \int \frac{\partial y}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{y\partial p}{p^2};$$

und folglich, wenn man hierin den gefundenen Werth von y substituirt:

$$x = \frac{c(1+p^2)^2}{2p^4} + c\int \frac{(1+p^2)^2\,\partial p}{2p^5}$$

$$= \frac{c}{2}\left\{\frac{(1+p^2)^2}{p^4} - \frac{1}{4p^4} - \frac{1}{p^2} + \log p\right\} + c'$$

$$= \frac{c}{2}\left\{\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + \log p\right\} + c'.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung

$$y = \frac{c(1+p^2)^2}{2p^3};$$

so läßt sich durch Elimination von p eine Gleichung bloß zwischen x und y mit zwey willkührlichen Constanten, die aus den besondern Bedingungen der Aufgabe zu bestimmen sind, finden.

Diese Aufgabe stimmt mit der hydrodynamischen Aufgabe, den Körper des kleinsten Widerstandes, d. h. die Curve zu finden, welche, bey der Umdrehung um die Axe

Digitized by Google

der x, eine Fläche erzeugt, die nach der Richtung der Axe der x in einer Flüssigkeit bewegt, von der Flüssigkeit den kleinsten Widerstand erleidet, überein.

56. Zwischen zwey gegebenen Punkten auf der Oberfläche einer Kugel die kürzeste Linie zu finden.

Die Gleichung der Kugel ist, wenn r den Radius bezeichnet:

$$u = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

wo der Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Also (38.):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2y, \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z, y\partial y + z\partial z = 0,$$

und, da

$$\int v\partial x = \int \partial x \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$$

zu einem Minimo zu machen:

$$N = 0, P = \frac{\partial y}{\partial s}, P' = \frac{\partial z}{\partial s};$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)}{\partial x}\delta y + \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)}{\partial x}\delta z = 0.$$

Eliminirt man nun $\frac{\delta z}{\delta y}$ aus den beiden gefundenenen Gleichungen; so erhält man:

$$y\partial\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right) - z\partial\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right) = 0,$$

und, wenn man integrirt:

$$y\frac{\partial z}{\partial s} - \int\frac{\partial y\,\partial z}{\partial s} - z\frac{\partial y}{\partial s} + \int\frac{\partial y\,\partial z}{\partial s} = c.$$

Also, zugleich durch bloße Vertauschung der Buchstaben:

$$y\partial z - z\partial y = c\partial s,\ z\partial x - x\partial z = c'\partial s,\ x\partial y - y\partial x = c''\partial s.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen durch x, die zweite durch y, die dritte durch z, und addirt die erhaltenen Gleichungen; so ergiebt sich:

$$cx + c'y + c''z = 0,$$

die Gleichung einer Ebene, in welcher also die gesuchte Curve liegen muß. Für $x = y = 0$ ist auch $z = 0$, so daß also diese Ebene durch den Anfang der Coordinaten, d. i. durch den Mittelpunkt der Kugel geht, und folglich die

Digitized by Google

suchte Curve der Bogen eines durch die beiden gegebenen Punkte gehenden größten Kreises ist.

57. Zwischen zwey Punkten auf der Oberfläche eines geraden Cylinders die kürzeste Linie zu finden. Die Axe des Cylinders nehme man als Axe der y an; so ist, wenn r den Radius des Cylinders bezeichnet:

$$u = x^2 + z^2 - r^2 = o$$

die Gleichung der Cylinderfläche. Also

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 2z,\ z\partial z = o,\ \partial z = o.$$

Aber in diesem Falle wieder

$$v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

so daß v kein y enthält. Folglich (38.)

$$\frac{\partial P}{\partial x}\partial y + \frac{\partial P'}{\partial x}\partial z = o,\ \frac{\partial P}{\partial x}\partial y = o,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = o,\ P = C.$$

Nun ist

$$P = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + \frac{r^2}{r^2 - x^2}}},$$

da $p' = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ ist. Also, wenn p aus der Gleichung $P = C$ entwickelt wird:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{r\partial x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{Cr}{\sqrt{1 - C^2}} \int \frac{\partial \cdot \frac{x}{r}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}},$$

$$y = \frac{Cr}{\sqrt{1 - C^2}} \operatorname{Arc\,sin} \frac{x}{r} + C',$$

(Integralformel. 49.). Die willkührlichen Constanten C, C' sind aus der Bedingung zu bestimmen, daß die gesuchte Curve durch zwey gegebene Punkte gehen soll.

Wird die Cylinderfläche in eine Ebene abgewickelt; so ist klar, daß unsre Curve auch jetzt noch unter allen Curven in der Ebene zwischen den gegebenen Punkten die kür-

Digitized by Google

zeste, und folglich eine gerade, die Curve auf der Cylinderfläche selbst also eine Schraubenlinie seyn muß.

Daß in den beiden vorher betrachteten Fällen wirklich ein Minimum statt findet, zeigt man wie in (50.). Ausführliche Untersuchungen über die kürzeste Linie auf dem Sphäorid s. im Art. Trigonometrie (152. ff.).

58. Es ist nun noch die Betrachtung eines sehr wichtigen und merkwürdigen Falls der absoluten Maxima und Minima zurück, dessen Natur und Behandlungsweise aus folgenden Beispielen erhellen wird.

In einer Ebene seyen zwey Curven durch die Gleichungen

$$y' = fx,\ y'' = f''x$$

gegeben; man soll unter allen sich an diesen beiden Curven endigenden Linien in der Ebene die kürzeste finden.

Dieser Fall unterscheidet sich von den bisher behandelten Aufgaben vorzüglich darin, daß bey jenen die Gränzen a, b, zwischen denen das Integral zu nehmen war, als bestimmt und gegeben angenommen wurden, in vorliegendem Falle dagegen selbst als fraglich anzusehen sind, weil mit der Variation der gesuchten Curve natürlich auch eine Veränderung der Gränzen a, b, d. h. der Abscissen der Endpunkte der gesuchten Curve, verbunden ist, und man also in diesem Falle, wie dies früher verstattet war, offenbar nicht von der Variation von x abstrahiren darf. Setzen wir nun

$$V = \int \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \int \partial x \sqrt{1 + p^2};$$

so ist, für $v = \sqrt{1 + p^2}$, mit Rücksicht auf die Variation von x

$$\delta V = v\delta x + P\delta y - \int \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \partial x,$$

wobey zu bemerken, daß, wie aus (23.) sogleich erhellet, δy nur die primitive Variation von y (17.) ist, auf welche also δx keinen Einfluß ausgeübt hat, und die also als ganz willkührlich, von δx ganz unabhängig, betrachtet werden muß. Bezeichnen wir nun die, übrigens noch fraglichen,

Digitized by Google

Gränzen durch a, b; so ergiebt sich als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum:

$$0 = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P_a \delta y_a + \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x} \delta y \partial x,$$

für jedes δx und δy, woraus, wie früher, leicht geschlossen wird, daß für sich

$$0 = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P \delta y_a,$$

und identisch $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$, also, ganz wie in (47.), die gesuchte Curve eine gerade Linie ist, deren Gleichung

$$y = Bx + C.$$

Hauptsächlich kommt es nun auf die Bestimmung der Lage dieser Geraden, d. h. der willkührlichen Constanten B, C, und der Gränzen a, b an, wozu man auf folgende Art gelangt, wenn wir der Kürze wegen $y = fx$ setzen. Aus den Bedingungen der Aufgabe erhellet augenblicklich, daß an den Gränzen

$$fa = f'a, \quad fb = f'b$$

seyn muß, und zugleich ist klar, daß an den Gränzen auch die variirten Werthe von y den variirten Werthen von y′ und y″, folglich auch an den Gränzen die Variationen von y den Variationen von y′ und y″ gleich seyn müssen. Nun bemerke man aber, daß y eine doppelte Variation, eine primitive und eine secundäre, d. i. von δx herrührende, y′ und y″ dagegen, weil die Gränzcurven an sich als völlig unveränderlich anzusehen sind, nur eine secundäre Variation erleiden. Bedienen wir uns also der in (17.) eingeführten Bezeichnung; so ist die gesammte Variation von y (a. a. O. zusammengesetzte Variation genannt) $= \delta y + \delta_1 y$, dagegen die Variation von y′ nur $= \delta_1 y'$, die von y″ nur $= \delta_1 y''$. Demnach ist nach dem Obigen an den Gränzen:

$$\delta y_a + \delta_1 y_a = \delta_1 y'_a, \quad \delta y_b + \delta_1 y_b = \delta_1 y''_b;$$
$$\delta y_a = \delta_1 y'_a - \delta_1 y_a, \quad \delta y_b = \delta_1 y''_b - \delta_1 y_b.$$

Nach (I. A.), wo ausführlich von der Bestimmung der secundären Variationen (Vergl. 17.) gehandelt worden, ist aber:

Digitized by Google

$$\delta_1 y = \frac{\partial y}{\partial x}\delta x,\ \delta_1 y' = \frac{\partial y'}{\partial x}\delta x,\ \delta_1 y'' = \frac{\partial y''}{\partial x}\delta x;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\delta y_a = \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\}\delta x_a,\ \delta y_b = \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\}\delta x_b;$$

und folglich, wenn dies in die obige Gränzgleichung für δy_a, δy_b gesetzt wird:

$$0 = \left\{v + P_b\left[\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right]\right\}\delta x_b$$
$$- \left\{v_a + P_a\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right]\right\}\delta x_a.$$

unabhängig von jedem besondern Werthe von δx, woraus sich auf ähnliche Art, wie früher, leicht ergiebt, daß

$$v_a + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\right\} = 0,$$

$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = 0.$$

Im vorliegenden speciellen Falle ist aber:

$$v = \gamma 1 + p^2,\ P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\gamma 1 + p^2};$$

$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \frac{1}{\gamma 1 + p^2}.$$

Also

$$\frac{1}{\gamma 1 + p_a^2} + \frac{P_a}{\gamma 1 + p_a^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0,$$

$$\frac{1}{\gamma 1 + p_b^2} + \frac{P_b}{\gamma 1 + p_b^2}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

woraus sogleich geschlossen wird, daß

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0,\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0.$$

Bezeichnen wir nun an den Durchschnittspunkten der gesuchten Curve mit den Gränzcurven die Winkel der Berührenden an jener und an diesen mit der Abscissenaxe durch α, α' und durch γ und γ'; so ist (Berührende Linie. 14.)

Digitized by Google

$$\text{tang}\,\alpha = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a,\quad \text{tang}\,\alpha' = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b;$$

$$\text{tang}\,\gamma = \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a,\quad \text{tang}\,\gamma' = \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b;$$

$$1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\gamma = 0,\quad 1 + \text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\gamma' = 0.$$

Die Winkel der Berührenden der gesuchten Curve mit den entsprechenden Berührenden der Gränzcurven sind aber offenbar $= \alpha - \gamma$ und $= \alpha' - \gamma'$, und (Goniometrie. 33.)

$$\text{tang}(\alpha-\gamma) = \frac{\text{tang}\,\alpha - \text{tang}\,\gamma}{1 + \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\gamma},\quad \text{tang}(\alpha'-\gamma') = \frac{\text{tang}\,\alpha' - \text{tang}\,\gamma'}{1+\text{tang}\,\alpha'\,\text{tang}\,\gamma'};$$

d. i. $\text{tang}(\alpha-\gamma) = \infty$, $\text{tang}(\alpha'-\gamma') = \infty$, $\alpha - \gamma = 90^0$, $\alpha' - \gamma' = 90^0$, so daß also die gesuchte Curve, wie wir oben gesehen haben, eine gerade Linie, und auf den beiden gegebenen Curven senkrecht seyn muß, wenn sie die kürzeste zwischen denselben seyn soll. Zugleich hat man nun vier Gleichungen:

$$fa = fa,\quad fb = f'b;$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \cdot \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0,\quad 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \cdot \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0;$$

welche zur Bestimmung von a, b, B, C hinreichend sind.

59. Wären die beiden gegebenen Curven von doppelter Krümmung, deren Gleichungen

$$y' = fx,\ z' = \varphi x;\quad y'' = f'x,\ z'' = \varphi'' x;$$

so ist

$$V = \int \partial x\ \sqrt{1 + p^2 + p'^2},$$

und für $v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2}$:

$$\partial V = v\partial x + P\partial y + P'\partial z - \int \frac{\partial P}{\partial x}\partial y\,\partial x - \int \frac{\partial P'}{\partial x}\partial z\,\partial x.$$

Also die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum:

$$0 = v_b \partial x_b + P_b \partial y_b + P'_b \partial z_b - v_a \partial x_a - P_a \partial y_a - P'_a \partial z_a - \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x}\partial y\,\partial x - \int_a^b \frac{\partial P'}{\partial x}\partial z\,\partial x$$

Digitized by Google

woraus, da $\delta y, \delta z$ ganz unabhängig von einander, übrigens auch nur primitive Variationen (23.) sind, wie schon öfter geschlossen wird:

$$0 = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b + P'_b \delta z_b ,$$
$$- v_a \delta x_a - P_a \delta y_a - P'_a \delta z_a ;$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial P'}{\partial x} = 0; \quad P = A, \quad P' = A' ;$$

woraus sich wie in (47.) ergiebt, daß die gesuchte Linie eine gerade ist, deren Gleichungen

$$y = Bx + C, \quad z = B'x + C' ;$$

welche wir durch $y = fx$, $z = \varphi x$ bezeichnen wollen. Ganz wie vorher überzeugt man sich nun, daß

$$\delta y_a = \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} \delta x_a, \quad \delta y_b = \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} \delta x_b ;$$
$$\delta z_a = \left\{\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right\} \delta x_a, \quad \delta z_b = \left\{\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right\} \delta x_b ;$$

welches, in die Gränzgleichung gesetzt, giebt:

$$0 = \left\{v_b + P_b \left[\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right] + P'_b \left[\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right]\right\} \delta x_b$$
$$- \left\{v_a + P_a \left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right] + P'_a \left[\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right]\right\} \delta x_a ;$$

unabhängig von jedem besondern Werthe von δx. Also

$$0 = v_a + P_a \left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} + P'_a \left\{\left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a\right\},$$
$$0 = v_b + P_b \left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} + P'_b \left\{\left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b\right\}.$$

Aber

$$v = \sqrt{1 + p^2 + p'^2}, \quad P = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}},$$
$$P' = \left(\frac{\partial v}{\partial p'}\right) = \frac{p'}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} ;$$
$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} - P'\frac{\partial z}{\partial x} = v - Pp - P'p' = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + p'^2}} .$$

Setzt man nun dies in die vorhergehenden Gleichungen, und multiplicirt auf beiden Seiten mit $\sqrt{1 + p^2 + p'^2}$, so erhält man leicht:

Digitized by Google

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_a \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b \left(\frac{\partial z'}{\partial x}\right)_b = o.$$

Diese beiden Gleichungen, in Verbindung mit

$$fa = f'a, fb = f'b; \varphi a = \varphi' a, \varphi b = \varphi' b$$

leiten zur Bestimmung der sechs Größen a, b, B, C, B', C'. Aus (Krumme Linie von gedoppelter Krümmung. 7.) und (Linie, gerade. 32.) ergiebt sich mittelst der beiden obigen Gleichungen leicht, daß die Cosinus der von den Berührenden der gesuchten Linie und der Gränzcurven in den gegenseitigen Durchschnittspunkten eingeschlossenen Winkel $= o$, diese Winkel selbst also $= 90°$, und die Gränzcurven folglich auf der gesuchten Linie senkrecht sind, wenn letztere die kürzeste zwischen jenen ist.

60. Wäre ein Punkt, für welchen $x = a$, und eine Curve, deren Gleichungen $y'' = f''x$, $z'' = \varphi''x$, gegeben; so hat man, $\delta x_a = \delta y_a = \delta z_a = o$ setzend, übrigens ganz wie vorher zu verfahren. Man findet, daß die gesuchte kürzeste Linie eine gerade ist, und erhält die Gleichung

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_b \left(\frac{\partial z''}{\partial x}\right)_b = o,$$

woraus erhellet, daß die kürzeste Linie auf der gegebenen Curve senkrecht ist, auf ganz ähnliche Weise, wie vorher. Bezeichnen wir die Coordinaten des gegebenen Punktes durch a, a', a''; so werden die fünf Größen b, B, C, B', C' aus obiger Gleichung, und den Gleichungen

$$a' = fa, a'' = \varphi a, fb = f'b, \varphi b = \varphi' b$$

bestimmt.

Auf ganz ähnliche Weise wie hier könnte man auch die kürzeste Linie zwischen zwei krummen Flächen, zwischen einem Punkte oder einer Linie und einer krummen Fläche bestimmen, und würde ähnliche Resultate erhalten.

61. Seyen wieder zwei Curven in einer Ebene durch die Gleichungen

$$y' = fx, y'' = f''x$$

Digitized by Google

gegeben; man soll eine Curve finden, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von der einen jener Curven bis zur andern gelangt, wobei es verstattet seyn mag, diese Aufgabe auf Curven in einer Ebene einzuschränken, indem sich die Auflösung leicht auf Curven von doppelter Krümmung ausdehnen lassen wird. Es ist hier (51.)

$$V = \int \frac{\partial x \sqrt{1+p^2}}{2\sqrt{gx}}, \quad v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+p^2}{gx}};$$

$$\delta V = v\delta x + P\delta y - \int \frac{\partial P}{\partial x}\delta y \partial x;$$

$$o = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P_a \delta y_a - \int_a^b \frac{\partial P}{\partial x}\delta y \partial x;$$

$$o = v_b \delta x_b + P_b \delta y_b - v_a \delta x_a - P \delta y_a,$$

und identisch $\frac{\partial P}{\partial x} = o$, woraus sich, wie a. a. O., die Cycloide ergiebt, indem man die Gleichung

$$y = r \operatorname{Arc\,sin\,vers}\frac{x}{r} - \sqrt{2rx - x^2} + C,$$

oder, der Kürze wegen, $y = fx$, erhält. Ganz wie in (58.) erhält man auch hier:

$$v_a + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} = o,$$

$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = o.$$

Aber

$$v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+p^2}{gx}}, \quad P = \frac{p}{2\sqrt{gx(1+p^2)}};$$

$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{gx(1+p^2)}},$$

und folglich, wenn man dies in obige Gleichungen substituirt:

$$\frac{1}{2\sqrt{g_a(1+p_a^2)}} + \frac{p_a}{2\sqrt{g_a(1+p_a^2)}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = o,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{g_b(1+p_b^2)}} + \frac{p_b}{2\sqrt{g_b(1+p_b^2)}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = o,$$

woraus

Digitized by Google

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0, \quad 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_b = 0,$$

so daß also die Cycloide wieder auf den beiden gegebenen Curven senkrecht seyn muß (58). Zur Bestimmung von a, b, r, C dienen die beiden obigen Gleichungen, nebst $fa = f'a$, $fb = f'b$.

Wäre ein Punkt, dessen Coordinaten a, a', und die Curve, deren Gleichung $y'' = f''x$ ist, gegeben; so erhielte man

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b \left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0,$$

welche Gleichung zeigt, daß auch hier die Cycloide auf der gegebenen Curve senkrecht ist, und nebst $a' = fa$, $fb = f''b$ zur Bestimmung von b, r, C dient.

62. Zwischen zwei gleichseitigen Hyperbeln, deren Gleichungen

$$y = \frac{a^2}{x}, \quad y'' = -\frac{a'^2}{x}$$

seyen, die Curve zu finden, welche, bei ihrer Umdrehung um die Axe der x die kleinste Oberfläche erzeugt. Der Inhalt der erzeugten Fläche ist (Complanation. Thl. I. S. 514) $= 2\pi \int y \partial x \sqrt{1 + p^2}$, und folglich

$$V = \int y \partial x \sqrt{1 + p^2}$$

zu einem Minimo zu machen. Auf ganz ähnliche Art wie in (53.) erhält man

$$\frac{x}{c} = \log n (y + \sqrt{y^2 - c^2}) + c',$$

da in diesem Falle

$$\partial V = v \partial x + P \partial y + \int \left(N - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \partial y \partial x;$$

$$0 = v_b \partial x_b + P_b \partial y_b - v_a \partial x_a - P_a \partial y_a + \int_a^b \left(N - \frac{\partial P}{\partial x}\right) \partial y \partial x,$$

$$0 = v_b \partial x_b + P_b \partial y_b - v_a \partial x_a - P_a \partial y_a,$$

und identisch $0 = N - \frac{\partial P}{\partial x}$, also dieselbe allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum, wie a. a. O., die dann durch (37. d.) weiter vereinfacht wird. Wie in (58.) erhält man auch hier wieder

Digitized by Google

$$v + P_a\left\{\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\right\} = 0,$$

$$v_b + P_b\left\{\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\right\} = 0.$$

Aber

$$v = y\sqrt{1+p^2},\ P = \frac{py}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$v - P\frac{\partial y}{\partial x} = v - Pp = \frac{y}{\sqrt{1+p^2}};$$

$$\frac{y_a}{\sqrt{1+p_a^2}} + \frac{p_a y_a}{\sqrt{1+p_a^2}}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0;$$

$$\frac{y_b}{\sqrt{1+p_b^2}} + \frac{p_b y_b}{\sqrt{1+p_b^2}}\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0;$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_a = 0,\ 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_b\left(\frac{\partial y''}{\partial x}\right)_b = 0;$$

so daß also die gesuchte Curve auf den beiden gegebenen Hyperbeln senkrecht seyn muß. Die Gränzen a, b und die zwey willkührlichen Constanten erhalten ihre Bestimmung mittelst der Gleichungen $fa = f'a$, $fb = f''b$, und der beiden vorhergehenden. Setzt man $\log c'$ statt c'; so hat man aus der gefundenen Gleichung:

$$\frac{x}{c} = \log c'(y + \sqrt{y^2 - c^2}),$$

$$-\frac{x}{c} = \log\frac{1}{c'(y+\sqrt{y^2-c^2})} = \log\frac{y-\sqrt{y^2-c^2}}{c^2c'}$$

$$e^{+\frac{x}{c}} = c'(y+\sqrt{y^2-c^2}),\ c^2c'^2e^{-\frac{x}{c}} = c'(y-\sqrt{y^2-c^2});$$

$$y = \frac{1}{2c'}\left\{e^{+\frac{x}{c}} + c^2c'^2e^{-\frac{x}{c}}\right\};$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2cc'}\left\{e^{+\frac{x}{c}} - c^2c'^2e^{-\frac{x}{c}}\right\},\ \frac{\partial y'}{\partial x} = -\frac{a^2}{x^2},\ \frac{\partial y''}{\partial x} = \frac{b'^2}{x^2}.$$

Setzt man nun vorschriftmäßig $x = a$ und $x = b$; so erhält man folgende vier Gleichungen:

$$2a^2c' - a\left\{e^{+\frac{a}{c}} + c^2c'^2e^{-\frac{a}{c}}\right\} = 0,$$

$$2a'^2c' + b\left\{e^{+\frac{b}{c}} + c^2c'^2e^{-\frac{b}{c}}\right\} = 0,$$

$$2a^2cc' - a^2\left\{e^{+\frac{a}{c}} - c^2c'^2e^{-\frac{a}{c}}\right\} = 0,$$

$$2b^2cc' + a'^2\left\{e^{+\frac{b}{c}} - c^2c'^2e^{-\frac{b}{c}}\right\} = 0,$$

Digitized by Google

zur Bestimmung von a, b, c, c'. Hat man diese Größen, so ergeben sich auch leicht die Ordinaten der Gränzpunkte mittelst

$$y' = \frac{a^2}{a}, \; y'' = -\frac{c'^2}{b}.$$

Diese Beispiele werden hinlänglich zeigen, wie man sich in ähnlichen Fällen zu verhalten hat.

B. Relative Maxima und Minima.

63. Die Aufgabe der relativen Maxima und Minima läßt sich im Allgemeinen so aussprechen:

Den unbestimmten Integralausdruck $V = \int v \partial x$ zwischen den gegebenen Gränzen $x = a$, $x = b$ zu einem Maximo oder Minimo zu machen, so daß zugleich eine willkührliche Anzahl ebenfalls gegebener Integralausdrücke

$$V' = \int v' \partial x, \; V'' = \int v'' \partial x, \; V''' = \int v''' \partial x, \; V'''' = \int v'''' \partial x, \; \ldots,$$

zwischen denselben Gränzen genommen, die constanten gegebenen Werthe $1', 1'', 1''', 1'''', \ldots$ erhalten. (Vergl. 32.)

Diese Aufgabe läßt sich immer auf die Aufgabe der absoluten Maxima und Minima zurückführen. Bezeichnen nämlich $c', c'', c''', c'''', \ldots$ willkührliche Constanten; so mache man bloß den Ausdruck

$$\int v \partial x + c' \int v' \partial x + c'' \int v'' \partial x + c''' \int v''' \partial x + \ldots,$$

nach den vorher gelehrten Methoden zwischen den gegebenen Gränzen zu einem Maximo oder Minimo, und bestimme die durch die Integration der gemeinschaftlichen Bedingungsgleichung des Maximum und Minimum eingeführten, so wie die willkührlichen Constanten $c', c'', c''', c'''', \ldots$ mittelst der erhaltenen Gränzgleichungen und der gegebenen Gleichungen:

$$\int v' \partial x = 1', \; \int v'' \partial x = 1'', \; \int v''' \partial x = 1''', \; \ldots,$$

deren Anzahl offenbar immer der Anzahl der Größen $c', c'', c''', \ldots$ gleich seyn wird.

Von der Richtigkeit dieser Methode überzeugt man sich leicht auf folgende Art.

Digitized by Google

Man denke sich die Relation zwischen x und den relativ-unabhängigen Größen, für welche

$$\int v\partial x + c'\int v'\partial x + c''\int v''\partial x + c'''\int v'''\partial x + \ldots,$$

zwischen den gegebenen Gränzen, unabhängig von besondern Werthen der Constanten c', c'', c''', ..., deren Anzahl $= n$ sey, ein Maximum oder Minimum wird, wirklich gefunden, und bezeichne die dieser Relation entsprechende Form des obigen Ausdrucks durch

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots.$$

Nun stelle man sich vor, daß diese Relation irgend eine Aenderung erleide, und dadurch (V) in $(V)_i$ übergehe, die zwischen den gegebenen Gränzen genommenen Werthe von

$$(V'), (V''), (V'''), (V''''), \ldots$$

aber, wie die Aufgabe verlangt, ungeändert bleiben, welches man erreichen wird, wenn man, wie, unbeschadet der völligen Willkührlichkeit der Aenderung der Relation zwischen x und den relativ-unabhängigen Größen an sich, offenbar verstattet ist, bey dieser Aenderung sich n neue Constanten γ', γ'', γ''', γ'''', ... eingeführt, und dieselben so bestimmt denkt, daß die zwischen den gegebenen Gränzen genommenen Werthe von

$$(V'), (V''), (V'''), (V''''), \ldots$$

selbst keine Aenderung erleiden. Auf diese Art geht also

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots$$

über in

$$(V)_i + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots,$$

und es ist, weil nach der Voraussetzung

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots$$

ein Maximum oder ein Minimum bezeichnet, jenachdem das erste oder das zweite statt findet,

$$(V) + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots$$
$$\gtrless (V)_i + c'(V') + c''(V'') + c'''(V''') + \ldots,$$

also auch immer $(V) \gtrless (V)_i$, so daß folglich (V) selbst ein Maximum oder Minimum bezeichnet, unter der Voraussetzung, daß

$$(V'), (V''), (V'''), (V''''), \ldots.$$

ungeändert bleiben, zwischen den gegebenen Gränzen, und unabhängig von allen besondern Werthen der Constanten $c', c'', c''', c'''', \ldots$. Bestimmt man nun diese Constanten, nebst den durch die Integration einzuführenden, mittelst der Gränzgleichungen und

$$\int v'\partial x = l', \int v''\partial x = l'', \int v'''\partial x = l''', \ldots;$$

oder vielmehr

$$(V') = l', (V'') = l'', (V''') = l''', \ldots;$$

so wird offenbar der zweiten Bedingung der Aufgabe, daß

$$\int v'\partial x, \int v''\partial x, \int v'''\partial x, \ldots.$$

zwischen den gegebenen Gränzen den bestimmten Werthen $l', l'', l''', \ldots$ entsprechen sollen, unmittelbar genügt.

64. Betrifft die Frage eine geometrische Aufgabe, und soll, wie dies in der That gewöhnlich der Fall ist, die gesuchte Curve durch zwei gegebene Punkte gehen; so treten die hierdurch gegebenen Bedingungen anstatt der Gränzgleichungen ein, und man hat sich hierbei überhaupt ganz wie in (44.) und (45.) zu verhalten.

65. Unter allen durch zwei gegebene Punkte gehenden gleich langen (isoperimetrischen) Curven diejenige zu finden welcher der größte oder kleinste (nämlich zwischen der Curve, der Axe der x, und den beiden äußersten Ordinaten enthaltene) Flächenraum entspricht.

In diesem Falle ist, der in (63.) gebrauchten Bezeichnung gemäß,

$$V = \int y\partial x, V' = \int \partial x \sqrt{1+p^2} = l';$$

also $\int y\partial x + c\int \partial x \sqrt{1+p^2}$ zu einem absoluten Maximo oder Minimo zu machen. Nun ist

$$N = 1, P = \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}}, Q = R = \ldots = 0.$$

Folglich nach (37. δ.)

$$y + c\sqrt{1+p^2} = \frac{cp^2}{\sqrt{1+p^2}} + C,$$

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sqrt{c^2-(y-C)^2}}{y-C}, \partial x = \frac{(y-C)\partial y}{\sqrt{c^2-(y-C)^2}};$$

Digitized by Google

$$y - C = z,\ \partial y = \partial z,\ \partial x = \frac{z\partial z}{\sqrt{c^2 - z^2}};$$

$$c^2 - z^2 = u^2,\ -2z\partial z = 2u\partial u,\ z\partial z = -u\partial u;$$

$$\partial x = -\partial u,\ x = -u + C',\ x - C' = -u;$$

$$(x - C')^2 + (y - C)^2 = c^2.$$

Also ist die gesuchte Curve ein Kreis, dessen Halbmesser c ist. Sind a, a'; b, b' die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte; so hat man zur Bestimmung der drei Constanten C, C', c die Gleichungen:

$$(a - C')^2 + (a' - C)^2 = c^2,\ (b - C')^2 + (b' - C)^2 = c^2,$$

$$\int_a^b \partial x \sqrt{1 + p^2} = l'.$$

Letztere Gleichung ist eine transcendente. Es ist

$$\int \partial x \sqrt{1 + p^2} = \int \frac{\partial y}{\sqrt{1 - \left(\frac{y - C}{c}\right)^2}} = c \int \frac{\partial \omega}{\sqrt{1 - \omega^2}},$$

für $\frac{y - C}{c} = \omega$. Also (Integralformel. 49.)

$$\int \partial x \sqrt{1 + p^2} = c \operatorname{Arc\,sin} \frac{y - C}{c} + \text{Const.},$$

$$l' = c \left\{ \operatorname{Arc\,sin} \frac{b' - C}{c} - \operatorname{Arc\,sin} \frac{a' - C}{c} \right\}.$$

Aus diesen Gleichungen erhellet, daß C, C', c doppelte Werthe haben, und daß namentlich c, der Radius des Kreises, bey einerley absoluter Größe, sowohl positiv als negativ genommen werden kann, d. h. daß der Kreis sowohl concav als convex gegen die Abscissenaxe seyn kann.

Entwickelt man $\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right)$; so erhält man

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\right) = \frac{c}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}},$$

wenn wir $v = y + c\sqrt{1 + p^2}$ setzen. Hieraus erhellet, daß im vorliegenden Falle sowohl ein Maximum, als auch ein Minimum statt finden kann, jenachdem c negativ oder positiv ist. Aus einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung geht aber sogleich hervor, daß das Maximum statt finden muß, wenn der Kreis gegen die Abscissenaxe concav, das Minimum, wenn er gegen dieselbe convex ist, und daß folglich im ersten Falle c als negativ, im an-

Digitized by Google

dern als positiv anzusehen ist, vorausgesetzt, daß $\gamma 1+p^2$ immer positiv genommen wird.

Die obige transcendente Gleichung läßt sich nach einer leichten trigonometrischen Transformation auch so ausdrücken:

$$\sin\left(\frac{l'}{c}\right) = \frac{(a-C')(b'-C) - (a'-C)(b-C')}{c^2}$$
$$= \frac{ab' - a'b - (a-b)C + (a'-b')C'}{c^2}.$$

66. Unter allen isoperimetrischen Curven zwischen zwei gegebenen Punkten diejenige zu finden, welche bey der Umdrehung um die Axe der x die kleinste oder größte Oberfläche erzeugt. Hier ist

$$V = \int 2\pi y \partial x \gamma 1+p^2,\ V' = \int \partial x \gamma 1+p^2 = l'.$$

Man setze also

$$v = (y+c)\gamma 1+p^2 = y'\gamma 1+p'^2,$$

für $y + c = y'$, $p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial x} = p'$. Hieraus erhält man ganz wie in (53.) die Catenaria, und es wird wieder ein Maximum oder ein Minimum statt finden, jenachdem die Curve gegen die Axe der x concav oder convex ist.

67. Soll unter allen isoperimetrischen Curven zwischen zwei gegebenen Punkten, welchen zugleich eine und dieselbe Area entspricht, diejenige gefunden werden, welche bei der Umdrehung um die Axe der x den größten oder kleinsten Körper erzeugt; so hat man

$$V = \int \pi y^2 \partial x,\ V' = \int \partial x \gamma 1+p^2 = l',\ V'' = \int y \partial x = l'';$$

und, für $v = y^2 + cy + c'\gamma 1+p^2$,

$$N = 2y + c,\ P = \frac{c'p}{\gamma 1+p^2},\ Q = R = \ldots = 0.$$

Also (37. δ.)

$$y^2 + cy + c'\gamma 1+p^2 = \frac{c'p^2}{\gamma 1+p^2} + C,$$

$$\partial x = \frac{(y^2+cy-C)\partial y}{\gamma c'^2 - (y^2+cy-C)^2},$$

Digitized by Google

welches die Differentialgleichung einer Elastica ist, deren nähere Betrachtung in die Mechanik gehört. M. s. z. B. mein Lehrb. d. Statik fester Körper. Halle. 1826. S. 552. Euler a. a. O. Additamentum I.

C. Noch einige besondere Anwendungen der Variationsrechnung auf die Lehre vom Größten und Kleinsten.

68. Die in (33.) angewendeten Principien führen auch auf ganz ähnliche Art zur Bestimmung von Curven, welche in allen ihren Punkten einer gewissen Bedingung des Maximum oder Minimum genügen, wie Lagrange (Théorie des fonctions. 1813. p. 268.) an folgendem interessanten Beispiele gezeigt hat.

69. Man denke sich zwei den Abscissen a, b, welche wir, wie offenbar verstattet, als positiv, und $b > a$ annehmen können, entsprechende Ordinaten; so wird von denselben jede durch irgend einen Punkt einer Curve gezogene Berührende von der Axe der x aus zwei gewisse Stücke abschneiden, deren Product wir $= V$ setzen wollen. Es soll nun die Curve gefunden werden, bei welcher dieses Product in jedem Punkte größer oder kleiner ist als das entsprechende Product an jeder andern durch denselben Punkt gehenden Curve.

Die Coordinaten irgend eines Punktes der gesuchten Curve seyen x, y; so ist die Gleichung der Berührenden durch denselben:

$$z - y = \frac{\partial y}{\partial x}(u - x),$$

und folglich die den Abscissen $u = a$, $u = b$ entsprechenden Ordinaten, d. h. die oben erwähnten Abschnitte:

$$y + (a-x)\frac{\partial y}{\partial x},\quad y + (b-x)\frac{\partial y}{\partial x};$$

folglich, für $p = \frac{\partial y}{\partial x}$:

$$V = [y + (a-x)p][y + (b-x)p].$$

Diese Größe soll für jeden Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, ein Maximum oder Minimum, d. h. größer oder

Digitized by Google

kleiner werden, als die entsprechende Größe bei jeder durch denselben Punkt gehenden Curve. Man denke sich nun die gesuchte Curve gefunden, und auf irgend eine Art variirt, d. h. den Zusammenhang zwischen x und y geändert; so wird natürlich auch $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ variiren, die Variationen von x und y sind aber $= o$ zu setzen, da alle Curven durch den Punkt, dessen Coordinaten x, y sind, gehen sollen. Dies giebt:

$$\partial V = (b-x)\{y+(a-x)p\}\partial p + (a-x)\{y+(b-x)p\}\partial p,$$

und ganz auf dieselbe Art, wie in (33.), überzeugt man sich, daß, als gemeinschaftliche Bedingung des Maximum und Minimum $\partial V = o$, für das Maximum $\partial^2 V < o$, für das Minimum $\partial^2 V > o$ seyn muß. Also hat man

$$(b-x)\{y+(a-x)p\}+(a-x)\{y+(b-x)p\}=o,$$

woraus nach leichter Reduction

$$(a+b-2x)y+2(a-x)(b-x)p=o,$$

$$\frac{p}{y} = \frac{2x-a-b}{2(a-x)(b-x)} = \frac{2x-a-b}{2(x-a)(x-b)},$$

$$\frac{\partial y}{y} = \frac{(2x-a-b)\partial x}{2(x-a)(x-b)} = \frac{\partial x}{2(x-a)} + \frac{\partial x}{2(x-b)},$$

$$\log y = \tfrac{1}{2}\log(x-a) + \tfrac{1}{2}\log(x-b) + \text{Const.},$$

$$\log y^2 = \log C(x-a)(x-b),$$

für 2. Const $=$ log C. Also

$$y^2 = C(x-a)(x-b)$$

die Gleichung der gesuchten Curven.

Ferner ist

$$\partial^2 V = \{(b-x)[y+(a-x)p]+(a-x)[y+(b-x)p]\}\partial^2 p + 2(a-x)(b-x)(\partial p)^2,$$

d. i. wegen der gemeinschaftlichen Bedingung des Maximum und Minimum:

$$\partial^2 V = 2(a-x)(b-x)(\partial p)^2.$$

Man nehme nun den Punkt, dessen Abscisse $= a$, Ordinate $= o$ ist, als Anfang der Coordinaten x', y', und setze also $x = a + x'$; so ist

$$y'^2 = -Cx'\{(b-a) - x'\},$$

$$\partial^2 V = -2x'\{(b-a) - x'\}(\partial p)^2;$$

Digitized by Google

und man hat jetzt zwei Fälle zu unterscheiden. Ist die willkührliche Constante C negativ, also — C positiv; so wird die Gleichung der Curve

$$y'^2 = (-C(b-a))x' - \frac{(-C(b-a))x'^2}{b-a},$$

die Curve also eine Ellipse, deren Hauptaxe $= b-a$, Parameter $= -C(b-a)$, kleine Axe also $= (b-a)\sqrt{-C}$ ist. Ihre Scheitel sind die beiden gegebenen Punkte deren Abscissen a, b, und ersterer ist der Anfang der Coordinaten. Folglich sind in diesem Falle x', $(b-a)-x'$ positiv, also $\delta^2 V$ immer negativ, und es findet demnach ein Maximum statt.

Nimmt man dagegen die willkührliche Constante C positiv, also — C negativ: so ist die Gleichung der Curve

$$y'^2 = \frac{C(b-a)x'^2}{b-a} - C(b-a)x',$$

die Curve also ein Hyperbel, deren Hauptaxe $= b-a$, Parameter $= C(b-a)$, kleine Axe also $= (b-a)\sqrt{C}$ ist. Die Scheitel sind wieder die Punkte, deren Abscissen a, b sind, und ersterer der Anfangspunkt. Bei der Hyperbel haben x', $(b-a)-x'$ offenbar immer entgegengesetzte Zeichen, $\delta^2 V$ ist positiv, und es findet also ein Minimum statt.

Hierin ist zugleich eine merkwürdige Eigenschaft der Linien der zweiten Ordnung enthalten. Errichtet man nämlich auf die Axe eine Ellipse oder Hyperbel durch ihre Endpunkte Perpendikel, und zieht durch irgend einen Punkt eine Berührende; so ist das Product der von derselben auf jenen Perpendikeln abgeschnittenen Stücke bey der Ellipse größer, bey der Hyperbel kleiner, als das entsprechende Product bey jeder andern durch denselben Punkt gehenden Curve.

Auch hat man nach dem Obigen:

$$p = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{(2x-a-b)y}{2(x-a)(x-b)},$$

$$y + (a-x)p = -\frac{(b-a)y}{2(x-b)},$$

$$y + (b-x)p = \frac{(b-a)y}{2(x-a)},$$

Digitized by Google

woraus leicht

$$V = -\tfrac{1}{4}C(b-a)^2,$$

so daß also das in Rede stehende Product eine constante Größe ist, und zwar immer = dem Quadrate der halben kleinen Axe, bei der Hyperbel nur negativ genommen, ganz der Natur der Sache gemäß, wie leicht erhellet.

70. Sollte die Curve gefunden werden, bei welcher für jeden Punkt das Quadrat der um die Abscisse vermehrten Subnormale ein Maximum oder Minimum ist; so würde man leicht erhalten:

$$V = (y\frac{\partial y}{\partial x} + x)^2 = (py + x)^2;$$

$$\delta V = 2(py + x)y\partial p = 0,\ py + x = 0;$$

$$y\partial y = -x\partial x,\ \tfrac{1}{2}y^2 = -\tfrac{1}{2}x^2 + C,$$

oder $x^2 + y^2 = r^2$ für $2C = r^2$. Die gesuchte Curve also ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfang der Coordinaten ist. Ferner ist

$$\delta^2 V = 2(py + x)y\partial^2 p + 2y^2(\partial p)^2,$$

d. i., wegen der allgemeinen Bedingung des Maximum und Minimum, $\delta^2 V = 2y^2(\partial p)^2$, so daß also, weil diese Variation immer positiv ist, ein Minimum statt findet.

III. Geschichte.

71. Schon Newton hatte im zweiten Buche der Principien (Prop. 34. Schol.) die Aufgabe von dem Körper des kleinsten Widerstandes (55.) durch eine Proportion aufgelöst, welche zur Construction der gesuchten Curve mittelst der Tangenten hinreicht, ohne jedoch die Analysis seiner Auflösung mitzutheilen. Die Aufmerksamkeit der Geometer ward aber erst auf diese neue Gattung von Problemen über die Maxima und Minima gelenkt, als Joh. Bernoulli in den Act. Erud. Jun. 1696. p. 269. die Aufgabe von der Brachystochrone (51.) vorlegte, und in einem Programm (Groningae. 1697.) „eorum in gratiam, ad quorum manus Acta Lipsiensia non perveniunt" wiederholte, indem er zugleich bekannt machte, daß (sechs Monate nach der ersten Bekanntmachung) noch

Digitized by Google

keine Auflösung erschienen sey. Leibnitz habe ihm geschrieben: se jam feliciter dissoluisse nodum pulcherrimi huius, uti vocabat, et inauditi antea problematis, und gebeten, die Frist bis auf nächste Ostern zu verlängern, damit auch Franzosen und Italiener ihre Kräfte versuchen könnten. Seine eigene Auflösung gab Joh. Bernoulli in den Act. Erud. 1697. Mai. p. 206. In den Philosophical Transact. 1697. No. 224. p. 384. erschien eine Construction, aber ohne Analysis und Beweis, deren Verfasser sich nicht nannte. Aber Joh. Bernoulli (Opp. T. I. p. 196.) rieth, wie er sagt, ut ex ungue leonem, daß es Newton sey. Tschirnhausen glaubte, daß es mehrere Curven geben könnte, die der Aufgabe genügten (Act. Erud. 1697. Mai. p. 221.). Der Marquis de l'Hospital gab seine Auflösung (Ibid. p. 217.) ebenfalls ohne Analysis, schrieb aber an Bernoulli, daß sie auf denselben Principien beruhe, welche er ihm früher zur allgemeinen Untersuchung der Kettenlinie mitgetheilt habe. Noch eine Auflösung zu den vieren, welche die drei großen Nationen, Deutschland, England und Frankreich (Joh. Bern. Opp. T. I. p. 200.) geliefert hatten, fügte Jacob Bernoulli hinzu (Act. Erud. l. c. Jac. Bern. Opp. T. II. n. 75.). Alle fanden dasselbe Resultat (51.), und stimmten auch in den Principien meist überein, obgleich jede Auflösung natürlich auch ihre Eigenthümlichkeiten hatte. Um einen Begriff von jenen ältern Methoden zu geben, wird es gut seyn, das Hauptsächlichste aus Jac. Bernoullis Auflösung hier beyzubringen, welche zu diesem Zwecke am geeignetsten scheint.

AB (Fig. 98.) sey die Curve, auf welcher ein schwerer Punkt durch den Fall in der kürzesten Zeit von A bis B gelangt. Daher muß auch jeder Theil ab von AB mit der Geschwindigkeit, mit welcher der Punkt in a ankommt, in der kürzesten Zeit durchlaufen werden, weil, wenn mit dieser Geschwindigkeit acb in einer kürzern Zeit durchlaufen würde, auch AacbB in einer kürzern Zeit wie AabB durchlaufen werden müßte, indem die in b erlangte Geschwindigkeit nach mechanischen Pricipien bloß von der Höhe abhängt,

Digitized by Google

und folglich in beiden Fällen dieselbe ist. Nun stelle man sich die Curve als ein Polygon mit unendlich vielen Seiten vor, und sehe die Bewegung in jeder Seite als gleichförmig an. M und N (Fig. 99.) seyen irgend zwei Spitzen dieses Polygons, zwischen denen noch eine andere K liegt, und RS sey eine horizontale Linie. Man soll nun die Lage des Punktes K in RS, d. h. die Lage der beiden auf einander folgenden Elemente MK, KN der gesuchten Curve, so bestimmen, daß ein sich in MK mit der Geschwindigkeit a, in KN mit der Geschwindigkeit b gleichförmig bewegender Punkt, in der kürzesten Zeit von M bis N gelangt. Die Betrachtung zweier solchen Elemente, wie MK, KN ist bei allen Aufgaben von der Classe der absoluten Maxima und Minima wesentlich, welches man wohl zu bemerken hat. Man setze nun MK = x, KN = y; so ist die Zeit der Bewegung von M bis N $= \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, und es muß nun x, y so bestimmt werden, daß diese Größe ein Minimum wird, wodurch die Aufgabe auf die gewöhnliche Lehre von den Maximis und Minimis zurückgeführt ist. Sey ML = α, HN = β, HL = γ, KL = z; so ist

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + z^2}}{a} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - z)^2}}{b}.$$

Differentiirt man, und setzt das Differential = 0; so wird

$$\frac{z}{a\sqrt{\alpha^2 + z^2}} = \frac{\gamma - z}{b\sqrt{\beta^2 + (\gamma - z)^2}}.$$

für das Minimum, d. i.

$$\frac{LK}{a.KM} = \frac{KH}{b.KN}, \text{ oder } \frac{\cos\alpha'}{a} = \frac{\cos\beta'}{b},$$

so daß sich also die Geschwindigkeiten in M und K wie die Cosinus der Winkel MKL, NKH verhalten müssen. Die in A, b, b′, b″, b‴, ... (Fig. 100.) erlangten Geschwindigkeiten sind nach einfachen mechanischen Principien:

$$0, 2\sqrt{ab.g}, 2\sqrt{a'b'.g}, 2\sqrt{a''b''.g}, 2\sqrt{a'''b'''.g}, \ldots.$$

und es ist folglich, wenn man die von Ab, bb′, b′b″, b″b‴, ..., d. i. von den Berührenden der Curve, mit den durch A, b, b′, b″, b‴, ... gezogenen Horizontalen,

Digitized by Google

d. i. mit AC, die wir als Axe der Abscissen annehmen wollen, eingeschlossenen Winkel durch α, α', α'', α''', ... bezeichnet, nach dem Obigen:

$$\cos\alpha : \cos\alpha' = 0 : 2\sqrt{ab.g} = 0 : \sqrt{ab},$$
$$\cos\alpha' : \cos\alpha'' = 2\sqrt{ab.g} : 2\sqrt{a'b'.g} = \sqrt{ab} : \sqrt{a'b'},$$
$$\cos\alpha'' : \cos\alpha''' = 2\sqrt{a'b'.g} : 2\sqrt{a''b''.g} = \sqrt{a'b'} : \sqrt{a''b''},$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

woraus unmittelbar folgt, daß bey der gesuchten Curve die Cosinus der von irgend zwei Berührenden mit der Abscissenaxe eingeschlossenen Winkel sich wie die Quadratwurzeln aus den Ordinaten der Berührungspunkte verhalten müssen, oder daß, wenn Θ irgend einen solchen Winkel bezeichnet, $\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}}$ eine constante Größe seyn muß. Setzt man nun $\frac{\cos\Theta}{\sqrt{y}} = \sqrt{a}$; so erhält man leicht:

$$\text{tang}\,\Theta = \sqrt{\frac{1-ay}{ay}}.$$

Aber $\text{tang}\,\Theta = \frac{\partial y}{\partial x}$. Also

$$\partial x = \frac{\partial y \sqrt{ay}}{\sqrt{1-ay}},$$

die Differentialgleichung der gesuchten Curve, welche, integrirt, zur Gleichung der Cycloide führt, wie leicht aus diesem Art. erhellen wird.

Man wird sich aus der hier mitgetheilten Auflösung einen Begriff von der bey Aufgaben dieser Art überhaupt angewandten Methode zu machen im Stande seyn.

Schon seit längerer Zeit, besonders seit dem Jahre 1695, wo Johann Professor der Mathematik zu Gröningen geworden war, trennte die Eifersucht des Ruhmes die Brüder Bernoulli. Johann hatte sich schon manche Ausfälle gegen den ältern Bruder, der ihn in die Mathematik eingeweiht hatte, erlaubt, und mehrere von ihm vorgelegte Aufgaben schienen eigens gegen denselben gerichtet. Nur einmal (Act. Erud. 1695. p. 537.) hatte Jacob Bernoulli schon früher geantwortet, indem er seinen Bruder erinnerte, weniger Wichtigkeit auf Entdekkungen zu legen, welche das Instrument, womit sie beide

Digitized by Google

ausgerüstet wären, leicht mache, und zu erkennen, daß, gleichwie die Größen in der Geometrie stufenweise wachsen, auch jeder Andere, der mit demselben Instrument versehen wäre, stufenweise zu denselben Resultaten gelangt seyn würde. (Bossut G. d. M. II. S. 161.). In der Abhandlung über die Brachystochrone aber legt er, sich eigens an seinen Bruder wendend, demselben folgende Aufgabe vor, die ich hier, etwas allgemeiner als von Bernoulli selbst, mit Bossuts Worten (a. a. O. S. 170.) gebe:

Unter allen isoperimetrischen Curven zwischen gegebenen Gränzen eine Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man eine zweite Curve construirt, deren Ordinaten beliebige Functionen der Ordinaten oder der Bogen jener sind, der Flächeninhalt der zweiten Curve ein Größtes oder Kleinstes bildet. Dann fügt Bernoulli noch hinzu: Huic ne detrectare possit (frater), adjungimus alterum (problema), quod majorem cum suo affinitatem habet, ubi quaeritur, quaenam ex infinitis Cycloidibus idem initium habentibus, ac super eadem basi horizontali constitutis, illa sit, per quam descendens grave, minimo tempore, ex initio communi ad datum perpendiculum appellat (61.). Et quum iniquum sit, ut quis ex labore in alterius gratiam, et cum proprii temporis dispendio, rerumque suarum damno suscepto, nihil emolumenti percipiat, prodit Nonnemo, pro quo caveo, qui soluturo Fratri, ultra laudes promeritas, honorarium 50 imperialium decrevit; hac tamen lege, ut intra tertium ab huius publicatione mensem se suscepturum promittat, ipsasque solutiones finito anno, utcunque licet per quadraturas exhibeat. Hoc enim elapso, si nemo dederit, meas exhibebo. In einem Briefe an den Doctor Basnage (Histoire des ouvrages des savans. Juin. 1697. p. 452.) antwortete Joh. Bernoulli auf diese Herausforderung. Er beurtheilt zuerst Leibnitzens, Newtons und de l'Hospitals Auflösungen der Aufgabe von der Brachystochrone, setzt auch hinzu, daß sein Bruder dieselbe

Digitized by Google

wohl aufgelöst habe, wirft ihm aber vor, daß er zu der Auflösung dieser sehr leichten Aufgabe, für welche er selbst, Newton und Leibnitz, in derselben Stunde, wo sie sich die Aufgabe vorgelegt, auch die Auflösung gefunden hätten, zu viel Zeit gebraucht, und, wie Galilei, lange in der Meinung gestanden hätte, daß die gesuchte Curve ein Kreis seyn müsse. Dann fügt er in Bezug auf die vorgelegten Aufgaben hinzu: Quelques difficiles que ces problêmes paroissent, je n'ai pas manqué, de m'y attacher à l'instant même, que je les ai lu; mais voyez avec quel succès: au lieu de trois mois qu'on me donne pour sonder le gué, et au lieu de tout le reste de cette année pour trouver la résolution, je n'ai employé en tout que trois minutes de tems pour tenter, commencer, et achever d'approfondir tout le mystére; et bien au dela: Car je donnerai les résolutions mille fois plus generales que ne sont les problêmes. In diesem Tone fährt er noch weiter fort, sagt, daß er seine Auflösungen an Leibnitz geschickt, und denselben zum Richter aufgefordert habe; der versprochene Preis solle in Leibnitzens Hände gelegt werden, indem er denselben für die Armen bestimmt habe. Die Auflösungen selbst erfolgten in einem Briefe an Varignon in dem Journal des Savans. Decembre. 1697, und er forderte den versprochenen Preis. Jac. Bernoulli antwortete (das. Fevr. 1698.), daß die Auflösungen seines Bruders nicht ganz der Wahrheit gemäß seyen, und verpflichtete sich zu drei Dingen: à déviner au juste l'Analyse, qui a conduit son frére à la solution, qui se voit dans ce journal; quelle qu'elle soit, à y faire voir des paralogismes, si on la veut publier; à donner la véritable solution du problême dans toutes ses parties. Hiezu fügte er noch die Wette, daß, wenn Jemand für die Fortschritte der Wissenschaft sich genug interessirte, um einen Preis auf jeden dieser Punkte zu setzen, er sich verbindlich mache, eben so viel zu verlieren, wenn er den ersten nicht erfüllte, das doppelte, wenn der zweite ihm nicht gelänge, das dreifache, wenn er den dritten ver-

Digitized by Google

fehlte. Man wird aus diesen Mittheilungen den in diesen Streitschriften herrschenden Ton hinreichend zu beurtheilen im Stande seyn. Sie finden sich alle im ersten Theile der Opp. Joh. Bern. gesammelt. Joh. Bernoulli behauptete fortwährend die Güte seiner Auflösungen und forderte den ausgesetzten Preis. In einem Briefe an Varignon vom 26. Jun. 1698. (J. d. S. 1698. 4. Arnst.) suchte Jacob B. den zwei ersten sich auferlegten Bedingungen zu genügen, trug in demselben eine in sich fehlerhafte Analysis vor, wo die falschen Sätze, indem sie durch andere wieder aufgehoben werden, nichts desto weniger in gewissen Fällen zu einem wahren Resultat führten, und fand vermittelst dieser Analysis die Gleichungen seines Bruders. Zugleich verlangte er (J. d. S. 1698, 23. Juin) neben Leibnitz noch L'Hospital, Newton und alle berühmte Geometer der Zeit zu Richtern, und machte den triumphirenden Ton seines Bruders mit einer Feinheit und einem Witz lächerlich, den man, wie Bossut sagt, sonst nicht bei Mathematikern gewohnt ist, besonders da er sich, als ein Schweizer, der französischen Sprache bediente. Bossut erzählt, daß Joh. Bernoulli, als er diese Stücke des Journal des Savans erhalten, in eine Wuth, die man sich nicht vorstellen könne, gerathen sey, und sich in einem an seinen Bruder gerichteten Briefe (Joh. Bern. Opp. T. I. p. 231.) Luft gemacht habe, so wie denn dieser Brief (22 Aout. 1698.) manche Ausfälle in der That gegen denselben enthält. Im Jahre 1700 erschien von Jac. Bernoulli ein Brief zu Basel, worin er seinen Bruder zur Bekanntmachung seiner Methode aufforderte, und am Schlusse die Formeln ohne Beweis gab. M. s. diese Formeln auch Act. Erud. 1700. p. 261. Joh. Bernoulli entwickelte nun seine Methode, und schickte die Abhandlung im Februar 1701 versiegelt an die Akademie zu Paris mit der Bedingung, sie zu eröffnen, wenn sein Bruder seine Auflösung mitgetheilt haben würde. Dies ward in dem J. d. S. 21. Fevr. 1701. mit Ausfällen gegen Jac. Bernoulli angezeigt. (Joh. Bern. Oqp. T. I. p. 367.). Nun erschien Jac. Bernoulli's eigne Auflösung in Form

Digitized by Google

von Thesen im März 1701 mit einer Dedication an L'Hospital, Leibnitz, Newton und Fatio de Duillier, so wie auch in den Act. Erud. Maj. 1701 p. 213. unter dem Titel: Jacobi Bern. Analysis magni problematis isoperimetrici. Er erkannte zuerst das richtige Princip für die Auflösung der hierher gehörenden Aufgaben. Joh. Bernoulli hatte sich nämlich bei der Auflösung der isoperimetrischen Aufgaben vorzüglich darin geirrt, daß er bei derselben, wie bei den Aufgaben aus der Classe der absoluten Maxima und Minima, nur zwei Elemente der Curve betrachtete, welches oben an der Aufgabe von der Brachystochrone deutlich gemacht worden ist. Bey den isoperimetrischen Aufgaben, wo neben der Bedingung des Größten und Kleinsten noch andere Bedingungen zu erfüllen sind, müssen aber, wie Jac. Bernoulli a. a. O. zuerst zeigte, drey Elemente der Curve auf ähnliche Art betrachtet werden, wovon man sich am besten aus der angeführten Abhandlung selbst, oder noch leichter aus einer spätern Abhandlung Joh. Bernoullis (Opp. T. II. p. 235.) einen Begriff verschaffen wird. Von nun an beobachtete Joh. Bernoulli ein tiefes Stillschweigen, und die der Pariser Akademie übersandte Auflösung erschien nur erst im Jahre 1706 (Opp. T. I. p. 424.), nachdem Jac. Bernoulli 1705 gestorben war. Welche Motive den Erstern vermochten, eine in sich falsche Auflösung doch noch bekannt zu machen, wage ich nicht zu entscheiden. Der eigentliche Irrthum ist oben angegeben. Dreizehn Jahre nach seines Bruders Tode erkannte Joh. Bernoulli diesen Irrthum selbst: „je m'y étois effectivement mépris en quelque chose" sagt er von seiner ersten Auflösung, und gab in dem Mém. de Paris 1718. p. 100. (Opp. T. II. p. 235) eine neue Auflösung, welche ebenfalls auf der Betrachtung dreier Elemente beruht, und im Grunde ganz mit der seines Bruders einerley ist, nur unter einer einfachern Form dargestellt. Auf denselben Principien beruht auch die von Taylor in der Methodus incrementorum directa et inversa. Lond. 1715. gegebene Auflösung.

Digitized by Google

Euler hat sich viel mit dem isoperimetrischen Problem beschäftigt. Zuerst erschien Problematis isoperimetrici in latissimo sensu accepti solutio generalis. Comm. Petrop. VI. 1739. Curvarum maximi minimique proprietate gaudentium inventio nova et facilis. Comm. Petrop. VIII. 1741., seiner vielfältigen Arbeiten über die Brachystochronen, auch in widerstehenden Medien, nicht zu gedenken. Eine ungemeine Erweiterung aber gewann diese Untersuchung durch sein berühmtes Werk: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Laus. et Genev. 1744. 4. In diesem Werke wird zuerst zwischen absoluten und relativen Maximis und Minimis unterschieden, die Auflösung auf die in diesem Artikel entwickelten allgemeinen Formeln, in Bezug auf die allgemeine Bedingung des Maximum und Minimum, gebracht, und die Zurückführung der relativen Maxima und Minima auf die absoluten gezeigt, zugleich aber die Theorie durch eine so große Anzahl höchst lehrreicher Beispiele erläutert, daß dieses Werk, nach Lagrange's Urtheil, als das vortrefflichste Uebungsbuch in der Integralrechnung noch jetzt dienen kann. Was noch zu wünschen übrig blieb, war eine rein analytische Methode, zu den von Euler gefundenen Resultaten zu gelangen, wodurch die Deutlichkeit nur erhöht werden konnte, und die Auffindung der Unterscheidungskennzeichen des Maximum und Minimum. Indem Lagrange diesen Untersuchungen die Differentialrechnung anzupassen suchte, ward er auf die nach ihren Hauptsätzen in diesem Artikel entwickelte, von Euler später so genannte, Variationsmethode oder Variationsrechnung geleitet, welche Alles leistet, was man in dieser Beziehung wünschen kann. Lagrange's erste Untersuchungen finden sich in den Miscell. Soc. Taurin. Nämlich: Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules integrales. II. 1760. 61. p. 173. Application de la méthode précendente à la Dynamique p. 196. An Fontaine fand La-

Digitized by Google

grange einen Gegner (Mém. de Paris. 1767. p. 588.), so wie auch an Borda (Mém. de Paris. 1767. p. 551.). Lagrange vertheidigt sich in der Abhandlung: Observations sur la méthode des variations. Misc. Soc. Taur. T. IV. p. 163. Schon 1755 hatte Lagrange die Methode Eulern mitgetheilt, und dieser sie so vortrefflich gefunden, daß er sie selbst in mehrern Abhandlungen zu erläutern suchte, und ihr auch, wie schon erwähnt, den Namen Calculus variationum gab. M. s. Elementa calculi variationum. Nov. Comm. Petrop. T. X. p. 51. Methodus nova et facilis calculum variationum tractandi. T. XVI. p. 35., vorzüglich aber Institutiones calculi integralis. T. III. Appendix. Weiter entwickelt hat Lagrange die Methode in der Théorie des fonctions. Seconde partie. Chap. XII. XIII., und vorzüglich in den Leçons sur le calcul des fonctions. Leçon XXI. XXII.

Zu leugnen ist indeß nicht, daß rücksichtlich der Strenge und Deutlichkeit der Darstellung noch Manches zu wünschen übrig blieb, und in dieser Rücksicht haben sich einige neuere deutsche Mathematiker ein unbestreitbares Verdienst um diese Wissenschaft erworben. Nicht genug erkannt scheint zu seyn, was schon Crelle in seinem Versuch einer rein algebraischen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen. I. Gött. 1813. S. 527 — 776 in Bezug auf die Darstellung der Principien der Variationsrechnung geleistet hat. Die vielen neuen Zeichen führen einige Schwierigkeit bei dem Studium dieses Werkes herbei. Die Anwendung auf die Lehre von den Maximis und Minimis lag außer dem Zwecke desselben. Als die vollständigsten Lehrbücher verdienen alle Empfehlung, vorzüglich:

Analytische Darstellung der Variationsrechnung mit Anwendung derselben auf die Grössten und Kleinsten, von E. H. Dirksen. Berlin. 1823. 4., und:

Die Lehre vom Größten und Kleinsten von M. Ohm. Berlin. 1825., wo jedoch auch die nicht immer ganz gewöhn-

Digitized by Google

liche Bezeichnung einige Schwierigkeit für Anfänger machen wird.

Außer den Abhandlungen in den allgemein bekannten analytischen Werken von Lacroix (Traité du calc. diff. et int. T. II. p. 721. Traité élém. de calc. diff. et int. p. 484.) Bossut, Cousin, und dem Cours complet de Mathém. pures par Francoeur. T. II. Paris 1828. p. 478. hebe ich noch aus:

S. Gourief Essai de démontrer rigoureusement un theorême fondamentale des équations de condition de la differentielle des fonctions à plusieurs variables et du calcul des variations. Nov. Act. Petrop. T. XIII. p. 154.

P. Frisii Opp. T. I. Medial. 1782. 4, p. 414.

L'Huilier Principiorum calculi diff. et int. expos. elem. Tab. 1795. 4. Cap. XX. De problematibus, quae vocantur, isoperimetricis. Mit Anwendung der Methode der Gränzen. Nicht allgemein.

Eine Abhandlung von Gergonne in den Annales de Math. T. XIII. 1822. und Exposition des principes du calcul des variations par Ampère. Ibid. T. XVI. 1825. p. 133.

Noch s. m. über die sogenannte Methode der unbestimmten Factoren, welche besonders bei den Anwendungen der Variationsrechnung auf Mechanik ihre Anwendung findet, eine Abhandlung von Ampere in dem Recueil des Mémoires présentés à l'Institut par des Savans étrangers. T. I., und über die Anwendung auf Mechanik überhaupt ganz vorzüglich die Mécanique analytique von Lagrange.

Zur Geschichte gehört außer den Bemerkungen in Kästners Anal. d. U. S. 857. ff. auch: Specimen historiae atque principiorum calculi quem vocant variationum. Auct. F. W. A. Murhard. Gott. 1796.

Die Abhandlung der Variationsrechnung in der Integralrechnung von Leseur und Jacquier (T. II.) rühmt Montucla (T. III. p. 354.) sehr. Unsere deutschen Lehrbücher der höhern Analysis übergehen diesen wichtigen Theil

Digitized by Google

derselben entweder ganz, oder behandeln ihn wenigstens sehr unvollständig, undeutlich und oberflächlich.

Vector, Radius vector heißt in der höhern Geometrie jede von einem bestimmten Punkte an eine Curve gezogene gerade Linie; in der Lehre von den Kegelschnitten vorzugsweise jede von einem Brennpunkte an den Kegelschnitt gezogene Gerade.

Veränderliche Größe (quantitas variabilis) ist jede Größe, welche unter einer solchen Beziehung betrachtet wird, daß ihr jeder willkührliche bestimmte Werth beigelegt werden kann, die man also willkührlich ab- und zunehmen lassen kann. Veränderliche Größen werden in der Mathematik, zum Unterschiede von den unveränderlichen, beständigen oder constanten Größen, welche in derselben Rechnung durchgängig ein und denselben Werth behalten, und durch die ersten Buchstaben des Alphabets bezeichnet werden, immer durch die letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z, v, u. s. f., bezeichnet. Ist AB der Durchmesser eines Kreises, und von irgend einem Punkte der Peripherie ein Perpendikel PQ auf denselben gefällt, so ist nach einem sehr bekannten geometrischen Satze $PQ^2 = AQ \times BQ$. Bezeichnen wir nun den Radius durch r, PQ durch y, und den Abstand dieses Perpendikels vom Mittelpunkte durch x, so ist immer die eine der Größen AQ, BQ, $= r - x$, die andere $= r + x$; also

$$y^2 = r^2 - x^2 .$$

Man nennt dies die Gleichung des Kreises. Sie stellt im Allgemeinen die Relation dar, welche zwischen jedem der durch y bezeichneten Perpendikel, und dessen Abstande x vom Mittelpunkte statt findet. Hier sind also offenbar x und y die veränderlichen Größen, r dagegen ist, so lange die Untersuchung auf ein und denselben Kreis eingeschränkt wird, eine constante oder beständige Größe, da sie, wie auch x und y sich ändern mögen, immer denselben Werth behält, und obige Relation oder Gleichung immer statt findet.

Digitized by Google

Jede Größe, welche von einer veränderlichen Größe auf irgend eine Art abhängt, so daß sie zugleich mit ihr sich ändert, heißt eine Function dieser veränderlichen Größe, und wird, wenn x die veränderliche Größe bezeichnet, im Allgemeinen durch f(x), φ(x), oder ein ähnliches Zeichen, angedeutet. Functionen sind also offenbar auch veränderliche Größen. Man unterscheidet in dieser Beziehung auch unabhängige und abhängige veränderliche Größen, indem man unter jenen solche veränderliche Größen versteht, deren Werth durch Nichts bedingt wird, und völlig willkührlich angenommen werden kann. Abhängige veränderliche Größen dagegen sind solche, deren Werth auf irgend eine Art durch den Werth einer unabhängigen veränderlichen Größe bestimmt wird, von dem Werthe einer solchen veränderlichen Größe abhängt; also alle Functionen unabhängiger veränderlichen Größen, jede Function einer andern Function, wie z. B. log sin x u. dergl. Die Betrachtung der veränderlichen Größen und ihrer Functionen, namentlich der durch die willkührlichen Veränderungen jener herbeigeführten Veränderungen dieser, ist ausschließlich der Gegenstand der höhern Mathematik, besonders der mathematischen Analysis. Alle auf letztere Bezug habende Artikel dieses Wörterbuchs können also zu weiterer Aufklärung des Begriffs der veränderlichen Größen dienen.

Veränderung (Vertauschung, Verwechselung, Uebertragung nach: Versuch einer rein algebraischen Darstellung der Rechnung mit veränderlichen Größen von Crelle. Gött. 1813. S. 373.) der unabhängigen veränderlichen Größe (Changement de la variable indépendante) bezeichnet in der Differentialrechnung ein Verfahren, durch welches die, in irgend einer Aufgabe als solche angenommene, ursprüngliche unabhängige veränderliche Größe mit einer andern vertauscht werden kann, die entweder schon unter den Größen der Aufgabe enthalten ist, oder erst neu in die Rechnung eingeführt wird. Da dieses Verfahren wichtig ist, und manches Eigenthümliche hat, so sollen einige der am häufigsten vorkommenden Fälle hier näher betrachtet werden. Die Differentialquotienten

Digitized by Google

der abhängigen veränderlichen Größe in Bezug auf die ursprüngliche unabhängige veränderliche Größe sollen immer durch Einschließung in Klammern ausgezeichnet werden.

1. Sey y die abhängige, x die ursprüngliche veränderliche Größe, und irgend ein Ausdruck

$$f\left(x, y, \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \ldots\right) = F$$

gegeben. Soll nun x als Function einer neuen unabhängigen veränderlichen Größe t betrachtet, und der gegebene Ausdruck auf diese, als unabhängige veränderliche Größe, bezogen werden; so fragt sich, wie derselbe, um dieser Bedingung zu genügen, umgeformt werden müsse.

Es ändere sich t um i, so ist nach dem Taylor'schen Satze, wenn wir die dadurch herbeigeführte Aenderung von x durch k bezeichnen,

$$k = \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial t^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Die Aenderung von y ist

$$\frac{\partial y}{\partial t}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial t^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

so wie auch

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\cdot\frac{k}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\cdot\frac{k^2}{1.2} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]\cdot\frac{k^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Setzt man hierin für k den vorher gefundenen Werth, ordnet nach den Potenzen von i, und vergleicht die beiden für die Aenderung von y erhaltenen Ausdrücke; so ergeben sich leicht folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\frac{\partial x}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial t^2} + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]\frac{\partial^3 x}{\partial t^3} + 3\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3,$$

u. s. f. u. s. f.

woraus ferner succesive:

Digitized by Google

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3} - 3\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} + 3\frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^4} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^3 x}{\partial t^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^3},$$

u. s. f. u. s. f.

Gebraucht man die von Lagrange eingeführte Bezeichnung der Differentialquotienten oder derivirten Functionen (Differentiale Thl. I. S. 821. Taylors Lehrsatz. 4.), so nehmen diese Formeln, wenn alle nicht eingeklammerten derivirten Functionen auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen sich auf die unabhängige veränderliche Größe t beziehen, folgende einfachere Gestalt an:

$$[y'] = \frac{y'}{x'},$$

$$[y''] = \frac{x'y'' - y'x''}{x'^3};$$

$$[y'''] = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{3x''y''}{x'^4} - y'\left(\frac{x'''}{x'^4} - \frac{3x''^2}{x'^5}\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Diese Ausdrücke müssen also für

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \ldots$$

oder $[y']$, $[y'']$, $[y''']$, ... in den gegebenen allgemeinen Ausdruck F eingeführt werden, um denselben auf die unabhängige veränderliche Größe t zu beziehen.

Um das Gesetz der gefundenen Ausdrücke zu übersehen, hebe man im Zähler und Nenner der einzelnen Brüche die gleichen Potenzen von ∂t auf, und erinnere sich nur, daß alle Differentiale von x und y auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen sich auf die unabhängige veränderliche Größe t beziehen, so daß also nicht ∂x, sondern ∂t constant ist; so erhält man

Digitized by Google

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} + 3\frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x^4} - \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{\partial^3 x}{\partial x^3},$$

u. s. f. u. s. f.

Da also hiernach $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$ gefunden wird, wenn man das Differential ∂y, in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Größe, durch das Differential ∂x, in Bezug auf t als unabhängige veränderliche Größe, dividirt, und die Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right], \ldots$$

eben so von einander abhängen, wie $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$ von y abhängt; so erhellet leicht die Richtigkeit und der Sinn folgender Formeln:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = \frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\,\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Es ist wohl zu bemerken, daß bei diesen Differentiationen kein Differential als constant zu betrachten ist. Entwickelt man die Differentiale wirklich, so erhält man wieder die obigen entwickelten Formeln. Für

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = p, \quad \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = q$$

ist z. B. der Krümmungshalbmesser

$$r = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

(Krümmungskreis. 2.). Um diesen Ausdruck auf irgend eine andere unabhängige veränderliche Größe, von welcher

Digitized by Google

x auf eine willkührliche Art abhängt, zu beziehen, muß man nach dem Obigen setzen

$$p = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}.$$

Nach gehöriger Substitution erhält man

$$r = -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x},$$

wo nun kein Differential constant ist, und alle sich auf eine neue willkührliche unabhängige veränderliche Größe beziehen.

2. Ferner kann der Fall vorkommen, und kommt in der That sehr häufig vor, daß in dem Ausdrucke F nicht mehr x, sondern y als die unabhängige veränderliche Größe, und x vielmehr als von y abhängig betrachtet werden soll, indem eine solche gegenseitige Abhängigkeit der Größen x und y offenbar statt findet.

Wenn, indem x sich um i ändert, y die Aenderung k erleidet, so wird offenbar auch umgekehrt x die Aenderung i erleiden, wenn y sich um k ändert. Da nun nach dem Taylorschen Lehrsatze

$$k = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \cdot \frac{i}{1} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \cdot \frac{i^2}{1.2} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \cdots;$$

$$i = \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{k}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial y^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} + \cdots.$$

ist; so erhält man, indem man die letztere Reihe für i in den Ausdruck von k setzt, nach Potenzen von k entwickelt, und die Coefficienten mit einander vergleicht, leicht folgende Gleichungen:

$$1 = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial x}{\partial y},$$

$$0 = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2,$$

$$0 = \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] \frac{\partial^3 x}{\partial y^3} + 3\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} + \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3,$$

u. s. f. u. s. f.

woraus leicht:

Digitized by Google

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}, \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3}, \left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = -\frac{\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^4} + 3\frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^5},$$

u. s. f. u. s. f.

oder mittelst der Bezeichnung von Lagrange:

$$[y'] = \frac{1}{x'}, [y''] = -\frac{x''}{x'^3}, [y'''] = -\frac{x'''}{x'^4} + \frac{3x''^2}{x'^5}, \ldots.$$

Hebt man nun wieder gleiche Potenzen von ∂y auf, und bezieht, indem man ∂y als constant betrachtet, alle Differentiale auf der rechten Seite der Gleichheitszeichen auf y als unabhängige veränderliche Größe; so wird

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial y}{\partial x}, \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\frac{\partial^2 x \partial y}{\partial x^3},$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = -\frac{\partial^3 x \partial y}{\partial x^4} + 3\frac{(\partial^2 x)^2 . \partial y}{\partial x^5},$$

u. s. f. u. s. f.

Auch überzeugt man sich, wie vorher, leicht von der Richtigkeit und dem Sinne folgender Formeln:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y,$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right),$$

$$\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right),$$

$$\left[\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\left(\frac{1}{\partial x}\partial\left(\frac{1}{\partial x}\partial y\right)\right)\right),$$

u. s. f. u. s. f.

Immer ist hier ∂y als constant zu betrachten. Durch Entwickelung dieser Ausdrücke erhält man die schon oben gefundenen Formeln.

3. Die hier gefundenen Formeln sind für den Algorithmus der Differentialrechnung von großer Wichtigkeit. Sey z. B.

$$y = \sin x;$$

so ist bekanntlich, wenn y als Function von x betrachtet wird,

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \cos x.$$

Digitized by Google

Betrachtet man nun aber x als Function von y; so ist nach dem Bewiesenen

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\partial x}\partial y .$$

Also

$$\frac{1}{\partial x}\partial y = \cos x, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{1}{\cos x};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial \operatorname{Arc\,sin} y}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} .$$

Für $y = \operatorname{tang} x$ ist bekanntlich

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{1}{\cos x^2};$$

also, wenn x als Function von y betrachtet wird,

$$\frac{1}{\partial x}\partial y = \frac{1}{\cos x^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \cos x^2 = \frac{1}{1+\operatorname{tang} x^2};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial \operatorname{Arc\,tang} y}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2} .$$

Ferner ist für $y = \sin x$:

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = -\sin x .$$

Also, wenn y die unabhängige veränderliche Größe ist,

$$\frac{\partial^2 x \, \partial y}{\partial x^3} = \sin x .$$

Aber nach dem Obigen

$$\partial x^3 = \cos x^{-3} . \partial y^3 .$$

Also

$$\frac{\partial^2 x}{\cos x^{-3} . \partial y^3} = \sin x, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial y^3} = \frac{\sin x}{\cos x^3};$$

$$\text{d. i. } \frac{\partial^2 . \operatorname{Arc\,sin} y}{\partial y^3} = \frac{y}{(1-y^2)\sqrt{1-y^2}} .$$

Differentiirt man den vorher gefundenen Ausdruck für $\frac{\partial \operatorname{Arc\,sin} y}{\partial y}$ nach bekannten Regeln von Neuem, so erhält man Dasselbe. Aus diesen wenigen Beispielen wird der Nutzen der gefundenen Formeln schon hinlänglich erhellen.

4. Soll ferner die Unabhängigkeit der veränderlichen Größe x auf eine andere veränderliche Größe t, welche als Function von x und y betrachtet wird, übergetragen werden, wie Crelle diese Operation gar nicht unpassend bezeichnet; so muß man bekanntlich (1.) überhaupt setzen:

Digitized by Google

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

u. s. f. u. s. f.

Da aber t eine Function von x und y ist, welche wir im Allgemeinen durch

$$t = \varphi(x, y)$$

bezeichnen wollen, so kann man offenbar auch umgekehrt x und y, wo y von x abhängig ist, als Functionen von t betrachten, und eine Aenderung von t wird folglich immer auch Aenderungen von x und y herbeiführen. Also ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

$$t + i = \varphi\left(x + \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \ldots,\ y + \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \ldots\right),$$

d. i. für

$$\Delta = \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 x}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\Delta' = \frac{\partial y}{\partial t} \cdot \frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \cdot \frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + \ldots,$$

nach dem Taylor'schen Lehrsatze für mehrere veränderliche Größen (Taylors Lehrsatz. 7.):

$$i = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\Delta}{1} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)\frac{\Delta^2}{1.2} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\Delta'}{1} + \frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\Delta}{1}\cdot\frac{\Delta'}{1} + \ldots.$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)\frac{\Delta'^2}{1.2} + \ldots.$$

wo alle Differentialquotienten von t partielle Differentialquotienten in Bezug auf x und y sind. Setzt man nun für Δ und Δ' die vorher gefundenen Werthe, entwickelt nach Potenzen von i, und vergleicht die Coefficienten; so erhält man:

Google

$$1 = \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t} + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t},$$

$$0 = \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2 t}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial t},$$

u. s. f. u. s. f.

Mittelst dieser Gleichungen kann man sowohl alle Differentialquotienten von x in Bezug auf t, als auch alle Differentialquotienten von y in Bezug auf t eliminiren. Es ist nämlich z. B.

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1 - \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial t}}{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)};$$

Setzt man diesen Ausdruck in die zweite Gleichung, so erhält man $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, u. s. f. Werden nun die gefundenen Ausdrücke in die obigen Formeln für $[\frac{\partial y}{\partial x}]$, $[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]$, ... gesetzt, so erhält man Ausdrücke für diese Differentialquotienten, in welchen die Differentialquotienten von x in Bezug auf t nicht mehr vorkommen.

Eben so ist

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1 - \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial t}}{\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)},$$

und man kann ganz auf ähnliche Weise wie vorher $[\frac{\partial y}{\partial x}]$, $[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}]$, ... von $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, ... befreien. Die eine dieser Eliminationen muß aber immer vorgenommen werden, weil, wegen der Abhängigkeit von x und y von einander, eben so, wie in dem gegebenen Ausdrucke bloß die Differentialquotienten von y nach x vorkamen, wenn t die unabhängige veränderliche Größe seyn soll, auch nur von einer der Größen x und y die Differentialquotienten nach t vorkommen dürfen.

5. Es kann aber auch t nicht als eine entwickelte Function von x und y, sondern unentwickelt, mittelst einer

Digitized by Google

Differentialgleichung gegeben seyn, wie wenn z. B., um nur diesen einfachen Fall zu betrachten,

$$\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi\left(x, y, \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right], \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right], \ldots\right)$$

wäre. Man setze für $\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]$, $\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]$, ... in die gegebene Function F die in (1.) entwickelten Ausdrücke:

$$\left[\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}},$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2} - \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{\partial x}{\partial t}} \cdot \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2},$$

u. s. f. u. s. f.

und thue ein Gleiches in Bezug auf die Function φ. Den dadurch hervorgehenden Ausdruck dieser Function bezeichne man durch Ω. Nach (2.) ist

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = 1, \text{ d. i. } \Omega \frac{\partial x}{\partial t} = \Omega' = 1;$$

also

$$\frac{\partial \Omega'}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Omega'}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 \Omega'}{\partial t^3} = \ldots = 0.$$

Durch die Entwickelung dieser Differentialquotienten nach t erhält man Gleichungen, mittelst welcher man wieder die Differentialquotienten einer der Größen x, y in Bezug auf t eliminiren kann. Die erhaltenen Ausdrücke substituirt man in die schon oben verwandelte Function, welche auf diese Art in einen Ausdruck verwandelt werden wird, der, außer den beiden Größen x und y, nur noch die Differentialquotienten einer dieser beiden Größen in Bezug auf die neue unabhängige veränderliche Größe t enthält.

Der Raum gestattet hier nicht größere Ausführlichkeit; wir verweisen daher auf Lagrange Léçons sur le calcul des fonctions. Paris. 1806. p. 62. Lacroix Traité du calcul diff. et int. T. I. p. 203. sqq., dessen Traité élém. de calc. diff. et int. p. 154.. Francoeur cours complet de Math. pures. T. II. Paris. 1828. p. 280., und vorzüglich auf das angeführte Werk

Digitized by Google

von Crelle (S. 373 — 415), wo dieser Gegenstand mit besonderer Ausführlichkeit und Genauigkeit behandelt, und auch auf solche Fälle, wo mehrere unabhängige veränderliche Größen vorkommen, Rücksicht genommen wird. Man muß sich nur vorher mit den neuen Zeichen des Verfassers einigermaßen bekannt machen (Nr. 32.).

Verdoppelung des Würfels, siehe Delische Aufgabe.

Verfolgungslinien (courbes de poursuite) heißen Curven, bei welchen der Bogen zu dem Unterschiede der Abscisse und Subtangente ein gegebenes constantes Verhältniß hat.

Ist a der Exponent dieses Verhältnisses, und s der Bogen; so ist (Berührende Linie. 13.)

$$s = a\left(x - \frac{y\partial x}{\partial y}\right)$$

die Bedingungsgleichung der Aufgabe.

Durch Differentiation erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = -ay.\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Folglich (Rectification. 2.):

$$-ay.\frac{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\partial x} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

$$\frac{\partial y}{y} = -\frac{a\partial\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\log y = a\log\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial x}{\partial y}\right\} + \log C,$$

$$C = \frac{y}{\left\{\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial x}{\partial y}\right\}^a}.$$

Der Werth der Ordinate, für welche $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$ ist, sey $= k$; so ist $C = k$. Also

Digitized by Google

$$\frac{1}{y^a} = k^{\frac{1}{a}} \left| \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2} - \frac{\partial x}{\partial y} \right| .$$

Macht man nun diese Gleichung rational; so erhält man leicht:

$$\partial x = \tfrac{1}{2} \partial y \left| \left(\frac{k}{y}\right)^{\frac{1}{a}} - \left(\frac{y}{k}\right)^{\frac{1}{a}} \right| ,$$

unddurch Integration:

$$x = \tfrac{1}{2} \left\{ \frac{k^{\frac{1}{a}} \cdot y^{1-\frac{1}{a}}}{1-\frac{1}{a}} - \frac{k^{-\frac{1}{a}} \cdot y^{1+\frac{1}{a}}}{1+\frac{1}{a}} \right\}$$

$$= \frac{a}{2} \left\{ \frac{\sqrt[a]{k y^{a-1}}}{a-1} - \frac{\sqrt[a]{k^{-1} y^{a+1}}}{a+1} \right\} + C .$$

Für $a > 1$, vorausgesetzt daß $y = o$ für $x = o$, ist $C = o$. Für $a = 1$, wo das erste Glied der Gleichung $= \infty$ wird, ist die Differentialgleichung:

$$\partial x = \tfrac{1}{2} \partial y \left| \frac{k}{y} - \frac{y}{k} \right| ,$$

$$x = \tfrac{1}{2} k \log n y - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{y^2}{k} + C .$$

Da man wegen $\log n y = \log n o$ für $y = o$ die Constante nicht so bestimmen kann, daß x, y zugleich verschwinden; so bestimme man C so, daß $y = k$ wird für $x = o$. Dies giebt:

$$x = \tfrac{1}{2} k \log n \frac{y}{k} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{y^2 - k^2}{k} .$$

Bestimmt man, wenn $a < 1$ ist, die Constante auf dieselbe Art; so erhält man:

$$x = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k^{\frac{1}{a}} y^{1-\frac{1}{a}}}{1-\frac{1}{a}} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{k^{-\frac{1}{a}} y^{1+\frac{1}{a}}}{1+\frac{1}{a}} - \frac{k}{a-\frac{1}{a}} .$$

Erhält a verschiedene Werthe; so erhalten die Curven sehr verschiedene Gestalten. Sie sind von Maupertuis und Bouguer (Mém. de Paris. 1732. p. 1.) zuerst betrachtet. Auch s. m. v. Pritt witz Untersuchungen über Curven, die durch ihre Subtangente rectificirt werden. Lpzg. 1815. Brandes höhere Geom. II. S. 99. Der Ur-

Digitized by Google

sprung des Namens wird sich am einfachsten für den Fall, wo $a = 1$ ist, zeigen lassen. Seyen nämlich A, B (Fig. 101.) zwey Körper, welche sich gleichförmig mit gleicher Geschwindigkeit so bewegen, daß A immer in der Abscissenlinie fortgeht, B aber seinen Weg immer nach A hinrichtet, wie z. B. ein Hund, der von seinem Herrn angerufen wird, indem sich der Herr nach einer geraden Linie fortbewegt. Sind nun A, B gleichzeitig in A′, B′; so ist A′B′ die Berührende für B′, A′C′ die Subtangente, und offenbar Bogen $BB' = AA' = AC' + A'C' = AC' - (-A'C') =$ Abscisse — Subtangente, da hier die Subtangente als negativ zu betrachten ist. In diesem Falle ist also der Bogen dem Unterschiede zwischen der Abscisse und Subtangente gleich, d. i. $a = 1$. Für andre Bewegungen erhält man andre Werthe von a. M. vergl. noch einen Aufsatz von Lehmus in Crelles Journal d. Math. I. S. 61.

Verhältniß (ratio, λόγος) zweyer gleichartigen Größen zu einander ist nach Euclid (V. Erkl. 3.) die gegenseitige Beziehung, in welcher diese beiden Größen in Absicht ihrer Größe zu einander stehen, so daß also der Begriff eines Verhältnisses überhaupt aus der Vergleichung zweier gleichartigen Größen mit einander entspringt.

1. Die vollkommenste Vergleichung zweyer Größen mit einander wird aber angestellt, wenn man untersucht, wie die eine aus der andern entstehen kann, wobei man also immer die eine als bekannt, die andere als unbekannt ansehen muß.

2. Die beiden mit einander verglichenen Größen heißen Glieder des Verhältnisses; die als bekannt betrachtete das erste, die andere das zweite Glied, obgleich einige Schriftsteller hiervon abweichen. S. z. B. Eucl. Elem. lib. XV. Op. J. Barrow. Cant. 1655. p. 90.

3. Die Größe B kann aus A auf doppelte Art entstehen:

a) Wenn man zu A eine gewisse (positive oder negative) Größe addirt.

Digitized by Google

b) Wenn man A mit einer gewissen (ganzen oder gebrochenen) Zahl multiplicirt.

Die erste Art des Verhältnisses nennt man ein arithmetisches, die andere ein geometrisches oder auch bloß ein Verhältniß. Beide Namen sind unpassend. Das erste bezeichnet man durch $A - B$, das zweite durch $A : B$.

Bei den ältern Mathematikern (Clavii Euclides Lib. V. Def. IV.) ist proportio, eigentlich ratio, multiplex ein Verhältniß von der Form $nA : A$, wenn n eine ganze Zahl ist, und zwar proportio dupla, tripla, etc, wenn $n = 2, = 3$, ꝛc. Das Verhältniß $A : A$ heißt ratio aequalitatis, jedes andere ratio inaequalitatis. Verhältnisse von der Form $(n+1)A : nA$, $nA : (n+1)A$, $(n+m)A : nA$, $nA : (n+m)A$, wo $n > m$, $(mn+1)A : nA$, $(mn+p)A : nA$, wo $n > p$, heißen: ratio superparticularis, subsuperparticularis, superpartiens, subsuperpartiens, multiplex superparticularis, multiplex superpartiens; so wie denn die alten Arithmetiker sehr reich an dergleichen Kunstwörtern sind, welche aber alle nicht mehr gebraucht werden.

4. Die Größe D, welche zu A addirt werden muß, um B zu erhalten, heißt die Differenz des Verhältnisses $A - B$. Die Zahl e, mit welcher man A multipliciren muß, um B zu erhalten, heißt der Exponent oder Name von $A : B$. Es ist also immer $A + D = B$, $Ae = B$.

5. Die Differenz läßt sich für jede zwei Größen leicht finden, da immer $D = B - A$. Die schwierigere Aufgabe, den Exponenten zu finden, wird auf folgende Art aufgelöset. Man bestimme, welches durch wiederholte Subtraction immer möglich ist, die ganzen Zahlen $n, n', n'', n''', \ldots$, wo n auch $= o$ seyn kann, so, daß

$$\begin{aligned} B &= nA + R, \\ A &= n'R + R', \\ R &= n''R' + R'', \\ R' &= n'''R'' + R''', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

wo $R < A$, $R' < R$, $R'' < R'$, $R''' < R''$, u. s. f. ist; so ist

$$\frac{B}{A} = n + \frac{R}{A};$$

$$\frac{A}{R} = n' + \frac{R'}{R}, \quad \frac{R}{A} = \frac{1}{n' + \frac{R'''}{R}},$$

$$\frac{R}{R'} = n'' + \frac{R''}{R'}, \quad \frac{R'}{R} = \frac{1}{n'' + \frac{R''}{R'}};$$

$$\frac{R'}{R''} = n''' + \frac{R'''}{R''}, \quad \frac{R''}{R'} = \frac{1}{n''' + \frac{R''''}{R''}};$$

u. s. f. u. s. f.

woraus durch succesive Substitution sogleich:

$$\frac{B}{A} = n + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \ldots$$

oder für

$$e = n + \frac{1}{n'} + \frac{1}{n''} + \frac{1}{n'''} + \ldots,$$

$$B = Ae,$$

so daß also e in Form eines Kettenbruchs gefunden ist.

6. Man muß zwei Fälle unterscheiden, jenachdem der obige Kettenbruch aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Gliedern besteht. Im ersten Falle kann e durch eine Rationalzahl nicht genau ausgedrückt werden. Der zweite Fall tritt ein, wenn man in der Reihe

$$R, R', R'', R''', \ldots\ldots$$

auf ein Glied $= 0$ kommt. Ist nämlich $R^{(\alpha)} = 0$; so sind die beiden letzten Gleichungen in (5.):

$$R^{(\alpha-3)} = n^{(\alpha-1)} R^{(\alpha-2)} + R^{(\alpha-1)}$$

$$R^{(\alpha-2)} = n^{(\alpha)} R^{(\alpha-1)}$$

so daß also $R^{(\alpha-1)}$ in $R^{(\alpha-2)}$, folglich auch in $n^{(\alpha-1)} R^{(\alpha-2)}$, also auch in $n^{(\alpha-1)} R^{(\alpha-2)} + R^{(\alpha-1)}$ d. i. in $R^{(\alpha-3)}$ aufgeht. So schließt man leicht weiter, daß $R^{(\alpha-1)}$ in

$$R^{(\alpha-4)}, R^{(\alpha-5)}, \ldots R, A, B$$

Digitized by Google

aufgeht, und folglich ein gemeinschaftliches Maaß von A, B ist, diese Größen also commensurabel sind. Hieraus sieht man, daß der obige Kettenbruch, wenn die Größen A, B commensurabel sind, jederzeit abbricht, und also e durch einen rationalen Bruch dargestellt wird. Sind A, B incommensurabel; so bricht der Kettenbruch nie ab, und e ist irrational.

7. Da $B = Ae$ und $e = 1.e$ ist; so entsteht B eben so aus A, wie e aus 1. Folglich sind offenbar die Verhältnisse $A:B$ und $1:e$ einander gleich, so daß also jedes Verhältniß zweier gleichartigen Größen durch ein Zahlenverhältniß dargestellt werden kann, welches *rational* oder *irrational* ist, jenachdem A und B commensurabel oder incommensurabel sind. Im ersten Falle sey $e =$ dem rationalen Bruche $\frac{b}{a}$. Da $B = Ae = A.\frac{b}{a}$ und $b = a.\frac{b}{a}$ ist; so entsteht B eben so aus A, wie b aus a. Also ist $A:B = a:b$, und jedes Verhältniß commensurabeler Größen kann folglich immer durch das Verhältniß zweier rationalen ganzen Zahlen dargestellt werden. Im Falle der Incommensurabilität kann dies nur annähernd geschehen, wenn man für den Exponenten die successiven Näherungswerthe des obigen Kettenbruchs setzt. Da die Näherungswerthe bekanntlich abwechselnd größer und kleiner als der Werth des ganzen Kettenbruchs sind; so wird mit Hülfe derselben der Zahlenwerth des Exponenten auch leicht zwischen immer engere Gränzen eingeschlossen.

Gleichheit der Verhältnisse.

8. Arithmetische Verhältnisse sind einander *gleich*, wenn ihre Differenzen einander gleich sind, und zwey gleiche arithmetische Verhältnisse bilden eine *arithmetische Proportion*, deren allgemeiner Ausdruck also

$$A - B = A' - B'$$

ist, woraus sich sogleich ergiebt;

$$A + B = A + B,$$

Digitized by Google

d. h. in jeder arithmetischen Proportion sind die Summen des ersten und letzten und zweiten und dritten Gliedes einander gleich. Ist $B = A'$; so heißt die Proportion eine stetige, deren allgemeine Form also

$$A - B = B - C$$

ist. B heißt die mittlere arithmetische Proportionalzahl, das arithmetische Mittel, zwischen A und C, und es erhellet leicht, daß $B = \frac{1}{2}(A + C)$. Diese Proportionen sind fast von gar keinem Gebrauche in der Mathematik, weshalb diese wenigen Bemerkungen hinreichen mögen.

9. Geometrische Verhältnisse sind einander gleich, wenn ihre Exponenten einander gleich sind, weil dann offenbar in beiden Verhältnissen das zweite Glied auf einerley Art aus dem ersten entsteht, und zwei gleiche geometrische Verhältnisse bilden eine geometrische Proportion (proportio, ἀναλογία). Diese bey den Neuern gewöhnliche Erklärung hat Euclid in Beziehung auf ganze Zahlen VII. Erkl. 20. Bey Größen überhaupt mußte dem griechischen Geometer die Incommensurabilität Schwierigkeit machen. Er giebt daher V. Erkl. 6. folgende Definition gleicher Verhältnisse: Größen sind in einerley Verhältniß, die erste zur zweiten und die dritte zur vierten, wenn bei Vergleichung willkührlicher Gleichvielfacher der ersten und dritten, und willkührlicher Gleichvielfacher der zweiten und vierten, allemal, wenn das Vielfache der ersten größer, kleiner oder eben so groß ist, als das Vielfache der zweiten, auch das Vielfache der dritten größer, kleiner oder eben so groß ist als das Vielfache der vierten.

Die allgemeine Form einer geometrischen Proportion ist also

$$A : B = C : D,$$

oder nach einer andern Bezeichnung:

$$A : B :: C : D.$$

Nach der ersten Erklärung ist $B = Ae$, $D = Ce$, nach der andern dagegen gleichzeitig für jedes positive ganze n

Digitized by Google

und m, nA $\gtrless$ mB und nC $\gtrless$ mD, wo das Zeichen $\gtrless$ größer, gleich oder kleiner bedeutet.

10. Bey keiner der beiden Erklärungen brauchen A, B, C, D alle vier gleichartige Größen zu seyn, sondern nur A, B und C, D. Bey den arithmetischen Proportionen ist dies natürlich anders. Jetzt werden wir nun hauptsächlich zeigen, daß jede der beiden Erklärungen eine unmittelbare Folge aus der andern ist.

11. Sey daher zunächst

$$A:B = C:D$$

nach der ersten Erklärung, und folglich $B = Ae$, $D = Ce$. Ist nun $nA \gtrless mB$; so ist $nA \gtrless m.Ae$, $nA \gtrless meA$, $n \gtrless me$, $nC \gtrless meC$, $nC \gtrless m.Ce$, $nC \gtrless mD$; folglich auch

$$A:B = C:D$$

nach der zweiten Erklärung.

Ist dagegen

$$A:B = C:D$$

nach der zweiten Erklärung; so ist gleichzeitig $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$. Sey nun $B = Ae$, $D = Ce'$ (5.); so ist $nA \gtrless m.Ae$, $nC \gtrless m.Ce'$; $nA \gtrless meA$, $nC \gtrless me'C$; $n \gtrless me$, $n \gtrless me'$. Gäbe es nun zwei Werthe von n, m, für welche $n = me$ wäre; so wäre auch $n = me'$, also $e = \frac{n}{m} = e'$. Gäbe es aber nicht zwei solche Werthe; so sey zuerst $e' = e + \varepsilon$. Nimmt man nun die ganze Zahl m so an, daß $m\varepsilon > 1$, welches immer möglich, da man bloß $m > \frac{1}{\varepsilon}$ zu nehmen braucht; so erhellet leicht, daß man die ganze Zahl n immer so annehmen kann, daß sie zwischen me und $me + m\varepsilon$ fällt, oder daß $n > me$, $n < me + m\varepsilon$ ist, d. h. $n > me$, $n < m(e + \varepsilon)$; $n > me$, $n < me'$. Nach dem Obigen ist aber immer gleichzeitig $n > me$, $n > me'$, welches sich einander widerspricht, so daß also nicht $e' = e + \varepsilon$, oder $e' > e$ seyn kann. Wäre ferner $e' = e - \varepsilon$; so nehme man m wieder so an, daß $m\varepsilon > 1$ ist. Dann wird man n immer so annehmen können, daß es $> me - m\varepsilon$, $< me$, d. h.

Digitized by Google

$> m(e-e)$, $< me$; $> me'$, $< me$ ist, da doch immer zugleich $n < me$, $n < me'$ seyn muß. Demnach kann auch e' nicht $< e$ seyn, so daß also $e' = e$ ist, und A, B, C, D auch nach der ersten Erklärung proportional sind. Auf eine andere Art ist die Verbindung zwischen der neuern und euclidischen Theorie der Proportionen hergestellt in Gartz Allgemeine Größenlehre. Halle. 1820. S. 61., in welchem Werkchen überhaupt die Lehre von den Verhältnissen sehr deutlich und streng auf ganz elementarem Wege vorgetragen ist. An diesem Orte hielt ich die Anwendung der Kettenbrüche für passend. M. s. auch zwey Aufsätze von Pfleiderer in Hindenburgs Archiv. II. S. 257. 440.; und Expositio et dilucidatio lib. V. Elem. Eucl. Auct. Pfleiderer Tub. 1782. Die Anwendung der euclidischen Definition wird man am besten aus den Elementen. VI. selbst kennen lernen, der Vortrag ist strenger als in allen neuern geometrischen Werken. Die Schwierigkeit der Incommensurabilität wird ganz vermieden.

12. Die vier Größen, welche eine Proportion bilden, heißen ihre Glieder: das erste, zweite, dritte und vierte. Das erste und dritte heißen Vorderglieder, das zweite und vierte Hinterglieder, jene sowohl, als auch diese ähnlich liegende oder homologe Glieder, das erste und vierte äußere, das zweite und dritte mittlere Glieder. Sind die mittleren Glieder gleich; so heißt die Proportion stetig, sonst discret oder abgesondert. Stetige Proportionen bezeichnet man statt durch $A:B = B:C$, auch so: $\div\div A.B.C$. Das vierte Glied einer jeden Proportion heißt die vierte Proportionalgröße zu den drei ersten, das mittlere Glied einer stetigen die mittlere Proportionalgröße zwischen den beiden äußern, und das vierte Glied einer solchen Proportion die dritte Proportionalgröße zu den beiden ersten.

13. Verhältnisse wie

$$A:B,\ B:C,\ C:D,\ \text{u. s. f.}$$

heißen aneinanderhangend, welches man, wenn

Digitized by Google

$$A:B = A':B',$$
$$B:C = B':C',$$
$$C:D = C':D',$$
u. s. f.

ist, auch so bezeichnet:

$$A:B:C:D:\ldots = A':B':C':D':\ldots.$$

In diesem Falle sagt man auch, A, B, C, D, ... seyen mit A′, B′, C′, D′, ... in geordneter Proportion (Ordinata proportio). Bei Proportionen von folgender Form:

$$A:B = D':E',$$
$$B:C = C':D',$$
$$C:D = B':C',$$
$$D:E = A':B',$$

und eben so bei mehrern Verhältnissen, sagt man, diese Größen seyen in zerstreuter Proportion (Perturbata proportio).

Wenn mehrere Größen A, B, C, D mit eben so vielen A′, B′, C′, D′ in geordneter oder zerstreuter Proportion sind, und es ist $A:D = A':D'$, d. h. es verhält sich die erste von jenen zur letzten von jenen, wie die erste von diesen zur letzten von diesen; so sagt man, die Größen A, D, A′, D′ seyen aus dem Gleichen proportional (ex aequalitate, ex aequo).

14. Gegebene Verhältnisse A:B, C:D, E:F, G:H zusammensetzen heißt ein Verhältniß A′:B′ finden, für welches, wenn α, α', α'', α''' gewisse Größen bezeichnen,

$$A:B = A':\alpha$$
$$C:D = \alpha:\alpha'$$
$$E:F = \alpha':\alpha''$$
$$G:H = \alpha'':B'$$

ist, und A′:B′ heißt das aus den gegebenen Verhältnissen zusammengesetzte (composita), welches man auch so bezeichnet:

$$A':B' = (A:B) + (C:D) + (E:F) + (G:H)$$

Werden n gleiche Verhältnisse zusammengesetzt; so heißt das zusammengesetzte Verhältniß das nfache von einem

Digitized by Google

der gegebenen Verhältnisse, welches man auch durch $A' : B' = n\,(A:B)$ bezeichnet, und ratio multiplicata, duplicata, triplicata nennt. Das Doppelte und Dreifache eines Verhältnisses heißt auch quadratisches und cubisches Verhältniß, weil, wenn $a:b$ ein Verhältniß in Zahlen ist, sein Doppeltes $= a^2:b^2$, und Dreifaches $= a^3:b^3$ ist, wie wir unten sehen werden.

15. Der Zusammensetzung der Verhältnisse ist die Theilung derselben entgegengesetzt. Ein Verhältniß theilen heißt es in mehrere Verhältnisse zerlegen, durch deren Zusammensetzung das gegebene Verhältniß erhalten wird. Jedes der gefundenen Verhältnisse heißt ein Theil des gegebenen; ein aliquoter Theil, wenn die gefundenen Verhältnisse unter einander alle gleich sind. Jedes Vielfache eines aliquoten Theils heißt ein aliquanter Theil. Die ganze oder gebrochene Zahl, welche ein Vielfaches, einen aliquoten oder aliquanten Theil eines Verhältnisses bestimmt, heiße der Coefficient desselben. Der zweite, dritte, überhaupt nte Theil eines Verhältnisses heißt in Bezug auf letzteres ratio subduplicata, subtriplicata, submultiplicata.

Ueber die harmonische und contraharmonische Proportion s. m. die entsprechendtn Artikel; von dem äußern und mittlern Verhältniß den Artikel Theilung (12.). Die im Folgenden der Kürze wegen oft nur in Zeichen ausgedrückten Sätze wird man sich leicht in Worte übersetzen. Wir werden uns vorzüglich an die Definition des Euclides halten.

16. Nach der Definition des Euclides läßt sich nicht übersehen, daß und wie zu jeden drei Größen A, B, C, wo die beiden ersten gleichartig sind, eine vierte Proportionalgröße gefunden werden kann, obgleich er auch die Möglichkeit dieser Aufgabe bey der allgemeinen Theorie im fünften Buche nicht voraussetzt, wofür er aber sich genöthigt sieht, mehrere Sätze über die ungleichen Verhältnisse in die Lehre von der Gleichheit der Verhältnisse mit aufzunehmen, welches, wie wir sehen werden, sonst nicht nöthig gewesen wäre. Für Linien löset Euclides die Aufgabe VI. 12.

Digitized by Google

besonders auf, und für Zahlen würde sich die Auflösung leicht aus VII. 19. (s. unten 39.) ergeben. Nach der neuern Theorie sucht man den Exponenten e des Verhältnisses A:B, der sich auch im Falle der Incommensurabilität durch einen unendlichen Kettenbruch darstellen läßt, und setzt $X = Ce$; so ist $A:B = C:X$ (9.), also X die gesuchte vierte Proportionale. Soll zwischen A, C die mittlere Proportionale gefunden werden; so suche man den Exponenten e des Verhältnisses A:C, und setze $X = A.\sqrt{e}$, weil dann $C = Ae = A.\sqrt{e}.\sqrt{e} = X.\sqrt{e}$, also $A:X = X:C$ ist, indem der Exponent beider Verhältnisse $= \sqrt{e}$. Für Linien löset Euclid diese Aufgabe VI. 13. auf allgemein bekannte Art auf. Soll X so bestimmt werden, daß $A:B = X:C$ ist; so suche man den Exponenten e des Verhältnisses A:B, und setze $X = \frac{1}{e}C$, weil dann $B = Ae$ und $C = Xe$ ist.

17. Wenn A, B, C, D gleichartige Größen sind, und $A = C$, $B = D$ ist; so ist $A:B = C:D$.

Da $nA = nC$, $mB = mD$ ist; so ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$, also $A:B = C:D$ (9.).

18. Wenn $A:C = B:C$ ist; so ist $A = B$.

Wäre $A > B$, $= B + \Delta$; so nehme man n so, daß $n\Delta > C$ ist, und bestimme m so, daß zunächst $mC > nB$, also $(m-1)C \leqq nB$ ist. Dann ist $mC - C + C < n(B + \Delta)$, $mC < nA$, da doch $mC > nB$, gegen die Voraussetzung (9.). Wäre $A < B$, $= B - \Delta$; so nehme man wieder $n\Delta > C$, und m so, daß $mC > nA$, $(m-1)C \leqq nA$ ist. Dann ist $mC - C + C < n(A + \Delta)$, $mC < nB$, da doch $mC > nA$, gegen die Voraussetzung. Also $A = B$.

19. Wenn $A:B = C:D$ ist; so ist auch $C:D = A:B$.

Wenn $nA \gtrless mB$ ist; so ist nach der Voraussetzung $nC \gtrless mD$, und folglich auch $nA \gtrless mB$, wenn $nC \gtrless mD$ ist; also $C:D = A:B$ (9.).

Digitized by Google

20. Wenn $A:B = C:D$, $A':B' = C:D$ ist; so ist auch $A:B = A':B'$.

Da (19.) auch $C:D = A':B'$ ist; so ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$ und $nC \gtrless mD$, $nA' \gtrless mB'$; also auch zugleich $nA \gtrless mB$, $nA' \gtrless mB'$, d. i. $A:B = A':B'$ (9.).

21. Ist also $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, $A':B' = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$, $A:B = A':B'$, so schließt man leicht, daß auch $\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$ ist.

22. Wenn $A:B = C:D$ ist; so ist auch $B:A = D:C$.

Nach der Voraussetzung ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$; also offenbar auch zugleich $mB \gtrless nA$, $mD \gtrless nC$, d. i. $B:A = D:C$ (9.).

Ist also $C:A = C:B$, so ist $A:C = B:C$; also $A = B$ (18.).

23. Für $A:B = C:D$ ist, wenn α, β ganze Zahlen bezeichnen:

$$\alpha A:\alpha B = \beta C:\beta D,$$
$$\alpha A:\beta B = \alpha C:\beta D,$$
$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\alpha} = \frac{C}{\beta}:\frac{D}{\beta},$$
$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}:\frac{D}{\beta}.$$

Nach der Voraussetzung ist zugleich $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$; also auch zugleich $\alpha nA \gtrless \alpha mB$, $\beta nC \gtrless \beta mD$ und $\frac{nA}{\alpha} \gtrless \frac{mB}{\alpha}$, $\frac{nC}{\beta} \gtrless \frac{mD}{\beta}$, oder $n.\alpha A \gtrless m.\alpha B$, $n.\beta C \gtrless m.\beta D$, und $n.\frac{A}{\alpha} \gtrless m.\frac{B}{\alpha}$, $n.\frac{C}{\beta} \gtrless m.\frac{D}{\beta}$, woraus unmittelbar sich die erste und dritte Proportion ergeben. Es ist aber auch zugleich, wenn $n\alpha$, $m\beta$ als einfache ganze Zahlen betrachtet werden, $n\alpha A \gtrless m\beta B$, $n\alpha C \gtrless m\beta D$, nach der Voraussetzung, und folglich $n.\alpha A \gtrless m.\beta B$, $n.\alpha C \gtrless m.\beta D$, woraus die zweite Proportion folgt. Endlich sey

$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}:X;$$

so ist nach der zweiten jetzt bewiesenen Proportion:

$$\alpha\left(\frac{A}{\alpha}\right):\beta\left(\frac{B}{\beta}\right) = \alpha\left(\frac{C}{\alpha}\right):\beta X,$$
$$A:B = C:\beta X.$$

Digitized by Google

Also $C:D = C:\beta X$ (20), $D = \beta X$ (22), $X = \frac{D}{\beta}$, und folglich

$$\frac{A}{\alpha}:\frac{B}{\beta} = \frac{C}{\alpha}:\frac{D}{\beta}.$$

24. In jeder Proportion $A:B = C:D$ ist für $A \gtrless B$ auch $C \gtrless D$.

Für jedes n, m ist $nA \gtrless mB$, $nC \gtrless mD$; also für $n = m = 1$ zugleich $A \gtrless B$, $C \gtrless D$.

25. Sind A, B, C, D gleichartige Größen, und $A:B = C:D$; so ist für $A \gtrless C$ auch $B \gtrless D$.

Für $A = C$ ist auch $B = D$ (22.). Wäre für $A > C$, $= C + \Delta$ aber $B \leqq D$; so nehme man $n\Delta > D$, und m so, daß $mD > nC$, $(m-1)D \leqq nC$ ist. Dann ist $mD - D + D < n(C + \Delta)$, $mD < nA$. Aber $mB \leqq mD$; also um so mehr $mB < nA$, und folglich zugleich $nA > mB$, $nC < mD$, gegen die Voraussetzung (9.). Für $A < C$ ist $C > A$. Aber $C:D = A:B$ (19.). Also nach dem oben Bewiesenen $D > B$ oder $B < D$. Folglich zugleich $A \gtrless C$, $B \gtrless D$.

26. Sind A, B, C, D gleichartig, und $A:B = C:D$; so ist auch $A:C = B:D$.

Wegen der Voraussetzung ist $nA:nB = mC:mD$ (23.). Also zugleich $nA \gtrless mC$, $nB \gtrless mD$ (25.). Folglich $A:C = B:D$ (9.).

27. Mit den vier Gliedern jeder Proportion gleichartiger Größen kann man folgende acht Veränderungen vornehmen:

1) $A:B = C:D$
2) $A:C = B:D$ (permutando s. vicissim.)
3) $B:A = D:C$ (invertendo.)
4) $B:D = A:C$
5) $C:A = D:B$
6) $C:D = A:B$
7) $D:B = C:A$
8) $D:C = B:A$

2) folgt aus 1) nach (26.); 3) aus 1) nach (22); 4) aus

Digitized by Google

3) nach (26.); 5) aus 2) nach (22.); 6) aus 5) nach (26.); 7) aus 4) nach (22.); 8) aus 7) nach (26.).

28. Ist $A:B = C:D$; so ist

$A + B:B = C + D:D$, (componendo);

$A + C:B + D = A:B = C:D$, (antecedentes et consequentes summando);

$A - B:B = C - D:D$, (dividendo);

$A - C:B - D = A:B = C:D$, (antecedentes et consequentes differentiando);

$A:A \pm B = C:C \pm D$, (convertendo).

Im zweiten und vierten Falle müssen, wie sich von selbst versteht, alle vier Glieder gleichartig seyn.

Für beliebige n, m sey $n(A+B) \gtreqless mB$, $nA+nB \gtreqless mB$; so ist $mB > nB$, $m > n$. Also $nA:(m-n)B = nC:(m-n)D$ (23.), und folglich zugleich $nA \gtrless mB-nB$, $nC \gtrless mD-nD$ (9.), $n(A+B) \gtrless mB$, $n(C+D) \gtrless mD$. Da nun nach der Annahme $n(A+B) \gtreqless mB$ ist; so ist auch $n(C+D) \gtreqless mD$. Für $n(A+B) > mB$ ist auch $n(C+D) > mD$. Denn es ist $C:D = A:B$ (19.), und folglich, nach dem so eben Bewiesenen, wenn $n(C+D) \gtreqless mD$ wäre, auch $n(A+B) \gtreqless mB$, da doch $n(A+B) > mB$. Also ist zugleich $n(A+B) \gtrless mB$; $n(C+D) \gtrless mD$, woraus unmittelbar die erste Proportion folgt.

Nach (26.) ist $A:C = B:D$. Also nach dem so eben Bewiesenen $A + C:C = B + D:D$, und folglich (permutando) $A + C:B + D = C:D$. Aber nach der Voraussetzung $A:B = C:D$. Also $A + C:B + D = A:B$ (20.) $= C:D$.

Sey ferner $A - B:B = X:D$; so ist nach der ersten Proportion: $A:B = X + D:D$, oder $B:A = D:X + D$ (22). Nach der Voraussetzung aber $B:A = D:C$ (22.). Also $D:X + D = D:C$ (20.). Also $X + D = C$ (22.), $X = C - D$, $A - B:B = C - D:D$.

Da nun nach der Voraussetzung $A:C = B:D$ (26.); so ist nach dem so eben Bewiesenen: $A - C:C = B - D:D$, $A - C:B - D = C:D$ (26.). Aber $A:B$

Digitized by Google

$= C:D$ (Vorsſ.). Alſo $A-C:B-D = A:B$ (20.) $= C:D$.

Ferner ſey $A:A-B = C:X$; ſo iſt nach der dritten hier bewieſenen Proportion: $B:A-B = C-X:X$, $A-B:B = X:C-X$ (22.). Aber $A-B:B = C-D:D$. Alſo $X:C-X = C-D:D$ (20.). Folglich nach der erſten hier bewieſenen Proportion: $C:C-X = C:D$. Alſo $C-X = D$ (22.), $X = C-D$, $A:A-B = C:C-D$.

Da $A:B = C:D$ (Vorsſ.), $B:A = D:C$ (22.) iſt; ſo iſt nach der erſten hier bewieſenen Proportion: $A+B:A = C+D:C$. Alſo $A:A+B = C:C+D$ (22.).

29. Iſt $A:B = A':B' = A'':B'' = A''':B'''\ldots$, und alle Größen gleichartig; ſo folgt durch mehrmalige Anwendung der zweiten vorher bewieſenen Proportion leicht, daß $A+A'+A''+A'''+\ldots:B+B'+B''+B'''+\ldots = A:B$.

30. Für

$$A:B = A':B',$$
$$B:C = B':C',$$

iſt immer

$$A:C = A':C'.$$

Wäre dies nicht; ſo ſey zuerſt $A:C = A':C'+\Delta$. Nun nehme man, welches offenbar immer möglich iſt, m, m', n ſo, daß $m\Delta > A'+B'$, $m'B' > mC'$, $(m'-1)B' \leqq mC'$, $nA' > m'B'$, $(n-1)A' \leqq m'B'$ iſt; ſo iſt auch $m'B' \leqq mC'+B'$, $nA' \leqq m'B'+A'$, d. i. $nA' \leqq mC'+B'+A'$, $nA' < mC'+m\Delta$, $nA' < m(C'+\Delta)$. Da aber $m'B' > mC'$, $nA' > m'B'$ iſt; ſo iſt nach der Vorausſetzung auch $m'B > mC$, $nA > m'B$ (9.), und folglich $nA > mC$. Alſo zugleich $nA > mC$, $nA' < m(C'+\Delta)$, welches wegen $A:C = A':C'+\Delta$ nicht ſeyn könnte (9.). Sey nun $A:C = A':C'-\Delta$; ſo muß $A':C' = A:C+\Delta'$ ſeyn, ſo daß nämlich C wächſt. Nimmt man nämlich, welches offenbar immer möglich iſt, m und n ſo, daß $m\Delta > A'$, $nA' \leqq mC'$, $(n+1)A' > mC'$; ſo

Digitized by Google

ist $nA' + A' - A' > nC' - m\Delta$, $nA' > m(C' - \Delta)$. Also wegen obiger Proportion $nA > mC$ (9.). Wäre nun $A' : C' = A : C - \Delta'$; so wäre wegen $nA' \gtreqless mC'$ auch $nA \gtreqless m(C - \Delta')$. Aber $nA > mC$ und $nA \lesseqgtr m(C - \Delta')$ widerspricht sich. Folglich ist $A' : C' = A : C + \Delta'$, wenn $A : C = A' : C' - \Delta$ ist. Da aber $A' : B' = A : B$, $B' : C' = B : C$ (Voraussf.); so kann nach dem zuerst Bewiesenen nicht $A' : C' = A : C + \Delta'$, also auch nicht $A : C = A' : C' - \Delta$ seyn. Folglich ist weder $A : C = A' : C' + \Delta$, noch $A : C = A' : C' - \Delta$. Also $A : C = A' : C'$.

31. Aus

$$A : B = A' : B'$$
$$B : C = B' : C'$$
$$\cdots\cdots$$
$$M : N = M' : N'$$
$$N : P = N' : P'$$

folgt mittelst mehrmaliger Anwendung von (30.) leicht $A : P = A' : P'$.

32. Wenn

$$A : B = B' : C',$$
$$B : C = A' : B'$$

ist; so ist

$$A : C = A' : C'.$$

Sey wie vorher zuerst $A : C = A' : C' + \Delta$, und man nehme m, m', n so, daß $m\Delta > A' + B'$, $m'B' > mC'$, $(m' - 1)B' \gtreqless mC'$, $nA' > m'B'$, $(n - 1)A' \gtreqless m'B'$; so zeigt man wie in (30.), daß $nA' < m(C' + \Delta)$. Wegen der Voraussetzung ist aber auch $m'A > mB$, $nB > m'C$. Also auch $m'nA > mnB$, $mnB > mm'C$, und folglich um so mehr $m'nA > mm'C$, $nA > mC$. Also zugleich $nA > mC$, $nA' < m(C' + \Delta)$, welches wegen der angenommenen Proportion ungereimt ist (9.). Wäre $A : C = A' : C' - \Delta$; so könnte man wie in (30.) zeigen, daß $A' : C' = A : C + \Delta'$, eine Proportion, deren Ungereimtheit ganz wie in (30.) nachgewiesen wird. Folglich ist weder $A : C = A' : C' + \Delta$, noch $A : C = A' : C' - \Delta$; also $A : C = A' : C'$.

Digitized by Google

33. Aus

$$A:B = N':P'$$
$$B:C = M':N'$$
$$\cdots\cdots$$
$$M:N = B':C'$$
$$N:P = A':B'$$

folgt mittelst mehrmaliger Anwendung von (32.) leicht: $A:P = A':P'$.

34. Ist nun

$$A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$$
$$A':B' = \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$$
$$A'':B'' = \mathfrak{A}'':\mathfrak{B}''$$

u. s. f.

so ist auch $(A:B) + (A':B') + (A'':B'') + \ldots = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'') + \ldots$. (14.).

Sey $M:N = (A:B) + (A':B') + (A'':B') + \ldots$, $\mathfrak{M}:\mathfrak{N} = (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') + (\mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'') + \ldots$; so ist (14.):

$$A:B = M:\alpha \;;\; \mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{M}:\beta$$
$$A':B' = \alpha:\alpha' \;;\; \mathfrak{A}':\mathfrak{B}' = \beta:\beta'$$
$$A'':B'' = \alpha':\alpha'' \;;\; \mathfrak{A}'':\mathfrak{B}'' = \beta':\beta''$$
$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$
$$A^{(n)}:B^{(n)} = \alpha^{(n-1)}:\alpha^{(n)} \;;\; \mathfrak{A}^{(n)}:\mathfrak{B}^{(n)} = \beta^{(n-1)}:\beta^{(n)}$$
$$A^{(n+1)}:B^{(n+1)} = \alpha^{(n)}:N \;;\; \mathfrak{A}^{(n+1)}:\mathfrak{B}^{(n+1)} = \beta^{(n)}:\mathfrak{N}.$$

Folglich nach der Voraussetzung:

$$M:\alpha = \mathfrak{M}:\beta$$
$$\alpha:\alpha' = \beta:\beta'$$
$$\alpha':\alpha'' = \beta':\beta''$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha^{(n-1)}:\alpha^{(n)} = \beta^{(n-1)}:\beta^{(n)}$$
$$\alpha^{(n)}:N = \beta^{(n)}:\mathfrak{N}$$

woraus $M:N = \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$ (31.).

35. Da man alle Verhältnisse im vorigen Satze als gleich annehmen kann; so folgt aus demselben unmittelbar, daß für $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, auch $n(A:B) = n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ ist, für jedes ganze n.

36. Ist

Digitized by Google

$$A : B = \mathfrak{A} : \mathfrak{B}$$
$$B : C = \mathfrak{B} : \mathfrak{C}$$
$$C : D = \mathfrak{C} : \mathfrak{D}$$
$$D : E = \mathfrak{D} : \mathfrak{E}$$
u. s. f.

so verhält sich $A + B + C + D + \ldots$ zu irgend einem Gliede auf der linken Seite des Gleichheitszeichens, wie $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} + \ldots$ zu dem gleichstelligen Gliede auf der rechten Seite. Denn es ist

$$A + B : B = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} : \mathfrak{B} \quad (28.)$$
$$B : C = \mathfrak{B} : \mathfrak{C} \quad (\text{Vorausſ.})$$
$$A + B : C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} : \mathfrak{C} \quad (30.)$$
$$A + B + C : C = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{C} \quad (28.)$$
$$C : D = \mathfrak{C} : \mathfrak{D} \quad (\text{Vorausſ.})$$
$$A + B + C : D = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{D} \quad (30.)$$
u. s. f. u. s. f.
$$D : A = \mathfrak{D} : \mathfrak{A} \quad (30.\ 22.)$$
$$A + B + C : A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} : \mathfrak{A} \quad (30.)$$

und so auf ähnliche Art für jede zwei andere Glieder.

Zahlenproportionen.

37. In jeder Zahlenproportion sind die Producte der äußern und mittlern Glieder einander gleich.

Ist nämlich $a : b = c : d$, $b = ae$, $d = ce$ (9.); so ist auch $bce = ade$, $bc = ad$.

38. Aus zwei gleichen Producten läßt sich immer eine Proportion bilden, so daß man die Factoren des einen zu mittlern, die des andern zu äußern Gliedern macht.

Aus $pq' = p'q$ folgt z. B. $p : p' = q : q'$. Denn sei $p' = pe$, $q' = qe'$; so ist $pq'e = p'qe'$. Also $e = e'$, da $pq' = p'q$.

39. Aus $a : b = c : x$, $a : y = y : b$ folgt leicht $x = \frac{bc}{a}$, $y = \sqrt{ab}$, die bekannten Formeln für die vierte und mittlere Proportionalzahl.

Das arithmetische Mittel $\frac{1}{2}(a + b) = m$ (8) zwischen a und b ist immer größer als das geometrische $\sqrt{ab} = m'$.

Digitized by Google

Man erhält nämlich leicht $m^2 - m'^2 = \frac{1}{4}(a-b)^2$, woraus erhellet, daß $m^2 - m'^2$ immer eine positive Größe, also $m > m'$ ist. Auch ist

$$m - m' = \frac{(a-b)^2}{4(m+m')},$$

so daß also $m - m'$ desto kleiner ist, je weniger a und b von einander verschieden, und je größer diese Zahlen an sich sind, da m, m' mit a, b wachsen.

40. Für $a:b = c:d$ ist für jedes ganze oder gebrochene n, $a^n:b^n = c^n:d^n$. Denn $b = ae$, $d = ce$, $b^n = a^n.e^n$, $d^n = c^n.e^n$.

41. Aus

$$\begin{aligned} a : b &= c : d; \\ a' : b' &= c' : d', \\ a'' : b'' &= c'' : d'', \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

folgt leicht:

$$aa'a'' \ldots : bb'b'' \ldots = cc'c'' \ldots : dd'd'' \ldots$$

da $b = ae$, $d = ce$; $b' = a'e'$, $d' = c'e'$; $b'' = a''e''$, $d'' = c''e''$; u. s. f.; also $bb'b'' \ldots = aa'a'' \ldots \times ee'e'' \ldots$, $dd'd'' \ldots = cc'c'' \ldots \times ee'e'' \ldots$ ist. Dies nennt man Zusammensetzung der Proportionen, unterschieden von Zusammensetzung der Verhältnisse (14.).

Aus

$$\begin{aligned} a : b &= \alpha : \beta \\ a' : b' &= \beta : \gamma \\ a'' : b'' &= \gamma : \delta \\ a''' : b''' &= \delta : \varepsilon \end{aligned}$$

folgt nach dem Obigen:

$$aa'a''a''' : bb'b''b''' = \alpha\beta\gamma\delta : \beta\gamma\delta\varepsilon,$$

woraus nach (23.)

$$aa'a''a''' : bb'b''b''' = \alpha : \varepsilon.$$

42. Sollen die Verhältnisse a:b, c:d, e:f, g:h in eins zusammengesetzt werden; so suche man successive die vierten Proportionalzahlen x, y, z, β für die willkührlich angenommene Zahl α aus den Proportionen:

$$\begin{aligned} a : b &= \alpha : x \\ c : d &= x : y \\ e : f &= y : z \\ g : h &= z : \beta; \end{aligned}$$

Digitized by Google

dann ist (14.):

$$(a:b)+(c:d)+(e:f)+(g:h)=\alpha:\beta.$$

Aber

$$aceg:bdfh=\alpha:\beta \quad (41.).$$

Also aceg:bdfh das gesuchte zusammengesetzte Verhältniß.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, daß $n(a:b)=a^n:b^n$, und folglich $\frac{1}{n}(a:b)=\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b}$, weil $n(\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b})=(\sqrt[n]{a})^n:(\sqrt[n]{b})^n=a:b$ ist. Endlich ist auch $\frac{m}{n}(a:b)=m.\frac{1}{n}(a:b)=m(\sqrt[n]{a}:\sqrt[n]{b})=(\sqrt[n]{a})^m:(\sqrt[n]{b})^m=a^{\frac{m}{n}}:b^{\frac{m}{n}}$.

43. Gegebene Verhältnisse, die nicht an einander hangen, können leicht an einander hangend gemacht werden, wenn man die Glieder eines jeden mit dem Producte der Hinterglieder aller vorhergehenden und dem Producte der Vorderglieder aller folgenden multiplicirt. Z. B. für vier Verhältnisse a:b, c:d, e:f, g:h erhält man: aceg:bceg, bceg:bdeg, bdeg:bdfg, bdfg:hbdf.

44. Soll eine Größe A in mehrere Theile X, Y, Z, ... zerlegt werden, welche sich wie gewisse Zahlen a, b, c, ... verhalten; so hat man nach der Bedingung folgende Proportionen:

$$\begin{aligned} a:b &= X:Y \\ b:c &= Y:Z \\ c:d &= Z:V \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Folglich nach (36.), da $X+Y+Z+\ldots=A$:

$$\begin{aligned} a+b+c+\ldots:b &= A:Y, \\ a+b+c+\ldots:c &= A:Z, \\ a+b+c+\ldots:d &= A:V, \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}$$

woraus leicht folgt:

$$Y=\frac{bA}{a+b+c+\ldots}, \quad Z=\frac{cA}{a+b+c+\ldots}, \quad V=\frac{dA}{a+b+c+\ldots},$$

u. s. f. u. s. f.

und mittelst der ersten Proportion:

$$X=\frac{aA}{a+b+c+\ldots}.$$

Digitized by Google

45. Die einfache und zusammengesetzte Regula de tri, letztere von den Rechenmeistern nach der Anzahl der gegebenen Sätze auch Regula quinque, septem, u. s. f. genannt, sind leichte Anwendungen der vorhergehenden Theorie auf im gemeinen Leben vorkommende Größen, unter denen man zwischen Größen, die einander gerade oder verkehrt proportional sind, zu unterscheiden hat. Größen sind nämlich einander gerade proportional, wenn mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen auch ein Wachsen oder Abnehmen der andern verbunden ist; ist aber mit einem Wachsen oder Abnehmen der einen ein Abnehmen oder Wachsen der andern verbunden; so heißen sie verkehrt proportional. Waaren und Preise, Arbeiter und Zeit bei gleicher Arbeit, sind Beispiele beider Arten.

46. Die Methode der Rechnung wird aus folgenden Exempeln deutlich werden.

1) 2 Wisp. 12 Scheffel Waizen kosten 83 thlr. 18 gr. 4 pf. Was kosten 120 Wispeln?

Angabe: 2 W. 12 Sch. — 83 thlr. 18 gr. 4 pf.
Frage: 120 W. — x.

Die Größen sind gerade proportional. Also $x > 83$ thlr. 18 gr. 4 pf., so wie 120 W. > 2 W. 12 Sch. ist. Folglich

2 W. 12 Sch. : 120 W. = 83 thlr. 18 gr. 4 pf. : x
1 : 48 = 83 thlr. 18 gr. 4 pf. : x (23.)
$x = \frac{670 - 2 - 8}{4020 - 16 - -}$ (8 (39.) (6

2) Zur Bekleidung einer Wand sind 120 Ellen Tapeten nöthig, wenn sie 1 Elle breit sind. Wie viel Ellen braucht man, wenn sie $\frac{5}{4}$ breit sind?

Angabe: 1 Elle — 120 Ellen
Frage: $\frac{5}{4}$ — — x —.

Die Größen sind verkehrt proportional. $\frac{5}{4} > 1$, $x < 120$. Also ist die Proportion:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{5}{4} : 1 = 120 : x \\ 5 : 4 = 120 : x \\ 1 : 4 = 24 : x \end{array}\right\} (23.)$$

Also $x = 4 . 24$ (39.) $= 96$.

Digitized by Google

Die Rechenmeister unterscheiden zwischen gerader und verkehrter Regula de tri.

3) Für die zusammengesetzte Regula de tri habe man folgendes Exempel:

120 Arbeiter haben in 3 Tagen in einer Länge von 125 Fuß, 52 Fuß breit, 6 Fuß hoch Erde aufgedämmt. Wenn nun 460 Fuß in der Länge, 45 in der Breite, 4 Fuß hoch in einem Tage aufgedämmt werden sollen; wie viele Arbeiter würden nöthig seyn?

Man unterscheide Angabe und Frage:

125′ l. 52′ b. 6′ h. 3 T. 120 A.
460′ — 45′ — 4′ — 1 — x —

und führe Zwischengrößen t, u, v, z, u. s. f. ein, deren Bedeutung aus folgenden Ansätzen leicht erhellen wird:

125′ l. 52′ b. 6′ h. 3 T. 120 A.
460′ — 52′ — 6′ — 3 — t —
460′ — 45′ — 6′ — 3 — u —
460′ — 45′ — 4′ — 3 — v —
460′ — 45′ — 4′ — 1 — x —

Da in jeden zwei aufeinander folgenden Reihen nur zwei bekannte Größen ungleich sind; so hat man, jenachdem die Größen gerade oder verkehrt proportional sind, sogleich folgende Proportionen:

$$125 : 460 = 120 : t$$
$$52 : 45 = t : u$$
$$6 : 4 = u : v$$
$$1 : 3 = r : x$$

woraus (41.)

$$125.52.6.1 : 460.45.4.3 = 120 : x,$$
$$x = \frac{460.45.4.3.120}{125.52.6.1}.$$

Vor der Rechnung kann man im Zähler und Nenner dieses Bruchs, oder in den ersten und zweiten oder ersten und dritten Gliedern obiger Proportionen aufheben, was sich aufheben läßt. Der praktische Proportionsaufsatz sieht so aus:

$$\left.\begin{matrix} 125 : 460 \\ 52 : 45 \\ 6 : 4 \\ 1 : 3 \end{matrix}\right\} = 120 : x.$$

Digitized by Google

Die Rechnung wie vorher. Sie giebt $x = 764\frac{4}{13}$, d. h. 764 A. werden nicht ganz in 1 Tage fertig, 765 etwas früher.

Nach der Basedowischen Regel schreibt man die Angabe auf die linke, die Frage auf die rechte Seite eines Vertikalstrichs, wie folgt:

120 A.	x A.
125′ l.	460′ l.
52′ b.	45′ b.
6′ h.	4′ h.
3 T.	1 T.

Dies nennt man den unberichtigten Aufsatz. Er wird berichtigt, indem man alle Größen, die mit der gesuchten gerade proportional sind, versetzt:

120 A.	x A.
460′ l.	125′ l.
45′ b.	52′ b.
4′ h.	6′ h.
3 T.	1 T.

Die verkehrt proportionalen Größen bleiben stehen. Links und rechts des Strichs wird aufgehoben, was sich aufheben läßt, und etwa vorkommende Brüche durch Multiplication mit einerlei Zahl auf beiden Seiten weggeschafft. Das Product der Zahlen links durch das Product der Zahlen rechts dividirt giebt x. Die Gründe erhellen aus dem obigen Proportionsaufsatze.

Mit dieser Regel dem wesentlichen nach einerlei ist die bei den Rechenmeistern so berühmte, nach dem Holländer de Rees benannte Reesische Regel. Die Fragezahl x setze man oben auf die linke Seite eines Vertikalstrichs, und schreibe jeden Satz der Frage auf die linke oder rechte Seite, jenachdem er mit der Fragezahl verkehrt oder gerade proportional ist, wie folgt:

x A.	
	460′ l.
	45′ b.
	4′ h.
1 T.	

Digitized by Google

Die Sätze der Angabe werden sodann den gleichnamigen Sätzen der Frage gegenüber geschrieben:

x A.	120 A.
125′ l.	460′ l.
52′ b.	45′ b.
6′ h.	4′ h.
1 T.	3 T.

Aufgehoben wird wie vorher. Das Product aller Zahlen rechts durch das Product aller Zahlen links dividirt giebt x. M. s. Mönnichs Lehrb. d. Math. I. 1. Berlin. 1800. S. 206., vorzüglich aber W. L. Willigs gründliche Vorstellung der reesischen allgemeinen Regel. 2 Bände. Bremen u. Gött. 1759. 1760. und allgemeine Regel der Rechenkunst (a. d. Holl.) übersetzt von L. M. Kahle, in drei Ausgaben: 1739, 1743, 1751.

Die Gesellschaftsregel, Kettenregel oder Regel Multiplex, auch Conjointe, Alligationsregel u. s. f. gründen sich alle auf die Lehre von den Verhältnissen, und sind in den ihnen eigends gewidmeten Artikeln nachzusehen. S. auch Regel.

Ungleichheit der Verhältnisse.

47. Verhältnisse heißen ungleich, wenn ihre Exponenten ungleich sind, und zwar heißt das Verhältniß größer, welches den kleinern Exponenten hat, und umgekehrt. Ist nämlich $B = Ae$, $B' = A'e'$, und $e < e'$; so ist $A:B > A':B'$, weil in der That A im Verhältnisse zu B größer ist, als A′ zu B′. Nach Euclid (V. Erkl. 8.) heißt ein Verhältniß größer als ein anders, wenn in irgend einem Falle das nfache der ersten Größe größer ist als das mfache der zweiten, und das nfache der dritten nicht größer als das mfache der vierten. Das andere Verhältniß heißt dann kleiner. Aus diesen Erklärungen, verbunden mit (9.), ergiebt sich unmittelbar, daß ein Verhältniß, welches weder größer noch kleiner ist als ein anders, diesem Verhältnisse gleich seyn muß.

Digitized by Google

48. Jede dieser beiden Erklärungen ist eine Folge aus der andern.

Sei zuerst $A:B > A':B'$ nach der ersten Erklärung, so daß $e < e'$ für $B = Ae$, $B' = A'e'$. Man nehme, welches offenbar immer möglich ist, einen Bruch $\frac{n}{m}$, der $> e$, $\leqq e'$ ist; so ist $n > me$, $n \leqq me'$, $nA > meA$, $nA' \leqq me'A'$, $nA > m.Ae$, $nA' \leqq m.A'e'$, $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, also $A:B > A':B'$ nach der Erklärung des Euclides. Wäre $A:B < A':B'$, also $A':B' > A:B$; so würde man wie vorher schließen.

Ist dagegen $A:B > A':B'$ nach der Erklärung des Euclides; so gibt es zwei ganze Zahlen n, m, für welche $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, also, wenn $B = Ae$, $B' = A'e'$ (5.) ist: $nA > m.Ae$, $nA' \leqq m.A'e'$, $nA > meA$, $nA' \leqq me'A'$, $n > me$, $n \leqq me'$, $\frac{n}{m} > e$, $\frac{n}{m} \leqq e'$. Also $e < e'$, und folglich $A:B > A':B'$ nach der ersten Erklärung.

Wir folgen vorzüglich wieder der Definition des Euclides.

49. Ist ein Verhältniß $A:B$ größer als ein anderes $A':B'$; so kann es nicht auch zugleich kleiner seyn.

Für zwei ganze Zahlen n, m ist nämlich nach der Voraussetzung $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, und es ist zu beweisen, daß es nicht zwei Zahlen n', m' geben kann, für welche $n'A' > m'B'$, $n'A \leqq m'B$ ist. Könnte nämlich Beides zugleich statt finden; so wäre auch $nm'A > mm'B$, $n'mA \leqq mm'B$. Also $nm'A > n'mA$, $nm' > n'm$. Es wäre aber auch $nm'A' \leqq mm'B'$, $n'mA' > mm'B'$. Also $n'mA' > nm'A'$, $n'm > nm'$, welches dem Obigen widerspricht.

50. Wenn $A > B$ ist; so ist für jede dritte mit A und B gleichartige Größe C, $A:C > B:C$, und $C:A < C:B$.

Digitized by Google

Man setze $A - B = \Delta$ und nehme n so, daß $n\Delta > C$, d. i. $nA - nB > C$, $nA > nB + C$ ist. Nun nehme man m so, daß $mC > nB$, $(m-1)\,C \gtreqless nB$ ist; so ist $mC - C \gtreqless nB$, $mC \gtreqless nB + C$. Also $nA > mC$, $nB < mC$, und folglich $A:C > B:C$ (47.).

Ferner nehme man m so, daß $m\Delta > C$, $m(A-B) > C$, $mA > mB + C$, und n so, daß $nC > mB$, $(n-1)\,C \gtreqless mB$, also $nC \gtreqless mB + C$ ist; so ist um so mehr $nC < mA$. Also $nC > mB$, $nC < mA$, $C:B > C:A$ (47.), $C:A < C:B$.

51. Ist $A:C > B:C$; so ist $A > B$. Ist $C:A < C:B$; so ist $A > B$.

Wäre im ersten Falle $A \gtreqless B$; so wäre entweder $A:C = B:C$ (17.), oder $B:C > A:C$ (50.), Beides gegen die Voraussetzung. Wäre im andern Falle $A \gtreqless B$; so wäre entweder $C:A = C:B$ (17.), oder $C:B < C:A$ (50.), Beides gegen die Voraussetzung.

52. Wenn $A:B > A':B'$ ist; so ist $B:A < B':A'$.

Da $A:B > A':B'$ ist; so ist $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$ (47.). Für $nA > mB$, $nA' < mB'$ wäre $mB' > nA'$, $mB < nA$; also $B':A' > B:A$ (47.), oder $B:A < B':A'$. Wäre aber $nA > mB$, $nA' = mB'$; so nehme man n' so, daß, für $nA - mB = \Delta$, $n'\Delta > B$, $n'(nA - mB) > B$ ist. Nun ist nach der Annahme $nn'A > mn'B$, $nn'A' = mn'B'$, $mn'B' + B' > nn'A'$, $(mn'+1)\,B' > nn'A'$. Ferner $nn'A - mn'B > B$, $nn'A > (mn'+1)\,B$, so daß also $(mn'+1)\,B' > nn'A'$, $(mn'+1)\,B < nn'A$, und demnach $B':A' > B:A$ (47.), oder $B:A < B':A'$ ist.

53. Wenn $A:B = C:D$, $C:D > A':B'$ ist; so ist auch $A:B > A':B'$.

Da $C:D > A':B'$ ist; so ist $nC > mD$, $nA' \leqq mB'$ (47.). Da ferner $A:B = C:D$ ist; so ist zugleich $nC > mD$, $nA > mB$ (9.). Also auch $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, und folglich $A:B > A':B'$ (47.).

Digitized by Google

54. Wenn $A:B = C:D$, $A':B' > C:D$ ist; so ist auch $A':B' > A:B$.

Denn es ist $nA' > mB'$, $nC \gtrless mD$ (47.); $nA \lesseqgtr mB$, $nC \gtrless mD$ (9.). Also $nA' > mB'$, $nA \gtrless mB$, und folglich $A':B' > A:B$ (47.). Ist also $A:B = C:D$, $C:D < A':B'$; so ist auch $A:B < A':B'$.

55. Ist $A:B = C:D$, $A':B' = C':D'$, $A:B > A':B'$; so ist $C:D > A':B'$ (53.). Aber $C':D' = A':B'$. Also $C:D > C':D'$ (54.).

56. Wenn für vier gleichartige Größen $A:B > A':B'$ ist; so ist auch $A:A' > B:B'$.

Denn sey $A:B = A':\mathfrak{A}$ (16.); so ist $A':\mathfrak{A} > A':B'$ (53.). Also $A':B' < A':\mathfrak{A}$, $B' > \mathfrak{A}$ (51.). Folglich $B:B' < B:\mathfrak{A}$ (50.). Aber $A:A' = B:\mathfrak{A}$ (26.). Also $B:B' < A:A'$ (53.), oder $A:A' > B:B'$.

57. Wenn $A:B > A':B'$, $A':B' > A'':B''$ ist; so ist $A:B > A'':B''$.

Nach der Voraussetzung ist $nA > mB$, $nA' \gtrless mB'$ (47.). Wäre nun $nA'' > mB''$; so wäre $nA'' > mB''$, $nA' \gtrless mB'$, also $A'':B'' > A':B'$ (47.), da doch $A':B' > A'':B''$ seyn soll. Demnach ist $nA'' \gtrless mB''$, und folglich $nA > mB$, $nA'' \gtrless mB''$. Also $A:B > A'':B''$ (47.).

58. Ist daher $A:B < A':B'$, $A':B' < A'':B''$; so ist $A'':B'' > A':B'$, $A':B' > A:B$; also $A'':B'' > A:B$ (57.), oder $A:B < A'':B''$.

Also ist auch für $A > B$, $C < D$ immer $A:C > B:D$, wenn A, B, C, D gleichartig sind. Denn sey $C + \Delta = D$; so ist $A:C + \Delta > B:D$ und $A:C > A:C + \Delta$ (50.). Folglich um so mehr $A:C > B:D$ (57.). Eben so ist für $A < B$, $C > D$, immer $A:C < B:D$, da, wie so eben bewiesen, $B:D > A:C$, also $A:C < B:D$ ist.

59. Wenn $A:B > A':B'$ ist; so ist auch $\alpha A:\alpha B > \beta A':\beta B'$, $\alpha A:\beta B > \alpha A':\beta B'$.

Denn $A:B = \alpha A:\alpha B$ (23.), $A:B > A':B'$

Digitized by Google

(Vorausſ.); alſo $\alpha A : \alpha B > A' : B'$ (53.). Ferner iſt $A' : B' = \beta A' : \beta B'$ (23.). Alſo $\alpha A : \alpha B > \beta A' : \beta B'$ (54.). Auch iſt $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$ (47.). Alſo $n\alpha\beta A > m\alpha\beta B$, $n\alpha\beta A' \leqq m\alpha\beta B'$, d. i. $n\beta . \alpha A > m\alpha . \beta B$, $n\beta . \alpha A' \leqq m\alpha . \beta B'$. Folglich $\alpha A : \beta B > \alpha A' : \beta B'$ (47.).

60. Eben ſo iſt für $A : B > A' : B'$, auch $\frac{1}{\alpha} A : \frac{1}{\alpha} B > \frac{1}{\beta} A' : \frac{1}{\beta} B'$, $\frac{1}{\alpha} A : \frac{1}{\beta} B > \frac{1}{\alpha} A' : \frac{1}{\beta} B'$.

Denn im entgegengeſetzten Falle wäre, nach (59.) und (23.), $\alpha\left(\frac{1}{\alpha} A\right) : \alpha\left(\frac{1}{\alpha} B\right) \leqq \beta\left(\frac{1}{\beta} A'\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta} B'\right)$, $\alpha\left(\frac{1}{\alpha} A\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta} B\right) \leqq \alpha\left(\frac{1}{\alpha} A'\right) : \beta\left(\frac{1}{\beta} B'\right)$, d. i. $A : B \leqq A' : B'$, da doch $A : B > A' : B'$.

61. Wenn $A : B > A' : B'$, $B : C > B' : C'$ iſt; ſo iſt auch $A : C > A' : C'$.

Es iſt $nA > mB$, $nA' \leqq mB'$, und $n'B > m'C$, $n'B' \leqq m'C'$ (47.). Alſo $nn'A > mn'B$, $nn'A' \leqq mn'B'$; $mn'B > mm'C$, $mn'B' \leqq mm'C'$. Alſo offenbar auch $nn'A > mm'C$, $nn'A' \leqq mm'C'$, und folglich $A : C > A' : C'$ (47.).

Die Erweiterung dieſes Satzes auf mehrere Verhältniſſe hat keine Schwierigkeit.

62. Wenn $A : B > A' : C'$, $B : C > B' : A'$ iſt; ſo iſt $A : C > B' : C'$.

Es iſt $nA > mB$, $nA' \leqq mC'$; $n'B > m'C$, $n'B' \leqq m'A'$ (47.), $nn'A > mn'B$, $nm'A' \leqq mm'C'$; $mn'B > mm'C$, $nn'B' \leqq nm'A'$. Folglich augenſcheinlich $nn'A > mm'C$, $nn'B' \leqq mm'C'$. Alſo $A : C > B' : C'$.

Auch hier hat die Erweiterung auf mehrere Verhältniſſe keine Schwierigkeit.

63. Wenn $A : B = A' : B'$, $B : C > B' : C'$ iſt; ſo iſt auch $A : C > A' : C'$.

Sei $B : C = B' : C' - \Delta$, da $B' : C' + \Delta < B' : C$ (50.), $< B : C$ (58.) iſt; ſo iſt, weil $A : B = A' : B'$ iſt, $A : C = A' : C' - \Delta$ (30.). Aber $A' : C' - \Delta > A' : C'$ (50.). Alſo $A : C > A' : C'$ (53.).

Digitized by Google

64. Wenn $A:B = A':C'$, $B:C > B':A'$ ist; so ist $A:C > B':C'$.

Sei $B:C = B' + \Delta:A'$, da $B' - \Delta:A' < B':A'$ (50.), $< B:C$ (58.) ist; so ist $A:C = B' + \Delta:C'$ (32.), $> B':C'$ (50.).

65. Wenn $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, $A':B' > \mathfrak{A}':\mathfrak{B}'$ ist; so ist auch $(A:B) + (A':B') > (\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}')$.

Sei $(A:B) + (A':B') = M:N$, $(\mathfrak{A}:\mathfrak{B}) + (\mathfrak{A}':\mathfrak{B}') = \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$; so ist $A:B = M:\alpha$, $A':B' = \alpha:N$, und $\mathfrak{A}:\mathfrak{B} = \mathfrak{M}:\beta$, $\mathfrak{A}':\mathfrak{B}' = \beta:\mathfrak{N}$ (14.). Also $M:\alpha > \mathfrak{M}:\beta$, $\alpha:N > \beta:\mathfrak{N}$ (55.), $M:N > \mathfrak{M}:\mathfrak{N}$ (61.).

Die Erweiterung dieses Satzes auf mehrere Verhältnisse hat keine Schwierigkeit.

66. Nimmt man im vorigen Satze die Verhältnisse auf jeder der beiden Seiten des Zeichens $>$ alle als gleich an; so ergiebt sich augenblicklich, daß, für $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, immer $n(A:B) > n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, oder, was dasselbe ist, für $A:B < \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$, immer $n(A:B) < n(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ ist.

67. Ist folglich $A:B = \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$; so ist $\frac{1}{n}(A:B) = \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, weil, für $\frac{1}{n}(A:B) \gtrless \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, $n\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} \gtrless n\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$, d. i. $A:B \gtrless \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$ (15.) seyn würde. Demnach ist auch $m\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} = m\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$ (35.), d. i. $\frac{m}{n}(A:B) = \frac{m}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ (15.).

68. Ist ferner $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$; so ist auch $\frac{1}{n}(A:B) > \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, weil, für $\frac{1}{n}(A:B) \gtreqless \frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$, auch $n\left\{\frac{1}{n}(A:B)\right\} \gtreqless n\left\{\frac{1}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})\right\}$ (35. 66.), d. i. $A:B \gtreqless \mathfrak{A}:\mathfrak{B}$ seyn müßte. Also ist auch $\frac{m}{n}(A:B) > \frac{m}{n}(\mathfrak{A}:\mathfrak{B})$ (66.).

69. Wenn $A:B > A':B'$, $A' > B'$ ist; so ist auch $A > B$.

Es ist $nA > mB$, $nA' \gtreqless mB'$ (47.). Da nun

Digitized by Google

$A' > B'$ ist; so ist offenbar $n < m$. Wäre daher $A \gtrless B$; so wäre $nA \gtrless mB$, da doch $nA > mB$.

70. Wenn $A:B > A':B'$, $A < B$ ist; so ist auch $A' < B'$.

Es ist $nA > mB$, $nA' \gtrless mB'$; also $n > m$, weil $A < B$. Wäre nun $A' \gtrless B'$; so wäre $nA' > mB'$.

71. Wenn $A:B > A':B'$ ist; so ist $A + B : B > A' + B' : B'$, $A - B : B > A' - B' : B'$, $A - B : A > A' - B' : A'$.

Nach der Voraussf. ist $nA > mB$, $nA' \gtrless mB'$ (47.). Also $nA + nB > mB + nB$, $nA' + nB' \gtrless mB' + nB'$, d. i. $n(A + B) > (m + n)B$, $n(A' + B') \gtrless (m + n)B'$, woraus augenblicklich $A + B : B > A' + B' : B'$ folgt (47.). Bei den letzten beiden Paaren ungleicher Verhältnisse muß man natürlich voraussetzen, daß $A' > B'$, also auch $A > B$ (69.) ist. Folglich ist, wegen $nA' \gtrless mB'$, $n < m$. Also $nA - nB > mB - nB$, $nA' - nB' \gtrless mB' - nB'$, d. i. $n(A - B) > (m - n)B$, $n(A' - B') \gtrless (m - n)B$, woraus sogleich $A - B : B > A' - B' : B'$ (47.). Also (52.) $B:A - B < B':A' - B'$, $B':A' - B' > B:A - B'$, und folglich, nach dem ersten hier bewiesenen Satze, $B' + A' - B' : A' - B' > B + A - B : A - B$, $A' : A' - B' > A : A - B$, $A' - B' : A' < A - B : A$ (52.), $A - B : A > A' - B' : A'$.

72. Wenn $A:A' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $B:B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$; so ist auch $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$.

Sey zuerst $A:A' > B:B'$; so ist $A:B > A':B'$ (56.), $A + B : B > A' + B' : B'$ (71.), $A + B : A' + B' > B:B'$ (56.), $B:B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Voraussf.), $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (57.). Ist ferner $A:A' < B:B'$; so ist $B:B' > A:A'$, $B:A > B':A'$ (56.), $A + B : A > A' + B' : A'$ (71.), $A + B : A' + B' > A:A'$ (56.), $A:A' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Voraussf.), $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (57.). Ist endlich $A:A' = B:B'$; so ist $A:B = A':B'$ (26.), $A + B : B = A' + B' : B'$ (28.), $A + B : A' + B' = B:B'$ (26.), $B:B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Voraussf.), $A + B : A' + B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (53.).

Digitized by Google

73. Hieraus schließt man leicht, daß für $A:B > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $A':B' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $A'':B'' > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, u. s. f., immer $A + A' + A'' + \ldots : B + B' + B'' + \ldots > \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ ist.

74. Für $A:A' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$, $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ ist auch $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$.

Für $A:A' > B:B'$ ist $A':A < B':B$ (52.), $B':B > A':A$, $B':A' > B:A$ (56.), $B' + A':A' > B + A:A$ (71.), $B' + A':B + A > A':A$ (56.), $A + B:A' + B' < A:A'$ (52.), $A:A' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Voraussf.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (58.). Für $A:A' < B:B'$ ist $B:B' > A:A'$, $B:A > B':A'$ (56.), $A:B < A':B'$ (52.), $A':B' > A:B$, $A' + B':B' > A + B:B$ (71.), $A' + B':A + B > B':B$ (56.), $A + B:A' + B' < B:B'$ (52.), $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Voraussf.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (58.). Wäre endlich $A:A' = B:B'$; so wäre $A:B = A':B'$ (26.), $A + B:B = A' + B':B'$ (28.), $A + B:A' + B' = B:B'$ (26.), $B:B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (Voraussf.), $A + B:A' + B' < \mathfrak{A}:\mathfrak{A}'$ (54.).

Die Erweiterung auf mehrere Verhältnisse ist leicht.

75. Mehrere Sätze über ungleiche Verhältnisse s. m. bei Gartz a. a. O., vorzüglich aber in Propositionum de rationibus inter se diversis demonstrationes, ex solis lib. V. Elem. definitionibus et propositionibus deductae. Auct. Hauber. Tub. 1793.

Gränzen der Verhältnisse.

76. Wenn ein veränderliches Verhältniß immer {kleiner / größer} als ein gegebenes Verhältniß ist, aber so {vergrößert / verkleinert} werden kann, daß es {größer / kleiner} wird, als jedes gegebene Verhältniß, welches {kleiner / größer} ist, als das erste gegebene Verhältniß; so heißt dieses die Gränze im

Digitized by Google

{Wachsen / Abnehmen} des veränderlichen Verhältnisses. Ein veränderliches Verhältniß kann indeß auch bald größer, bald kleiner seyn, als ein gegebenes Verhältniß, kann aber demselben von beiden Seiten her willkührlich genähert werden. In diesem Falle mag das gegebene Verhältniß überhaupt die Gränze des veränderlichen heißen, und man sieht leicht, daß in diesem Falle eigentlich eine Gränze im Wachsen und im Abnehmen Statt findet; erstere für die Werthe des veränderlichen Verhältnisses, welche kleiner, letztere für die, welche größer sind, als das gegebene Verhältniß. Setzt man für Verhältniß nur überall Größe; so hat man die Erklärung der Gränzen veränderlicher Größen. Diese Erklärungen scheinen uns denen im Art. Gränze vorzuziehen zu seyn.

77. Wenn L die Gränze im {Wachsen / Abnehmen} von X ist; so ist das Verhältniß der Gleichheit die Gränze im {Abnehmen / Wachsen} des Verhältnisses L:X.

Sey zuerst L die Gränze in Wachsen von X; so ist immer $L > X$ (76.). Also $L:A > X:A$ (50.), $L:X > A:A$ (56.). Sey nun $L:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $> A:A$; so ist; wegen $A:A = L:L$, auch $L:L' > L:L$ (54.), und folglich $L' < L$ (51.). Nimmt man nun $X > L'$, welches möglich ist, da L die Gränze im Wachsen von X ist (76.); so ist $L:X < L:L'$ (50.), und man hat also immer $L:X > A:A$, $L:X < L:L'$, wo $L:L'$ jedes Verhältniß bedeutet, welches $> A:A$ ist. Also ist $A:A$ die Gränze im Abnehmen von $L:X$. Ist aber L die Gränze im Abnehmen von X; so ist immer $L < X$ (76.). Also $L:A < X:A$ (50.), $L:X < A:A$ (56.). Sey nun $L:L' < A:A$ oder $L:L' < L:L$ (54.); so ist $L' > L$ (51.). Man nehme nun $X < L'$, welches möglich ist, da L die Gränze im Abnehmen von X ist (76.); so ist $L:X > L:L'$ (50.). Also hat man immer $L:X < A:A$, $L:X > L:L'$,

Digitized by Google

Folglich ist A : A die Gränze im Wachsen von L : X (76.).

Wäre L überhaupt die Gränze von X, so daß sich also X von beiden Seiten her der L immer mehr und mehr nähert (76.); so wird der vorige Satz doch noch richtig seyn. Man kann sich nämlich alle Werthe der Veränderlichen X in zwei Klassen getheilt denken, von denen sich die einen von der einen, die andern von der andern Seite her der L immer mehr und mehr nähern. Daher wird sich auch das Verhältniß L : X dem Verhältnisse der Gleichheit nach (77.) immer mehr und mehr von beiden Seiten her nähern, und Letzteres folglich überhaupt die Gränze des ersteren seyn.

78. Daß, wenn L irgend eine Gränze von X ist, immer auch L : A die gleichartige Gränze von X : A seyn wird, erhellet von selbst ohne weitere Erläuterung.

79. Ist umgekehrt das Verhältniß der Gleichheit die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Abnehmen}\\\text{Wachsen}\end{matrix}\right\}$ von L : X; so ist L die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsen}\\\text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ von X.

Ist A : A die Gränze im Abnehmen von L : X, und L′ irgend eine Größe, welche $< L$ ist; so ist $L : L' > L : L$ (50.), $L : L' > A : A$ (54.). Nach der Voraussetzung aber $L : X > A : A$, $L : X < L : L'$ (76.). Also auch $L : X > L : L$ (54.), $L ; X < L : L'$. Folglich hat man $X < L$ (51.), $X > L'$ (51.), $L' < L$. Also L die Gränze im Wachsen von X. Ist dagegen A : A die Gränze im Wachsen von L : X, und L′ irgend eine Größe, welche $> L$ ist; so ist $L : L' < L : L$ (50.), $L : L' < A : A$ (54.). Aber nach der Voraussetzung $L : X < A : A$, $L : X > L : L'$ (76.), oder $L : X < L : L$ (54.), $L : X > L : L'$. Also hat man $X > L$ (51.), $X < L'$ (51.), $L' > L$. Folglich ist L die Gränze im Abnehmen von X.

Wäre das Verhältniß der Gleichheit überhaupt die Gränze von L : X; so nähert sich dieses Verhältniß von beiden Seiten her dem Verhältnisse der Gleichheit. Demnach wird sich nach dem so eben Bewiesenen auch X der

Digitized by Google

Größe L von beiden Seiten her beliebig nähern, und folglich L überhaupt die Gränze von X seyn.

80. Daß, wenn L:A irgend eine Gränze von X:A ist, immer auch L die gleichartige Gränze von X seyn muß, erhellet von selbst, ohne weitere Erläuterung.

81. Sind L, L′ gleichartige Gränzen von X, X′, und das Verhältniß X:X′ ist immer dem constanten Verhältniß A:A′ gleich; so ist auch L:L′ = A:A′.

Seyen zuerst L, L′ Gränzen im Wachsen von X:X′, und folglich immer L > X, L′ > X′ (76.). Sey nun a) L:L′ > A:A′; so ist L − Δ:L′ = A:A′, weil L + Δ:L′ > L:L′ (50.), > A:A′ (57.) ist. Nun nehme man, welches nach der Voraussetzung immer möglich, L − X < Δ (76.), d. i. L − Δ < X; so ist L − Δ:L′ < X:L′ (50.). Aber X:X′ = A:A′ (Vorauss.), = L − Δ:L′. Also auch X:X′ < X:L′ (54.), X′ > L′ (51.) da doch nach der Vorss. immer X′ < L′. b) Sey L:L′ < A:A′, also L:L′ − Δ = A:A′, da L:L′ + Δ < L:L′ (50.) < A:A′ (58.) ist. Nun nehme man, welches immer möglich ist, L′ − X′ < Δ (76.), d. i. L′ − Δ < X′ so ist L:L′ − Δ > L:X′ (50.). Also L:X′ < X:X′ (53.), da X:X′ = A:A′ (Vorauss.) = L:L′ − Δ ist. Folglich L < X (51.), da doch immer L > X (Vorauss.). Es ist also weder L:L′ > A:A′, noch L:L′ < A:A′. Folglich L:L′ = A:A′.

Sind L, L′ Gränzen im Abnehmen von X, X′; so ist immer L < X, L′ < X′ (76.). Sey nun wieder a) L:L′ > A:A′, also L:L′ + Δ = A:A′ = X:X′, da L:L′ − Δ > L:L′ (50.), > A:A′ (57.) ist. Man mache nun X′ − L′ < Δ (76.), X′ < L′ + Δ; so ist L:L′ + Δ < L:X′ (50.). Also auch X:X′ < L:X′ (54.), und folglich X < L (51.), da doch immer X > L (Vorauss.). Sey ferner b) L:L′ < A:A′, also L + Δ:L′ = A:A′ = X:X′, da L − Δ:L′ < L:L′ (50.), < A:A′ (58.) ist. Man mache nun X − L < Δ (Vorauss.), X < L + Δ; so ist L + Δ:L′ > X:L′ (50.). Also auch X:X′ > X:L′ (53.), und demnach X′ < L′ (51.), da doch immer X′ > L′ (Vor-

Digitized by Google

ausf.). Also ist auch für Gränzen im Abnehmen $L:L' = A:A'$.

Sind endlich L, L' überhaupt Gränzen von X, X'; so seyen φX, ψX und $\varphi' X'$, $\psi' X'$ die Werthe von X, X', welche respective immer kleiner und immer größer sind, als L, L'; so sind L, L' die Gränzen im Wachsen von φX, $\varphi' X'$. Da nun immer $X:X' = A:A'$ ist; so ist auch immer $\varphi X:\varphi' X' = A:A'$. Also nach dem Obigen $L:L' = A:A'$. Eben so kann man diese Proportion aus den Gränzen im Abnehmen schließen.

Dieser Satz ist für die Geometrie von großer Wichtigkeit. M. s. den Art. Exhaustions-Methode. Die Peripherie und der Flächenraum des Kreises sind die Gränzen im Wachsen der Peripherieen und Flächenräume der in den Kreis beschriebenen regulären Polygone. Die Peripherieen und Flächenräume zweier in zwei Kreise beschriebenen regulären Polygone verhalten sich aber wie die Halbmesser und wie die Quadrate der Halbmesser dieser Kreise. Also verhalten sich die Peripherieen und Flächenräume der Kreise eben so.

82. Sind L, L' gleichartige Gränzen von X, X', und es ist $X:A = X':A'$; so ist auch $L:A = L':A'$, wo X, X' nicht, wie vorher, gleichartige Größen zu seyn brauchen.

Seyen L, L' Gränzen im Wachsen; also $L > X$, $L' > X'$. Sey nun a) $L:A > L':A'$; so ist $L - \Delta:A = L':A'$, weil $L + \Delta:A > L:A$ (50.), $> L':A'$ (57.). Man mache $L - X < \Delta$, $L - \Delta < X$; so ist $L - \Delta:A < X:A$ (50.), $L':A' < X:A$ (54.). Aber $L' > X'$. Also $X':A' < L':A'$ (50.), und folglich $X':A' < X:A$ (58.), da doch immer $X':A' = X:A$ (Vorausf.). b) $L:A < L':A'$. Also $L:A = L' - \Delta:A'$, da $L':A' < L' + \Delta:A'$ (50.), also um so mehr $L:A < L' + \Delta:A'$ (58.) ist. Man mache $L' - X' < \Delta$, $L' - \Delta < X'$; so ist $L' - \Delta:A' < X':A'$ (50.), $L:A < X':A'$ (54.). Aber $L > X$. Also $X:A < L:A$ (50.). Folglich $X:A < X':A'$ (58), da doch $X:A = X':A'$. Es ist also $L:A = L':A'$.

Digitized by Google

Sind L, L' Gränzen im Abnehmen, also $L < X$, $L' < X'$; so sey wieder a) $L:A > L':A'$, $L:A = L' + \Delta:A'$, da $L':A' > L' - \Delta:A'$ (50.), also um so mehr $L:A > L' - \Delta:A'$ (57.) ist. Man mache $X' - L' < \Delta$, $X' < L' + \Delta$; so ist $L' + \Delta:A' > X':A'$ (50.), $L:A > X':A'$ (53.). Aber $L < X$. Also $X:A > L:A$ (50.). Also um so mehr $X:A > X':A'$ (57.), da doch immer $X:A = X':A'$. Ferner sey b) $L:A < L':A'$, also $L + \Delta:A = L':A'$, da $L - \Delta:A < L:A$ (50.), $< L':A'$ (58.) ist. Man nehme $X - L < \Delta$, $X < L + \Delta$; so ist $L + \Delta:A > X:A$ (50.), $L':A' > X:A$ (53.). Aber $L' < X'$, $X':A' > L':A'$ (50.), folglich um so mehr $X':A' > X:A$ (57.), da doch immer $X':A' = X:A$. Also ist $L:A = L':A'$.

Für Gränzen überhaupt beweiset man den Satz durch ein dem in (81.) gebrauchten ganz ähnliches Raisonnement.

83. Ist $L:L'$ die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Wachsen}\\\text{Abnehmen}\end{matrix}\right\}$ von $X:X'$; so ist $L':L$ die Gränze im $\left\{\begin{matrix}\text{Abnehmen}\\\text{Wachsen}\end{matrix}\right\}$ von $X':X$.

Ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$; so ist $L:L' > X:X'$. Also $L':L < X':X$ (52.). Sey nun $A:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$; so ist $L':A > L':L$, also $L':A$ irgend ein Verhältniß, welches $> L':L$. Nach der Voraussetzung ist nun $X:X' > A:L'$ (76.). Also $X':X < L':A$ (52.). Folglich ist $L':L$ die Gränze im Abnehmen von $X':X$ (76.). Ist ferner $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$; so ist $L:L' < X:X'$. Also $L':L > X':X$ (52.). Sey nun $A:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$ ist; so ist $L':A$ irgend ein Verhältniß, welches $< L':L$ ist (52.). Aber $X:X' < A:L'$ (Vorauss.) Also $X':X > L':A$ (52.), und folglich $L':L$ die Gränze im Wachsen von $X':X$ (76.).

84. Wenn immer $X:X' = Y:Y'$, und $L:L'$ eine

Digitized by Google

Gränze von $X:X'$ ist; so ist $L:L'$ die gleichnamige Gränze von $Y:Y'$.

Ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$; so ist immer $L:L' > X:X'$. Also nach der Voraussetzung auch $L:L' > Y:Y'$ (54.). Ist nun $A:B$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$; so ist $X:X' > A:B$ (76.), und folglich auch $Y:Y' > A:B$ (53.). Folglich $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $Y:Y'$ (76.) Ganz auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn $L:L'$ die Gränze im Abnehmen ist. Ist aber $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X:X'$; so seyen $\varphi(X:X')$, $\varphi'(X:X')$ die Werthe von $X:X'$, welche sich von der einen oder andern Seite her dem Verhältnisse $L:L'$ beliebig nähern, und $\psi(Y:Y')$, $\psi'(Y:Y')$ die entsprechenden gleichen Werthe von $Y:Y'$. Es ist folglich $\varphi(X:X') = \psi(Y:Y')$, $\varphi'(X:X') = \psi'(Y:Y')$, und es nähert sich also nach dem hier bewiesenen $\psi(Y:Y')$ von der einen, $\psi'(Y:Y')$ von der andern Seite her dem Verhältnisse $L:L'$ immer mehr und mehr, so daß also $L:L'$ überhaupt die Gränze von $Y:Y'$ ist.

85. Wenn L die Gränze im Abnehmen, L' die Gränze im Wachsen von X' ist; so ist $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$.

Nach der Voraussetzung ist immer $L < X$, $L' > X'$. Also $L:L' < X:X'$ (58). Sey ein $A > L$, $A' < L'$, $X < A$, $X' > A'$ (76.); so ist $A:A' > L:L'$, $X:X' < A:A'$ (58.). Folglich offenbar $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$ (76.).

86. Ist L die Gränze im Wachsen von X, L' die Gränze im Abnehmen von X'; so ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$.

Nach der Voraussetzung ist immer $L > X$, $L' < X'$. Also $L:L' > X:X'$ (58.). Sey nun $A < L$, $A' > L'$, $X > A$, $X' < A'$; so ist $A:A' < L:L'$, $X:X' > A:A'$ (58.). Also ist $L:L$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$ (16.).

87. Die Gränze der Verhältnisse $X:X'$, $Y:Y'$ sey $L:L'$; so ist $L:L'$ auch eine Gränze von $X+Y:X'+Y'$.

Digitized by Google

Sey $L:L'$ die Gränze im Wachsen beider Verhältnisse; so ist $L:L' > X:X'$, $L:L' > Y:Y'$ (76.). $A:A'$ sey irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$; so ist $X:X' > A:A'$ $Y:Y' > A:A'$, wenigstens lassen sich die veränderlichen Verhältnisse so annehmen (76.). Folglich ist $L:L' > X+Y:X'+Y'$, $X+Y:X'+Y' > A:A'$ (74. 72.). Also $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X+Y:X'+Y'$ (76.).

Ist $L:L'$ die Gränze im Abnehmen beider Verhältnisse; so zeigt man durch ganz ähnliche Schlüsse, daß $L:L'$ auch die Gränze im Abnehmen von $X+Y:X'+Y'$ ist.

Ist aber z. B. $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$, und die Gränze im Abnehmen von $Y:Y'$, $A:B$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$, $A':B'$ irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$; so ist $L:L' > X:X'$, $A:B < L:L'$, $X:X' > A:B$ und eben so $L:L' < Y:Y'$, $A':B' > L:L'$, $Y:Y' < A':B'$ (76.). Also $A':B' > X:X'$ (57.), und folglich, da auch $A':B' > Y:Y'$ ist, $X+Y:X'+Y' < A':B'$ (74.). Eben so ist $A:B < Y:Y'$ (58.), $A:B < X:X'$. Also $X+Y:X'+Y' > A:B$ (72.). Macht nun, welches offenbar immer möglich ist, zugleich $X:X' > A:B$, $Y:Y' < A':B'$; so hat man auch zugleich $X+Y:X'+Y' > A:B$, $X+Y:X'+Y' < A':B'$. Da nun die Verhältnisse $A:B$ $(< L:L')$, und $A':B'$ $(> L:L')$ dem Verhältnisse $L:L'$ offenbar von beiden Seiten her beliebig nahe genommen werden können; so kann auch $X+Y:X'+Y'$ von beiden Seiten her dem Verhältnisse $L:L'$ beliebig nahe gebracht werden, so daß also $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X+Y:X'+Y'$ ist.

Ist $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X:X'$ und $Y':Y'$; so kann man auf die schon öfter gebrauchte Art zeigen, daß auch $L:L'$ überhaupt die Gränze von $X+Y:X'+Y'$ ist.

88. Das aus zwei oder mehreren Verhältnissen zusammengesetzte Verhältniß hat das aus ihren Gränzverhältnissen zusammengesetzte Verhältniß zur Gränze.

Seyen $L:M$, $M:L'$ die Gränzen im Abnehmen von $X:Y$, $Y:X'$; so ist immer $X:Y > L:M$, $Y:X' > M:L'$; also auch $X:X' > L:L'$ (61.). Sey nun $L:A$

Digitized by Google

irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$, so daß also $L' > A$ (51.). Nimmt man folglich $M:L' = B:A$; so ist auch $M > B$ (25) und demnach $L:B > L:M$ (50.). Also kann man machen $X:Y < L:B$ (76.). Sey nun $X:Y = L:C$, also $L:C < L:B$ (54.), $C > B$ (51.) $C:A > B:A$ (50.), $C:A > M:L'$ (53.). Folglich $Y:X' < C:A$ (76.). Man hat also $X:Y = L:C$, $Y:X' < C:A$, woraus $X:X' < L:A$ (63.). Da nun $X:X' > L:L'$, $L:A > L:L'$, $X:X' < L:A$ ist; so ist $L:L'$ die Gränze im Abnehmen von $X:X'$.

Sind $L:M$, $M:L'$ beides Gränzen im Wachsen von $X:Y$, $Y:X'$; so ist immer $X:Y < L:M$, $Y:X' < M:L'$; also $X:X' < L:L'$ (61.). Sey nun wieder $L:A$ irgend ein Verhältniß, welches $< L:L'$ ist; so ist $L' < A$ (51.). Nimmt man nun $M:L' = B:A$; so ist $M < B$ (25.), $L:B < L:M$ (50.). Man kann also $X:Y > L:B$ machen (76.). Ferner sey $X:Y = L:C$; so ist $L:C > L:B$ (53.), $C < B$ (51.), $C:A < B:A$ (50.), $C:A < M:L'$ (54.), und man kann also $Y:X' > C:A$ machen (76.). Also hat man $X:Y = L:C$, $Y:X' > C:A$, woraus $X:X' > L:A$ (63.). Da nun $L:L' > X:X'$, $L:A < L:L'$, $X:X' > L:A$ ist; so ist $L:L'$ die Gränze im Wachsen von $X:X'$ (76.).

Ist z. B. $L:M$ die Gränze im Abnehmen von $X:Y$, $M:L'$ die Gränze im Wachsen von $Y:X'$, so ist immer $L:M < X:Y$, $M:L' > Y:X'$. Sey nun $L:A$ irgend ein Verhältniß welches $< L:L'$ ist; so ist $A > L'$ (51.), $M:A < M:L'$ (50.). Folglich kann man $Y:X' > M:A$ machen (76.), und hat immer $X:Y > L:M$. Also $X:X' > L:A$ (61.). Ferner sey $B:L'$ irgend ein Verhältniß, welches $> L:L'$ ist; so ist $B > L$ (51.), $B:M > L:M$ (50.). Also kann man $X:Y < B:M$ machen (76.), und hat immer $Y:X' < M:L'$. Folglich $X:X' < B:L'$ (61.). Macht man nun zugleich $Y:X' > M:A$, $X:Y < B:M$, welches offenbar möglich, da $M:A$, $B:M$ zwei Verhältnisse sind, welche $< M:L'$ und $> L:M$ sind; so ist zugleich $X:X' > L:A$, $X:X' < B:L'$, wo $L:A$, $B:L'$ zwei Verhältnisse sind, welche willkührlich

Digitized by Google

$< L:L'$ und $> L:L'$ sind. Also kann sich $X:X'$ dem dem Verhältnisse $L:L'$ von beiden Seiten her beliebig nähern, so daß also letzteres überhaupt die Gränze von ersterem ist.

Sind $L:M$, $M:L'$ überhaupt Gränzen von $X:Y$, $Y:X'$, so beweiset man den Satz wieder nach der öfter gebrauchten Methode.

89. Für mehr als zwei Verhältnisse wird der Satz durch mehrmalige Anwendung des vorhergehenden bewiesen.

90. Sehr ausführlich ist die Lehre von den Gränzen der Verhältnisse behandelt in L'Huilier expositio elem. princip. calc. diff. et int. Tub. 1795. Cap. I. und in R. Simson Opp. posthuma. Glasguae. 1776., wo man auch Anwendungen auf die Geometrie findet.

Ueber die Lehre von den Verhältnissen überhaupt s. m. auch: Kannengießer Versuch einer allgemeinen Theorie der Verhältnisse. Mit einer Vorrede von E. G. Fischer. Berlin. 1811. 4.

Verkehrte Regula de tri, s. Verhältniß. (46. 2.).

Verkürzte Multiplication und Division, (multiplicatio et divisio contracta), s. Multiplication. Thl. III. S. 651.

Verlängern, wird vorzugsweise von geraden Linien gebraucht, wenn man sie sich über einen ihrer Endpuncte hinaus nach ihrer Richtung hin erweitert denkt.

Vermischungs-Rechnung oder Regel, ist bei einigen Schriftstellern gleichbedeutend mit Alligationsrechnung. Andere verstehen darunter nur einen besondern Fall der Gesellschaftsrechnung, wenn mehrere Ingredienzen nach gegebenen Verhältnissen mit einander zu vermischen sind, wozu Thl. II. S. 357. ein Beispiel liefert.

Digitized by Google

Verneinte Größen, gleichbedeutend mit negative Größen; s. entgegengesetzte Größen.

Verschwindungsquotient, s. Thl. I. S. 821.

Versetzungen (Permutationes) gegebener Dinge oder Elemente nennt man alle verschiedenen Stellungen, welche sie unter und gegen einander annehmen können, wobei ihre Anzahl nicht verändert wird. Den Inbegriff der Versetzungen der Elemente a, b, c, d, ... bezeichnet Hindenburg durch $P(a, b, c, d, \ldots)$, und, wenn die Elemente respective $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ Mal wiederholt vorkommen, durch $P(a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \ldots)$. Die Anzahl aller möglichen Versetzungen heißt die Versetzungs- oder Permutationszahl, und wird für ein, zwei, drei, vier, u. s. f. m Elemente nach Hindenburg durch a, b, c, d, ... m, bezeichnet.

1. Hat man zunächst m verschiedene Elemente a, b, c, ... m, und bezeichnet den Inbegriff der Versetzungen dieser Elemente ohne a, ohne b, ohne c, u. s. f., durch P_a, P_b, P_c, u. s. f.; so erhellet leicht die Richtigkeit folgender Formel:

$$P(a, b, c, \ldots m) = aP_a + bP_b + cP_c + \ldots + mP_m.$$

In dem Aggregat auf der rechten Seite kommen nämlich offenbar alle Permutationen der gegebenen Elemente vor, weil, wenn eine mit dem Anfangselement k fehlte, auch in kP_k, also auch in P_k eine fehlen müßte, und ein ganz ähnlicher Schluß zeigt, daß auch keine Permutation in dem genannten Aggregat zwei Mal vorkommen kann, in demselben also P (a, b, c, ... m) richtig entwickelt ist.

2. Die Versetzungszahl ergiebt sich hieraus unmittelbar. Bezeichnen wir nämlich die Versetzungszahlen für m—3, m—2, m—1 Elemente durch i, k, l; so folgt aus der Formel in (1.) sogleich:

$$m = l_{(1)} + l_{(2)} + l_{(3)} + \ldots + l_{(m)},$$

Digitized by Google

d. i. $m = ml = m(m-1)k = m(m-1)(m-2)i$, und, so weiter gehend, $m = m(m-1)(m-2)\ldots 2.a$. Aber offenbar $a = 1$. Also

$$m = 1.2.3 \ldots m.$$

3. Für eine mäßige Anzahl von Elementen wird die Permutationszahl schon sehr groß. Eine Tischgesellschaft von 10 Personen kann ihre Plätze $1.2.3 \ldots 10 = 3628800$ Mal wechseln. In Récréations mathématiques par Ozanam. Paris. 1696. p. 45. sind die Versetzungszahlen bis zur 25sten, welche aus 26 Ziffern besteht, in Athanasii Kircheri Ars magna sciendi. Amst. 1669. p. 157. bis zur 50sten berechnet.

4. Kommen aber unter den gegeben m Elementen α vor, welche einander gleich, z. B. $= a$ sind; so sind offenbar alle die Permutationen identisch, in welchen die übrigen Elemente, außer a, einerlei Stellen einnehmen. Denkt man sich nun irgend eine Permutation; so kommen offenbar so viele Permutationen, in denen b, c, d, ... dieselben Stellen einnehmen, vor, als sich die α Elemente, welche $= a$ sind, unter einander versetzen lassen, d. i. (2.) $1.2.3 \ldots \alpha$. Da dies von jeder Permutation gilt; so kommt eine jede $1.2.3 \ldots \alpha$ Mal vor, und die Anzahl der von einander verschiedenen Permutationen ist

$$= \frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3 \ldots \alpha}.$$

Kommen nun ferner noch β Elemente vor, welche alle $=$ b; so schließt man ganz auf ähnliche Art, daß die Anzahl der Permutationen

$$= \frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta},$$

und überhaupt ist für die Elementenrelhe $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots m^{\mu}$ die Permutationszahl

$$= \frac{1.2.3 \ldots m}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta . 1.2.3 \ldots \gamma \ldots 1.2.3 \ldots \mu}$$

$$= \frac{1.2.3 \ldots (\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu)}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta . 1.2.3 \ldots \gamma \ldots 1.2.3 \ldots \mu}.$$

Z. B. num Perm $(a^4 b^3 c d e) = \frac{1.2.3 \ldots 10}{1.2.3.4 . 1.2.3} = 5.7.8.9.10 = 25200$.

Digitized by Google

5. Da für die Elementenreihe $a^{\alpha} b^{\beta} \ldots p^{\varkappa} q r s \ldots$ die Permutationszahl

$$\frac{1.2.3 \ldots . m}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta \ldots 1.2.3 \ldots \varkappa}$$

ihrer Natur nach eine ganze Zahl ist; so folgt hieraus der arithmetische Satz, daß, wofern nur $\alpha + \beta + \ldots + \varkappa$ nicht $> m$ ist, das Product $1.2.3 \ldots m$ immer durch $1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta \ldots 1.2.3 \ldots \varkappa$ theilbar ist.

6. Man setze die Permutationszahl $= \frac{p}{q} = r$, wo r eine ganze Zahl. Ist nun m eine Primzahl, nnd nicht alle Elemente gleich; so sind alle Factoren des Nenners $< m$. Also geht m in q nicht auf (Zahl. I. 4.). Da nun aber m offenbar in $p = qr$ aufgeht; so muß m in r aufgehen (Zahl. I. 5.). Ist also die Anzahl m der gegebenen Elemente eine Primzahl; so geht m immer in der Permutationszahl auf, wenn nur nicht alle Elemente unter einander gleich sind. (Gauss Disq. arithm. Lips. 1801. p. 34.)

7. Der binomische Lehrsatz für positive ganze Exponenten läßt sich leicht aus der Formel für die Versetzungszahl ableiten. Am Meisten kommen diese Zahlen bei der Entwickelung der Potenzen der Polynomien und der Reversion der Reihen vor.

8. Es sind nun noch Regeln zur wirklichen Aufstellung aller möglichen Permutationen gegebener Elemente nöthig. Da (1.)

$$P(a, b, c, .. m) = aP + \underset{a}{bP} + \underset{b}{cP} + .. + \underset{o}{mP}$$
$$= \underset{m}{mP} + \underset{l}{lP} + \underset{k}{kP} + .. + \underset{a}{aP}$$

ist; so erhält man, diese Formel nur in Worte übersetzend, aus den Permutationen für $m - 1$ Elemente die für m Elemente auf folgende Art. Man schreibe die Permutationen der $m - 1$ Elemente a, b, c, .. l hin, und füge ihnen allen m bei; so erhält man $\underset{m}{mP}$. Vertauscht man nun m mit l, dann l mit k, u. s. f.; so erhält man $\underset{l}{lP}$, $\underset{k}{kP}$, u. s. f., also zusammen P (a, b, c, ... m). So leitet man aus den Permutationen für ein Element die für

Digitized by Google

zwei, aus diesen wieder die für drei Elemente ab, u. s. f. bis zu der gegebenen Anzahl von Elementen.

Da ferner auch z. B. in Bezug auf vier Elemente,

$$P(d) = d,$$
$$P(c, d) = {}_{c}P + {}_{d}P,$$
$$P(b, c, d) = {}_{b}P + {}_{c}P + {}_{d}P,$$
$$P(a, b, c, d) = {}_{a}P + {}_{b}P + {}_{c}P + {}_{d}P$$

ist; so kann man auch zuerst d hinschreiben, diesem c vorsetzen, und dann c mit d vertauschen, allen diesen hierauf b vorsetzen, b mit c, und dann c mit d vertauschen, diesen allen a vorsetzen, und a mit b, b mit c, c mit d vertauschen.

Schließt man nun die Permutationen für ein, zwei, drei, u. s. f. Elemente in Haken ein, und fängt bei der ersten Regel, welches offenbar verstattet ist, sowohl von vorn als von hinten an; so erhält man folgende drei Darstellungen der Permutationen für vier Elemente nach den obigen beiden Regeln:

a|b|c|d	a b c d	a|b|c|d
b|a|c|d	a b d c	a|b|d|c
a c b|d	a c b d	a|c|b|d
c a b|d	a c d b	a|c|d|b
b c a|d	a d b c	a|d|b|c
c b a|d	a d c b	a|d|c|b
a b d c	b a c d	b a|c|d
b a d c	b a d c	b a|d|c
a d b c	b c a d	b c a|d
d a b c	b c d a	b c d|a
b d a c	b d a c	b d|a|c
d b a c	b d c a	b d|c|a
a c d b	c a b d	c a|b|d
c a d b	c a d b	c a|d|b
a d c b	c b a d	c b a|d
d a c b	c b d a	c b d|a
c d a b	c d a b	c d|a|b
d c a b	c d b a	c d|b|a
b c d a	d a b c	d a|b|c
c b d a	d a c b	d a|c|b
b d c a	d b a c	d b|a|c
d b c a	d b c a	d b|c|a
c d b a	d c a b	d c|a|b
d c b a	d c b a	d c|b|a

Digitized by Google

Alle diese Darstellungen sind involutorisch, die beiden letzten zugleich lexicographisch.

9. Aus der Natur der lexicographischen Anordnung folgt unmittelbar, daß man aus jeder einzelnen Permutation die nächst höhern ableitet, wenn man von der rechten nach der linken Hand zu das erste Element sucht, welches als ein niedrigeres vor einem höhern vorausgeht, dieses mit dem nächst höhern Element rechts vertauscht, und es selbst mit den übrigen Elementen zur rechten Hand in lexicographischer Ordnung folgen läßt, indem die Elemente links völlig ungeändert bleiben. Diese Ableitung der Permutationen aus einander ist besonders in dem Falle anwendbar, wenn identische Elemente vorkommen. Die Permutation, in welcher kein Element mehr als ein niedrigeres vor einem höhern vorausgeht, ist die letzte. Für aabbc sind hiernach die Permutationen:

aabbc
aabcb
aacbb
ababc
abacb
abbac
abbca
abcab
abcba
acabb
acbab
acbba
baabc
baacb
babac
babca
bacab
bacba
bbaac
bbaca
bbcaa
bcaab
bcaba
bcbaa
caabb
cabab
cabba
cbaab
cbaba
cbbaa

10. Der Nutzen dieser Regeln in der Analysis ist sehr eingeschränkt. Anwendung finden sie bei der Bildung von

Anagrammen, d. i. der Versetzungen der Buchstaben eines Wortes, oder der Worte eines Satzes, so daß die Versetzung wieder einen Sinn giebt, welches aber keine mathematische Anwendung ist. Das Wort Roma giebt die Anagramme: ramo, oram, mora, maro, armo, amor. Der Name des berühmten Calvinus giebt Alcuinus, wie er sich selbst auf dem Titel seiner Institutionen nennt. Révolution française giebt: un Corse la finira, und veto. Der bekannte Vers

Tot tibi sunt dotes, Virgo quod sidera coelo,

mit dessen Versetzung der andächtige Jesuit Bauhusius zum Lobe der Jungfrau Maria sich viel beschäftigt hat, giebt 3312 Anagramme, die wieder einen Hexameter geben, worüber, wie überhaupt über dergleichen Spielereien, mit Mehrerem Jac. Bernoulli Ars conjectandi. p. 77. sqq. nachzusehen ist. Ueber eine lächerliche Anwendung der Versetzungen der Gesichtstheile auf die Verschiedenheit der Gesichter in J. V. Merbitzii de varietate faciei humanae tract. phys. Dresd. 1676. s. Kästners Anal. endl. Gr. S. 38.

11. Eine besonders wichtige Anwendung finden die Permutationen in der Theorie der Elimination aus Gleichungen des ersten Grades, worüber in den Zusätzen zu diesem Werke mehr vorkommen wird. Rothe über Permutationen mit ihrer Anwendung auf das Eliminationsproblem in Hindenburgs 2r. Samml. comb. anal. Abh. S. 263. Scherk math. Abh. Berlin. 1825. S. 31.

Auch gehört zur Lehre von den Permutationen: Heßel über positive und negative Permutationen u. s. f. Marburg 1823. 8.

Eine interessante Aufgabe, die sich auf Permutationen gründet, s. m. Annales d. Math. XVI. p. 32., und aufgelöst von Ferriot XVII. p. 137. Sie betrifft die Bestimmung der Anzahl der verschiedene Arten, auf welche m verschiedene Farben auf die m Seitenflächen eines regulären Polyeders, deren jede n Seiten hat, aufgetragen werden können. Die gesuchte Zahl ist

$$= \frac{1.2.3 \ldots (m-1)}{2n}.$$

Digitized by Google

12. Die Anzahl der Permutationen in jeder einzelnen Ordnung findet man offenbar, wenn man unter den gegebenen Elementen eins von denen, mit welcher die Ordnung anfängt, wegläßt, und für die übrigen die Versetzungszahl sucht. Für $a^4\ b^3\ c^2$ ist die Anzahl der Permutationen von der Ordnung $a = \text{num Perm}\ (a^3\ b^3\ c^2) = 560$, von der Ordnung $b = \text{num Perm}\ (a^4\ b^2\ c^2) = 420$, von der Ordnung $c = \text{num Perm}\ (a^4\ b^3\ c) = 280$.

Versetzungszahl, Permutationszahl, s. Versetzungen.

Vertauschung der unabhängigen veränderlichen Größe, s. Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

Vertex, s. Scheitelpunkt.

Verticalwinkel, s. Winkel.

Verwandlung, einer Größe oder eines Ausdrucks ist überhaupt die zu irgend einem Zweck dienliche Veränderung der Form oder Gestalt derselben, ohne daß dadurch der Werth geändert wird. Ueber die Verwandlung der Figuren, Functionen, Gleichungen, Proportionen s. die entsprechenden Artikel. Bey der Verwandlung der Coordinaten wird bloß die Lage der Axen, auf welche die krumme Linie oder Fläche durch Abscissen und Ordinaten bezogen ist, geändert. Die nöthige Anleitung hierzu ertheilt der Artikel Coordinate.

Verwechslung bei Proportionen, (Alternatio) heißt die Vertauschung der Mittelglieder mit einander, welche offenbar nur dann zulässig ist, wenn alle vier Glieder gleichartig sind. (Verhältniß. 26.).

Verwechslung der unabhängigen veränderlichen Größe, s. Veränderung der unabhängigen veränderlichen Größe.

Digitized by Google

Vieleck oder **Polygon** heißt jede von einer beliebigen Anzahl gerader Linien, welche seine **Seiten** genannt werden, eingeschlossene ebene Figur. Die Gesammtheit aller Seiten heißt der **Umfang**, die Durchschnittspunkte der Seiten heißen **Spitzen**. Jede gerade Linie, welche zwei nicht ein und derselben Seite angehörende Spitzen mit einander verbindet, heißt **Diagonale**. Die von den Seiten gebildeten innern Winkel nennt man **Vielecks-** oder **Polygonwinkel**. Werden die Seiten über die Spitzen hinaus verlängert; so erhält man die **Außenwinkel** des Vielecks, die aber, wenn die entsprechenden Polygonwinkel einspringende oder convexe Winkel sind, innerhalb des Polygons liegen, und daher in diesem Falle als negativ betrachtet werden sollen. Nach der Anzahl der Seiten theilt man die Vielecke in **Dreiecke**, **Vierecke**, **Fünfecke**, u. s. f. **Sphärische Vielecke**, von denen Einiges Trigonometrie. (92.) beigebracht worden, werden auf der Oberfläche einer Kugel von Bogen größter Kreise eingeschlossen. **Polygones gauches** nennen französische Schriftsteller solche Vielecke, deren Seiten nicht alle in **einer** Ebene liegen. M. s. einige Eigenschaften solcher Vielecke in dem Art. Transversale. (4. 7. 11. 12. 15.)

I. Allgemeine Eigenschaften in Bezug auf Seiten, Diagonalen und Winkel.

1. Die Seiten, Winkel, und Spitzen sind offenbar bei jedem Vieleck in gleicher Anzahl vorhanden.

2. Sei nun immer die Anzahl der Seiten $= n$; so lassen sich offenbar aus jeder Spitze $n-3$, aus allen also $n(n-3)$ Diagonalen ziehen, wobei aber jede Diagonale doppelt, z. B. die zwischen A und N als AN und NA, gerechnet worden, so daß also die Anzahl der Diagonalen nur $= \frac{n(n-3)}{2}$.

3. Die Summen der innern Winkel eines n und $(n-1)$ecks, den rechten Winkel als Einheit genommen,

Digitized by Google

seyen Σ und Σ'. Sind nun A, B, C (Fig. 102.) drei auf einander folgende Spitzen irgend eines necks; so wird, wenn man AC zieht, ein Dreieck ABC bestimmt, welches außerhalb oder innerhalb des gegebenen necks fällt, jenachdem der Polygonwinkel bei B concav oder convex ist. Da nun in jedem Dreieck die Winkelsumme $= 2$ ist; so ist, wenn B concav ist, $\Sigma = \Sigma' + 2$, wenn B convex ist aber $\Sigma = \Sigma' - (\alpha + \beta) + 4 - \gamma = \Sigma' - (2 - \gamma) + (4 - \gamma) = \Sigma' + 2$, wie vorher. Folglich bilden für $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$ die Winkelsummen die Progression $2, 4, 6, 8, \ldots$, deren $(n-2)$tes Glied, d. i. die Winkelsumme jedes necks, $= 2(n-2) = 2n-4$ ist, immer den rechten Winkel als Einheit angenommen.

4. Hat nun ein neck m concave, m′ convexe Winkel, und setzen wir die Summe jener $= S$, dieser $= S'$, die Summen der entsprechenden äußern Winkeln aber $= s$ und $= s'$; so ist offenbar $S + s = 2m$, $S' - s' = 2m'$. Also $S + S' + s - s' = 2(m + m') = 2n$. Aber $S + S' = 2n - 4$ (3.). Also $2n - 4 + s - s' = 2n$, $s - s' = 4$. Folglich ist, da die, convexen Polygonwinkeln entsprechenden, Außenwinkel als negativ betrachtet werden, die algebraische Summe aller Außenwinkel eines jeden Vielecks $= 4$. Hat das Vieleck keinen convexen Winkel; so ist $s' = 0$, $s = 4$.

5. Ein neck kann höchstens $n - 3$ convexe Winkel haben, weil, wenn es $n - 2$ hätte, da jeder convexe Winkel > 2 ist, die Summe aller convexen Winkel schon $> 2n - 4$ wäre, da doch die Summe aller Winkel überhaupt immer nur $= 2n - 4$ ist (3.).

6. Ein Vieleck sei durch Diogonalen in Dreiecke getheilt, deren Anzahl $= \Delta$ sei. Die Summe aller Winkel dieser Dreiecke ist $= 2\Delta$, und der Summe aller Winkel des Vielecks offenbar gleich. Also $2\Delta = 2n - 4$ (3.), $\Delta = n - 2$, so daß also die Anzahl der Dreiecke, in welche ein Vieleck durch Diagonalen getheilt werden kann, immer um 2 kleiner ist, als die Anzahl der Seiten. Die Anzahl der Seiten aller dieser Dreiecke ist $= 3(n-2)$,

Digitized by Google

wo aber jede Diagonale augenscheinlich doppelt gerechnet ist. Setzen wir also die Anzahl der Diagonalen, durch welche ein Polygon in Dreiecke getheilt werden kann, $= \delta$; so ist $3(n-2) = n + 2\delta$, woraus $\delta = n-3$, d. h. die Anzahl der Diagonalen, welche ein Polygon in Dreiecke zerlegen, ist immer um 3 kleiner als die Anzahl der Seiten.

7. Man habe jetzt einmal ein beliebiges aus a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, u. s. f. bestehendes Figurennetz in einer Ebene. Die Anzahl der Verbindungslinien sei $= K$, die Anzahl der Punkte, in welchen dieselben zusammenstoßen, $= E$, die Anzahl der einzelnen Figuren $= S$. Die Anzahl der im äußern Umfange des Netzes liegenden Linien und Punkte sei $= \mathfrak{K}$, $= \mathfrak{E}$, und die Anzahl der innern Linien und Punkte $= \mathfrak{K}'$, $= \mathfrak{E}'$; so ist offenbar $K = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}'$, $E = \mathfrak{E} + \mathfrak{E}'$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{E}$, und auch $S = a + b + c + d + \ldots$. Rechnet man jede Linie im äußern Umfang ein, jede innere zwei Mal; so ist offenbar $3a + 4b + 5c + 6d + \ldots = \mathfrak{K} + 2\mathfrak{K}' = K + \mathfrak{K}'$, $2a + 3b + 4c + 5d + \ldots = K + \mathfrak{K}' - S$. Die Summe der innern Winkel aller das Netz bildenden Figuren ist $= 2a + 4b + 6c + 8d + \ldots$ (3.), aber auch, da um jeden innern Punkt vier rechte Winkel liegen, $= 4\mathfrak{E}' + 2\mathfrak{K} - 4$, weil $2\mathfrak{K} - 4$ die Summe der Winkel am äußern Umfange ist (3.). Also $2a + 4b + 6c + 8d + \ldots = 4\mathfrak{E}' + 2\mathfrak{K} - 4$, $a + 2b + 3c + 4d + \ldots = 2\mathfrak{E}' + \mathfrak{K} - 2$, $2a + 3b + 4c + 5d + \ldots = 2\mathfrak{E}' + \mathfrak{K} + S - 2$. Also $K + \mathfrak{K}' - S = 2\mathfrak{E}' + \mathfrak{K} + S - 2 = 2(E - \mathfrak{E}) + \mathfrak{K} + S - 2 = 2(E - \mathfrak{K}) + \mathfrak{K} + S - 2 = 2E - \mathfrak{K} + S - 2$, $K + \mathfrak{K} + \mathfrak{K}' = 2(E + S - 1) = K + K = 2K$, also $E + S - 1 = K$, $E + S = K + 1$, so daß also die Summe der Anzahl der Durchschnittspunkte und Figuren immer um 1 größer ist als die Anzahl der Linien. Es erhellet sehr leicht, daß dieser Satz auch für Netze gilt, die nicht in einer Ebene liegen. Einen andern noch weit einfachern Beweis s. im Art. Vieleckiger Körper (1.). Der Satz ist von Cauchy gefunden. S. a. a. O.

Digitized by Google

8. Die n Seiten und n Winkel eines Vielecks sollen Stücke desselben heißen. Man kann fragen, wie viele dieser Stücke zur Bestimmung des Vielecks nöthig sind. Die Elemente der Geometrie und Trigonometrie lehren, daß zur Bestimmung eines Dreiecks immer 3 Stücke erforderlich sind. Sey nun ein neck gegeben, und durch eine Diagonale ein Dreieck abgeschnitten, so daß ein (n—1)eck übrig bleibt. Die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke dieses (n—1)ecks sey = b′, die des necks = b. Sind also b′ Stücke des (n—1)ecks gegeben; so ist dadurch die gezogene Diagonale bestimmt, d. i. eine Seite des abgeschnittenen Dreiecks, zu dessen Bestimmung, folglich auch zur Bestimmung des necks, demnach nur noch 2 Stücke gegeben zu seyn brauchen. Folglich ist b = b′ + 2, und die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke für das Dreieck, Viereck, Fünfeck, ... neck, also 3, 5, 7, ..., 2n — 3. Es erhellet aber leicht, daß unter diesen 2n — 3 nöthigen Bestimmungsstücken immer nothwendig wenigstens n — 2 Seiten seyn müssen, weil, wenn nur n — 3 Seiten gegeben wären, noch n Winkel gegeben seyn müßten. Da aber durch n — 1 Winkel der nte schon an sich bestimmt wird, indem die Summe aller = 2n — 4 (3.); so wären in der That nur 2n — 4 von einander unabhängige Stücke gegeben, da doch die Anzahl derselben 2n — 3 seyn muß. Also müssen 2n — 3 Stücke, unter denen wenigstens n — 2 Seiten vorkommen, gegeben seyn. Damit ist übrigens nicht gesagt, daß durch jede 2n — 3 Stücke, unter denen wenigstens n — 2 Seiten vorkommen, ein Vieleck völlig bestimmt wird, indem ja, wie die Trigonometrie (S. diesen Art. 15.) lehrt, schon bei Dreiecken Fälle vorkommen, wo durch drei Stücke mit wenigstens einer Seite das Dreieck nicht völlig bestimmt wird. Eine vollständige Aufzählung aller Fälle bei Polygonen, worin zugleich die Bedingungen der Congruenz enthalten seyn würden, gestattet hier der Raum nicht, da die Untersuchung an sich ganz elementar, und keinen Schwierigkeiten unterworfen ist. M. v. Crelles Geometrie.

Digitized by Google

Thl. I. §. 95. ff., auch Polygonometrie im Art. Trigonometrie. IV. Ueber die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke bei Figurennetzen s. einen Aufsatz von Olivier in Crelles Journal d. Math. Thl. I. H. 3. S. 227.

II. Vergleichung der Vielecke.

9. Zwei Vielecke können in dreifacher Rücksicht mit einander übereinstimmen, und in eben diesen Beziehungen mit einander verglichen werden. Uebereinstimmung rücksichtlich der Größe heißt Gleichheit; Vielecke, die in Bezug auf ihre Form mit einander übereinstimmen, heißen ähnliche Vielecke; Uebereinstimmung rücksichtlich der Form und Größe heißt Congruenz. Die hierher gehörenden Untersuchungen werden als völlig elementar, und größtentheils selbst in den Elementen des Euclides enthalten, hier füglich übergangen, um für schwierigere Untersuchungen den Raum zu sparen. In Bezug auf die Lehre von der Aehnlichkeit der Vielecke, so wie ihre Verwandlung und Theilung s. m. den Art. Figur. Thl. II. S. 214 — 245.

III. Punkt der mittlern Entfernung.

10. Der Punkt der mittlern Entfernungen, oder auch der Mittelpunkt der Entfernungen eines Vielecks ist der Punkt in der Ebene desselben, welcher die Eigenschaft besitzt, daß seine Entfernung von jeder in der Ebene des Vielecks willkührlich angenommenen geraden Linie oder Axe das arithmetische Mittel der Entfernungen aller Spitzen des Vielecks von dieser Axe ist, wobei die Entfernungen positiv oder negativ genommen werden, jenachdem sie auf der einen oder der andern Seite der Axe liegen. Auch auf Vielecke, die nicht in einer Ebene liegen, selbst auf willkührliche Punkte im Raume läßt sich dieser Begriff erweitern, wenn nur willkührliche Ebenen im Raume als Axen angenommen werden. Die nöthige Kürze gebietet uns jedoch, die

Digitized by Google

Untersuchung auf Vielecke in einer Ebene zu beschränken, um so mehr, da sie sich leicht auch auf den Raum überhaupt ausdehnen lassen wird, wenn sie für den speciellern Fall richtig aufgefaßt worden. Carnot hat den Punkt der mittlern Entfernungen in die Geometrie eingeführt, und in seiner Géométrie de position viele merkwürdige Eigenschaften desselben bewiesen. Uebrigens lehrt die Mechanik, daß dieser Punkt mit dem Schwerpunkte mehrerer gleichen Massen in den Spitzen des Vielecks einerlei ist.

11. Zuvörderst ist zu zeigen, daß es für jedes Vieleck einen Punkt der mittlern Entfernungen giebt. Nimmt man nämlich zwei willkührliche auf einander senkrechte Axen an, und bezeichnet die Coordinaten der Spitzen des Vielecks durch $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3;$ u. s. f.; so ist, wenn die Seitenzahl $= n$ ist, der Punkt, dessen Coordinaten

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots}{n},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots}{n},$$

sind, der Punkt der mittleren Entfernungen. Um dies zu beweisen ist zu zeigen, daß diese Gleichungen, oder wenigstens die Ordinatengleichung, für jede zwei andere Axen eben so statt finden. Sind diese Axen zuerst den primitiven parallel, die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes in Bezug auf die primitiven Axen a, b; so ist, wenn die neuen Coordinaten durch Indices von den primitiven unterschieden werden, offenbar

$$x' = x - a, x'_1 = x_1 - a, x'_2 = x_2 - a, \ldots\ldots;$$
$$y' = y - b, y'_1 = y_1 - b, y'_2 = y_2 - b, \ldots\ldots;$$

wenn nur a, b immer mit den gehörigen Zeichen genommen werden. Nach der Voraussetzung ist aber

$$x - a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots}{n} - a,$$

$$y - b = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots}{n} - b;$$

$$x - a = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots - na}{n},$$

$$y - b = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots - nb}{n};$$

Digitized by Google

$$x - a = \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + (x_3 - a) + \ldots}{n},$$

$$y - b = \frac{(y_1 - b) + (y_2 - b) + (y_3 - b) + \ldots}{n};$$

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots}{n},$$

$$y' = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots}{n};$$

so daß also unsere Gleichungen auch für das neue, dem primitiven parallele, System gelten. Auch sind sie für jede zwei neue auf den primitiven senkrechte Axen richtig, weil man offenbar x und y vertauschen kann. Ist nun aber irgend ein anderes System gegeben; so kann man sich, weil unsere Gleichungen für alle parallelen Systeme gelten, wenn sie für eins gelten, dessen Axen durch den Anfang des primitiven-Systems gehend denken. Auch lassen sich, wie sogleich in die Augen fällt, diese beiden Systeme in immer paralleler Lage jederzeit so weit fortrücken, daß das gegebene Vieleck ganz zwischen die Schenkel des Winkels x'Ay (Fig. 103.) fällt, und man also, ohne der Allgemeinheit zu schaden, nur die beiden in der Figur dargestellten Fälle, jenachdem der Winkel $\alpha <$ oder $> 90^0$ ist, zu betrachten braucht. P ist irgend eine Spitze des gegebenen Vielecks. In Fig. 103. a. ist $AB = x$, $PB = y$; $AB' = x'$, $PB' = y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$, d. i.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

In Fig. 103. b. dagegen ist $AB = -x$, $PB = y$; $AB' = x'$, $PB' = -y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$, d. i.

$$-x = x' \cos(180^0 - \alpha) - (-y') \cdot \cos(\alpha - 90^0),$$
$$y = x' \sin(180^0 - \alpha) + (-y') \cdot \sin(\alpha - 90^0),$$

welche Gleichungen sich leicht ganz auf dieselbe Form wie die obigen bringen lassen. Mittelst Elimination erhält man leicht aus ihnen:

$$x' = y \sin\alpha + x \cos\alpha, \quad y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Nun ist nach der Voraussetzung:

$$y \sin\alpha = \frac{y_1 \sin\alpha + y_2 \sin\alpha + y_3 \sin\alpha + \ldots}{n},$$

$$x \cos\alpha = \frac{x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\alpha + x_3 \cos\alpha + \ldots}{n};$$

Digitized by Google

$$y\cos\alpha = \frac{y_1\cos\alpha + y_2\cos\alpha + y_3\cos\alpha + \dots}{n},$$

$$x\sin\alpha = \frac{x_1\sin\alpha + x_2\sin\alpha + x_3\sin\alpha + \dots}{n};$$

$$y\sin\alpha + x\cos\alpha = \frac{(y_1\sin\alpha + x_1\cos\alpha) + (y_2\sin\alpha + x_2\cos\alpha) + \dots}{n},$$

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \frac{(y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha) + (y_2\cos\alpha - x_2\sin\alpha) + \dots}{n};$$

d. i. nach dem so eben Bewiesenen:

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \dots}{n},$$

$$y' = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \dots}{n}.$$

Die beiden Ausdrücke für x, y gelten also für jedes System, und der durch diese Coordinaten bestimmte Punkt ist also der Punkt der mittlern Entfernungen des Vielecks. (10.)

12. Legt man durch den Punkt der mittlern Entfernungen irgend eine gerade Linie als Axe der y; so ist $y = o$, und folglich auch

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots = o,$$

d. h. die Summe der Entfernungen aller Spitzen des Vielecks von jeder durch den Punkt der mittlern Entfernungen gehende gerade Linie $= o$. Eine solche Linie heißt eine Axe der mittlern Entfernungen. Umgekehrt gehen alle Axen, für welche

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots = o$$

ist, durch einen Punkt, nämlich durch den Punkt der mittlern Entfernungen. Denn man erhält denselben (11) durch die Coordinaten

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{n},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots}{n}.$$

Ist nun $y_1 + y_2 + y_3 + \dots = o$; so ist auch $y = o$, und der Punkt der mittlern Entfernungen muß also in der Axe liegen, auf welcher die y senkrecht sind, d. i. in der gegebenen.

Digitized by Google

13. Durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung erhellet augenblicklich, daß im Dreieck für jede von einer Spitze nach der Mitte der Gegenseite gezogene gerade Linie als Axe $y_1 + y_2 + \ldots = o$ ist. Daher sind diese drei geraden Linien Axen der mittlern Entfernungen (12.), und schneiden sich in einem Punkte (Dreieck. 16.), nämlich in dem Punkte der mittlern Entfernungen des Dreiecks.

Eben so leicht erhellet, daß der Punkt der mittlern Entfernungen eines Parallelogramms der Durchschnittspunct seiner beiden Diagonalen ist.

14. Zieht man vom Punkte der mittlern Entfernungen nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien z_1, z_2, z_3, ..., und bezeichnet die Winkel, welche diese Linien mit irgend einer durch den Punkt der mittlern Entfernungen gezogenen geraden Linie, die man als Axe, den Punkt der mittlern Entfernungen als Anfang der x annehmen mag, einschließen, diese Winkel immer nach einer Seite hin von 0 bis 360° gezählt, durch α_1, α_2, α_3, ...; so ist

$$x_1 = z_1 \cos\alpha_1,\ x_2 = z_2 \cos\alpha_2,\ x_3 = z_3 \cos\alpha_3,\ \ldots$$
$$y_1 = z_1 \sin\alpha_1,\ y_2 = z_2 \sin\alpha_2,\ y_3 = z_3 \sin\alpha_3,\ \ldots$$

Folglich, da hier $x = y = o$ ist:

$$o = \frac{z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots}{n},$$

$$o = \frac{z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots}{n}$$

und demnach, wie auch die Transversale durch den Punkt der mittlern Entfernungen gelegt seyn mag:

$$o = z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots,$$
$$o = z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots.$$

15. Zieht man nun von irgend einem andern Punkte in der vorher durch den Punkt der mittlern Entfernungen willkührlich gelegten Axe nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien z'_1, z'_2, z'_3, ..., und bezeichnet die Entfernung des angenommenen Punktes vom Punkte der mittlern Entfernungen durch a; so bilden a, z_1, z'_1; a, z_2, z'_2; u. s. f. Dreiecke, auf deren Grundlinie a

Digitized by Google

die Perpendikel $y_1, y_2, y_3, \ldots$ von ihren Spitzen gefällt sind. Nimmt man nun auf das Vorzeichen des a und der x gehörig Rücksicht; so folgt aus Elem. II. 12. 13. und dann ferner mittelst (14.) sogleich, daß immer

$$z'_1{}^2 = z_1^2 + a^2 - 2ax_1 = z_1^2 + a^2 - 2az_1 \cos\alpha_1 ,$$
$$z'_2{}^2 = z_2^2 + a^2 - 2ax_2 = z_2^2 + a^2 - 2az_2 \cos\alpha_2 ,$$
$$z'_3{}^2 = z_3^2 + a_2 - 2ax_3 = z_3^2 + a^2 - 2az_3 \cos\alpha_3 ,$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich durch Addition (14.):

$$z'_1{}^2 + z'_2{}^2 + z'_3{}^2 + \ldots = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + na^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend eines Punktes in der Ebene eines necks von dessen n Winkelspitzen ist immer der Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von den n Winkelspitzen nebst dem nfachen Quadrate der Entfernung des erstern Punktes von dem Punkte der mittlern Entfernungen gleich. Mittelst (13.) ergeben sich hieraus leicht specielle merkwürdige Sätze für Dreieck und Parallelogramm.

16. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, daß die Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von des Vielecks Spitzen die kleinste Quadratensumme geben.

17. Beschreibt man aus dem Punkte der mittlern Entfernungen mit willkührlichem Radius r einen Kreis; so ist für jeden Punkt der Peripherie dieses Kreises die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Größe, nämlich

$$= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + nr^2 . \quad (15.)$$

18. Setzt man letztere Größe $= q^2$; so erhält man

$$r = \sqrt{\frac{q^2 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 - \ldots}{n}} .$$

Die Peripherie des aus dem Punkte der mittlern Entfernungen mit diesem Radius beschriebenen Kreises ist also der geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Größe, nämlich $= q^2$ ist, wie schon

Digitized by Google

Apollonius beweiſet. Apollonius ebene Oerter, wiederhergeſtellt von R. Simſon, überſ. von Camerer. Leipzig. 1796. S. 263 — 310. Ein ähnlicher Satz läßt ſich auf ganz analoge Art von der Kugel beweiſen. M. ſ. z. B. mein Lehrbuch der Statik. Halle. 1826. S. 624.

19. Von jeder der n Spitzen ziehe man jetzt an alle dieſe n Spitzen gerade Linien $\overset{1}{z}_1, \overset{1}{z}_2, \overset{1}{z}_3, \ldots$; $\overset{2}{z}_1, \overset{2}{z}_2, \overset{2}{z}_3, \ldots$; $\overset{3}{z}_1, \overset{3}{z}_2, \overset{3}{z}_3, \ldots$; $\ldots$ $\overset{n}{z}_1, \overset{n}{z}_2, \overset{n}{z}_3, \ldots$, bezeichne die von dem Punkte der mittlern Entfernungen an die n Spitzen gezogenen geraden Linien durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$, und ſetze

$$(\overset{1}{a})^2 + (\overset{2}{a})^2 + (\overset{3}{a})^2 + \ldots = S;$$

ſo iſt nach (15.):

$$(\overset{1}{z}_1)^2 + (\overset{1}{z}_2)^2 + (\overset{1}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{1}{a})^2,$$
$$(\overset{2}{z}_1)^2 + (\overset{2}{z}_2)^2 + (\overset{2}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{2}{a})_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\overset{n}{z}_1)^2 + (\overset{n}{z}_2)^2 + (\overset{n}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{n}{a})^2.$$

Es iſt aber offenbar $\overset{1}{z}_1 = \overset{2}{z}_2 = \overset{3}{z}_3 = \ldots = 0$, und allgemein $\overset{k}{z}_m = \overset{m}{z}_k$. Folglich iſt das Aggregat aller Größen auf der linken Seite die doppelte Summe der Quadrate aller die n Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden geraden Linien. Bezeichnen wir nun dieſe doppelte Summe durch 2Σ; ſo erhält man durch beiderſeitige Addition leicht $2\Sigma = 2nS$, $\Sigma = nS$, ſo daß alſo die Summe der Quadrate aller die Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden Linien der nfachen Summe der Quadrate der von dem Punkte der mittlern Entfernungen an die Spitzen gezogenen geraden Linien gleich iſt. Im Dreieck iſt alſo die Summe der Quadrate der drei Seiten der 3fachen Summe der Quadrate der drei geraden Linien gleich, welche von dem gemeinſchaftlichen Durchſchnittspunkte der die Spitzen mit den Mitten der Gegenſeiten verbindenden geraden Linien nach den Spitzen des Dreiecks gezogen werden (13.).

Digitized by Google

20. Im Parallelogramm ABCD (Fig. 104.) ist (13. 19.) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 = 4(AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2) = 2(4AE^2 + 4BE^2) = 2(AC^2 + BD^2)$, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, die Summe der Quadrate der vier Seiten der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich.

21. Ist Σ die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend einer Spitze A des Vielecks von allen übrigen, und K der Punkt der mittlern Entfernungen; so ist, wenn S, Σ ihre vorige (19.) Bedeutung behalten:

$$\Sigma = nS \text{ (19.)}, \quad \Sigma' = S + n \cdot AK^2 \text{ (15.)};$$

woraus durch Elimination von S:

$$AK = \frac{1}{n}\sqrt{(n\Sigma' - \Sigma)},$$

mittelst welcher Formel die Entfernung jeder Spitze von dem Punkte der mittlern Entfernungen berechnet werden kann.

22. Die Mittelpunkte der die n Spitzen je zwei verbindenden geraden Linien haben mit den Spitzen einerlei Punkt der mittlern Entfernungen. Die Coordinaten der Mittelpunkte jener Linien sind nämlich offenbar:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(x_1 + x_2),\ \frac{1}{2}(x_2 + x_1),\ \frac{1}{2}(x_3 + x_1),\ \ldots; \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_3),\ \frac{1}{2}(x_2 + x_3),\ \frac{1}{2}(x_3 + x_2),\ \ldots; \\
\quad\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_n),\ \frac{1}{2}(x_2 + x_n),\ \frac{1}{2}(x_3 + x^n),\ \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_2),\ \frac{1}{2}(y_2 + y_1),\ \frac{1}{2}(y_3 + y_1),\ \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_3),\ \frac{1}{2}(y_2 + y_3),\ \frac{1}{2}(y_3 + y_2),\ \ldots; \\
\quad\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_n),\ \frac{1}{2}(y_2 + y_n),\ \frac{1}{2}(y_3 + y_n),\ \ldots;
\end{array}$$

wobei wir aber jede verbindende Linie doppelt gerechnet haben, so daß jede Coordinate in dieser Darstellung offenbar $2(n-1)$ mal vorkommt. Die Summen der Abscissen und Ordinaten der Mittelpunkte sind also

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(n-1)\{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\}, \\
\frac{1}{2}(n-1)\{y_1 + y_2 + y_3 \ldots\},
\end{array}$$

und folglich, da es überhaupt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinien, also eben so viele Mittelpunkte derselben giebt, wenn die Coordinaten des Punktes der mittlern Entfer-

Digitized by Google

nungen dieser Mittelpunkte durch (x), (y) bezeichnet werden:

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)\{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\}}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

$$(y) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)\{y_1 + y_2 + y_3 + \dots\}}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

oder

$$(x) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{n},$$

$$(y) = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots}{n},$$

d. i. $(x) = x$, $(y) = y$ (11.), folglich der Punkt der mittlern Entfernungen der Spitzen zugleich der Punkt der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte aller Verbindungslinien derselben.

Sind (x), (y) die Coordinaten des Punktes der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines necks, so ist

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{2}(x_2+x_3) + \dots + \frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n) + \frac{1}{2}(x_n+x_1)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n},$$

d. i. $(x) = x$, und eben so $(y) = y$. Also ist auch der Punkt der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines necks mit dem Punkte der mittlern Entfernungen der Spitzen einerlei, und man findet demnach z. B. den Punkt der mittlern Entfernungen irgend eines Vierecks, wenn man die Mittelpunkte seiner Gegenseiten verbindet, da diese Mittelpunkte die Spitzen eines Parallelogramms sind.

23. Sind A_1, A_2 irgend zwei Spitzen des Vielecks, K der Punkt der mittlern Entfernungen, k_2 der Mittelpunkt von A_1 A_2; so erhellet, wenn man sich das Dreieck $K A_1 A_2$ denkt, leicht, daß $A_1 K^2 + A_2 K^2 = 2A_1 k_2^2 + 2K k_2^2 = \frac{1}{2}A_1 A_2^2 + 2K k_2^2$ ist. Denkt man sich nun von A_1 nach allen den übrigen $n-1$ Spitzen gerade Linien gezogen; so ist

Digitized by Google

$$A_1K^2 + A_2K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_2^2 + 2K\tfrac{1}{2}k_2^2,$$
$$A_1K^2 + A_3K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_3^2 + 2K\tfrac{1}{2}k_3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_1K^2 + A_nK^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_n^2 + 2K\tfrac{1}{2}k_n^2;$$
$$(n-1).A_1K^2 + A_2K^2 + A_3K^2 + \ldots + A_nK^2$$
$$= \tfrac{1}{2}|A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + \ldots + A_1A_n^2|$$
$$+ 2|K\tfrac{1}{2}k_2^2 + K\tfrac{1}{2}k_3^2 + \ldots + K\tfrac{1}{2}k_n^2|^2$$
$$= (n-2).A_1K^2 + S,$$

wenn S die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von den n Spitzen bezeichnet. Denkt man sich nun für jede der n Spitzen eine ähnliche Gleichung entwickelt, setzt die Summe der Quadrate aller die n Spitzen zu zweien verbindenden Linien $= \Sigma$, die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte derselben vom Punkte der mittlern Entfernungen aber $= S'$; so erhält man durch Addition aller Gleichungen, da offenbar jede Verbindungslinie, also auch jede Entfernung eines Mittelpunktes vom Punkte der mittlern Entfernungen zweimal vorkommt, leicht:

$$\tfrac{1}{2}.2\Sigma + 2.2S' = (n-2)S + nS,$$
$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'.$$

Aber $\Sigma = nS$ (19.). Also durch Substitution $(n-2)S = 4S'$, $S' = \frac{1}{4}(n-2)S$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte aller die n Spitzen des Vielecks verbindenden geraden Linien vom Punkte der mittlern Entfernungen, ist dem vierten Theile der $(n-2)$ fachen Summe der Quadrate der Entfernungen der Spitzen von jenem Punkte gleich.

24. Die Anzahl der Mittelpunkte der verbindenden Linien ist $= \frac{1}{2}n(n-1)$. Setzen wir nun die Summe der Quadrate aller dieſe Mittelpunkte verbindenden Linien $= \Sigma'$; so ist $\Sigma' = \frac{1}{2}n(n-1)S'$ (19.). Die drei Gleichungen:

$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S',$$
$$\Sigma = nS, \quad \Sigma' = \tfrac{1}{2}n(n-1)S'$$

dienen zur Bestimmung der vier Größen S, Σ, S', Σ' durch einander. So erhält man z. B.

Digitized by Google

$$x - a = \frac{(x_1 - a) + (x_2 - a) + (x_3 - a) + \ldots}{n},$$

$$y - b = \frac{(y_1 - b) + (y_2 - b) + (y_3 - b) + \ldots}{n};$$

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots}{n},$$

$$y' = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \ldots}{n};$$

so daß also unsere Gleichungen auch für das neue, dem primitiven parallele, System gelten. Auch sind sie für jede zwei neue auf den primitiven senkrechte Axen richtig, weil man offenbar x und y vertauschen kann. Ist nun aber irgend ein anderes System gegeben; so kann man sich, weil unsere Gleichungen für alle parallelen Systeme gelten, wenn sie für eins gelten, dessen Axen durch den Anfang des primitiven-Systems gehend denken. Auch lassen sich, wie sogleich in die Augen fällt, diese beiden Systeme in immer paralleler Lage jederzeit so weit fortrücken, daß das gegebene Vieleck ganz zwischen die Schenkel des Winkels x'Ay (Fig. 103.) fällt, und man also, ohne der Allgemeinheit zu schaden, nur die beiden in der Figur dargestellten Fälle, jenachdem der Winkel $\alpha <$ oder $> 90^0$ ist, zu betrachten braucht. P ist irgend eine Spitze des gegebenen Vielecks. In Fig. 103. a. ist $AB = x$, $PB = y$; $AB' = x'$, $PB' = y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$, d. i.

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

In Fig. 103. b. dagegen ist $AB = -x$, $PB = y$; $AB' = x'$, $PB' = -y'$; $AB = AC - B'D$, $PB = B'C + PD$, d. i.

$$-x = x' \cos(180^0 - \alpha) - (-y') \cdot \cos(\alpha - 90^0),$$
$$y = x' \sin(180^0 - \alpha) + (-y') \cdot \sin(\alpha - 90^0),$$

welche Gleichungen sich leicht ganz auf dieselbe Form wie die obigen bringen lassen. Mittelst Elimination erhält man leicht aus ihnen:

$$x' = y \sin\alpha + x \cos\alpha, \quad y' = y \cos\alpha - x \sin\alpha.$$

Nun ist nach der Voraussetzung:

$$y \sin\alpha = \frac{y_1 \sin\alpha + y_2 \sin\alpha + y_3 \sin\alpha + \ldots}{n},$$

$$x \cos\alpha = \frac{x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\alpha + x_3 \cos\alpha + \ldots}{n};$$

Digitized by Google

$$y\cos\alpha = \frac{y_1\cos\alpha + y_2\cos\alpha + y_3\cos\alpha + \dots}{n},$$

$$x\sin\alpha = \frac{x_1\sin\alpha + x_2\sin\alpha + x_3\sin\alpha + \dots}{n};$$

$$y\sin\alpha + x\cos\alpha = \frac{(y_1\sin\alpha + x_1\cos\alpha) + (y_2\sin\alpha + x_2\cos\alpha) + \dots}{n},$$

$$y\cos\alpha - x\sin\alpha = \frac{(y_1\cos\alpha - x_1\sin\alpha) + (y_2\cos\alpha - x_2\sin\alpha) + \dots}{n};$$

d. i. nach dem so eben Bewiesenen:

$$x' = \frac{x'_1 + x'_2 + x'_3 + \dots}{n},$$

$$y' = \frac{y'_1 + y'_2 + y'_3 + \dots}{n}.$$

Die beiden Ausdrücke für x, y gelten also für jedes System, und der durch diese Coordinaten bestimmte Punkt ist also der Punkt der mittlern Entfernungen des Vielecks. (10.)

12. Legt man durch den Punkt der mittlern Entfernungen irgend eine gerade Linie als Axe der y; so ist $y = o$, und folglich auch

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots = o,$$

d. h. die Summe der Entfernungen aller Spitzen des Vielecks von jeder durch den Punkt der mittlern Entfernungen gehende gerade Linie $= o$. Eine solche Linie heißt eine Axe der mittlern Entfernungen. Umgekehrt gehen alle Axen, für welche

$$y_1 + y_2 + y_3 + \dots = o$$

ist, durch einen Punkt, nämlich durch den Punkt der mittlern Entfernungen. Denn man erhält denselben (11) durch die Coordinaten

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{n},$$

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots}{n}.$$

Ist nun $y_1 + y_2 + y_3 + \dots = o$; so ist auch $y = o$, und der Punkt der mittlern Entfernungen muß also in der Axe liegen, auf welcher die y senkrecht sind, d. i. in der gegebenen.

Digitized by Google

13. Durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung erhellet augenblicklich, daß im Dreieck für jede von einer Spitze nach der Mitte der Gegenseite gezogene gerade Linie als Axe $y_1 + y_2 + \ldots = o$ ist. Daher sind diese drei geraden Linien Axen der mittlern Entfernungen (12.), und schneiden sich in einem Punkte (Dreieck. 16.), nämlich in dem Punkte der mittlern Entfernungen des Dreiecks.

Eben so leicht erhellet, daß der Punkt der mittlern Entfernungen eins Parallelogramms der Durchschnittspunct seiner beiden Diagonalen ist.

14. Zieht man vom Punkte der mittlern Entfernungen nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien z_1, z_2, z_3, ..., und bezeichnet die Winkel, welche diese Linien mit irgend einer durch den Punkt der mittlern Entfernungen gezogenen geraden Linie, die man als Axe, den Punkt der mittlern Entfernungen als Anfang der x annehmen mag, einschließen, diese Winkel immer nach einer Seite hin von 0 bis 360° gezählt, durch α_1, α_2, α_3, ...; so ist

$$x_1 = z_1 \cos\alpha_1,\ x_2 = z_2 \cos\alpha_2,\ x_3 = z_3 \cos\alpha_3, \ldots$$
$$y_1 = z_1 \sin\alpha_1,\ y_2 = z_2 \sin\alpha_2,\ y_3 = z_3 \sin\alpha_3, \ldots$$

Folglich, da hier $x = y = o$ ist:

$$o = \frac{z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots}{n},$$

$$o = \frac{z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots}{n}$$

und demnach, wie auch die Transversale durch den Punkt der mittlern Entfernungen gelegt seyn mag:

$$o = z_1 \cos\alpha_1 + z_2 \cos\alpha_2 + z_3 \cos\alpha_3 + \ldots,$$
$$o = z_1 \sin\alpha_1 + z_2 \sin\alpha_2 + z_3 \sin\alpha_3 + \ldots.$$

15. Zieht man nun von irgend einem andern Punkte in der vorher durch den Punkt der mittlern Entfernungen willkührlich gelegten Axe nach allen Spitzen des Vielecks gerade Linien z'_1, z'_2, z'_3, ..., und bezeichnet die Entfernung des angenommenen Punktes vom Punkte der mittlern Entfernungen durch a; so bilden a, z_1, z'_1; a, z_2, z'_2; u. s. f. Dreiecke, auf deren Grundlinie a

Digitized by Google

die Perpendikel $y_1, y_2, y_3, \ldots$ von ihren Spitzen gefällt sind. Nimmt man nun auf das Vorzeichen des a und der x gehörig Rücksicht; so folgt aus Elem. II. 12. 13. und dann ferner mittelst (14.) sogleich, daß immer

$$z'_1{}^2 = z_1{}^2 + a^2 - 2ax_1 = z_1{}^2 + a^2 - 2az_1 \cos\alpha_1 ,$$
$$z'_2{}^2 = z_2{}^2 + a^2 - 2ax_2 = z_2{}^2 + a^2 - 2az_2 \cos\alpha_2 ,$$
$$z'_3{}^2 = z_3{}^2 + a_2 - 2ax_3 = z_3{}^2 + a^2 - 2az_3 \cos\alpha_3 ,$$

u. s. f. u. s. f.

Folglich durch Addition (14.):

$$z'_1{}^2 + z'_2{}^2 + z'_3{}^2 + \ldots = z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 + \ldots + na^2$$

d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend eines Punktes in der Ebene eines necks von dessen n Winkelspitzen ist immer der Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von den n Winkelspitzen nebst dem nfachen Quadrate der Entfernung des erstern Punktes von dem Punkte der mittlern Entfernungen gleich. Mittelst (13.) ergeben sich hieraus leicht specielle merkwürdige Sätze für Dreieck und Parallelogramm.

16. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, daß die Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von des Vielecks Spitzen die kleinste Quadratensumme geben.

17. Beschreibt man aus dem Punkte der mittlern Entfernungen mit willkührlichem Radius r einen Kreis; so ist für jeden Punkt der Peripherie dieses Kreises die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Größe, nämlich

$$= z_1{}^2 + z_2{}^2 + z_3{}^2 + \ldots + nr^2 . \quad (15.)$$

18. Setzt man letztere Größe $= q^2$; so erhält man

$$x = \sqrt{\frac{q^2 - z_1{}^2 - z_2{}^2 - z_3{}^2 - \ldots}{n}} .$$

Die Peripherie des aus dem Punkte der mittlern Entfernungen mit diesem Radius beschriebenen Kreises ist also der geometrische Ort der Punkte, für welche die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Spitzen des Vielecks eine constante Größe, nämlich $= q^2$ ist, wie schon

Digitized by Google

Apollonius beweiset. Apollonius ebene Oerter, wiederhergestellt von R. Simson, übers. von Camerer. Leipzig. 1796. S. 263 — 310. Ein ähnlicher Satz läßt sich auf ganz analoge Art von der Kugel beweisen. M. s. z. B. mein Lehrbuch der Statik. Halle. 1826. S. 624.

19. Von jeder der n Spitzen ziehe man jetzt an alle diese n Spitzen gerade Linien $\overset{1}{z}_1, \overset{1}{z}_2, \overset{1}{z}_3, \ldots$; $\overset{2}{z}_1, \overset{2}{z}_2, \overset{2}{z}_3, \ldots$; $\overset{3}{z}_1, \overset{3}{z}_2, \overset{3}{z}_3, \ldots$; $\ldots\ldots \overset{n}{z}_1, \overset{n}{z}_2, \overset{n}{z}_3, \ldots$, bezeichne die von dem Punkte der mittlern Entfernungen an die n Spitzen gezogenen geraden Linien durch $\overset{1}{a}, \overset{2}{a}, \overset{3}{a}, \ldots$, und setze

$$(\overset{1}{a})^2 + (\overset{2}{a})^2 + (\overset{3}{a})^2 + \ldots = S;$$

so ist nach (15.):

$$(\overset{1}{z}_1)^2 + (\overset{1}{z}_2)^2 + (\overset{1}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{1}{a})^2,$$
$$(\overset{2}{z}_1)^2 + (\overset{2}{z}_2)^2 + (\overset{2}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{2}{a})_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(\overset{n}{z}_1)^2 + (\overset{n}{z}_2)^2 + (\overset{n}{z}_3)^2 + \ldots = S + n(\overset{n}{a})^2.$$

Es ist aber offenbar $\overset{1}{z}_1 = \overset{2}{z}_2 = \overset{3}{z}_3 = \ldots = 0$, und allgemein $\overset{k}{z}_m = \overset{m}{z}_k$. Folglich ist das Aggregat aller Größen auf der linken Seite die doppelte Summe der Quadrate aller die n Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden geraden Linien. Bezeichnen wir nun diese doppelte Summe durch 2Σ; so erhält man durch beiderseitige Addition leicht $2\Sigma = 2nS$, $\Sigma = nS$, so daß also die Summe der Quadrate aller die Spitzen des Vielecks zu zweien mit einander verbindenden Linien der nfachen Summe der Quadrate der von dem Punkte der mittlern Entfernungen an die Spitzen gezogenen geraden Linien gleich ist. Im Dreieck ist also die Summe der Quadrate der drei Seiten der 3fachen Summe der Quadrate der drei geraden Linien gleich, welche von dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der die Spitzen mit den Mitten der Gegenseiten verbindenden geraden Linien nach den Spitzen des Dreiecks gezogen werden (13.).

Digitized by Google

20. Im Parallelogramm ABCD (Fig. 104.) ist (13. 19.) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 = 4(AE^2 + CE^2 + BE^2 + DE^2) = 2(4AE^2 + 4BE^2) = 2(AC^2 + BD^2)$, $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$, die Summe der Quadrate der vier Seiten der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich.

21. Ist Σ' die Summe der Quadrate der Entfernungen irgend einer Spitze A des Vielecks von allen übrigen, und K der Punkt der mittlern Entfernungen; so ist, wenn S, Σ ihre vorige (19.) Bedeutung behalten:

$$\Sigma = nS \text{ (19.)}, \quad \Sigma' = S + n \cdot AK^2 \text{ (15.)};$$

woraus durch Elimination von S:

$$AK = \frac{1}{n}\sqrt{(n\Sigma' - \Sigma)},$$

mittelst welcher Formel die Entfernung jeder Spitze von dem Punkte der mittlern Entfernungen berechnet werden kann.

22. Die Mittelpunkte der die n Spitzen je zwei verbindenden geraden Linien haben mit den Spitzen einerlei Punkt der mittlern Entfernungen. Die Coordinaten der Mittelpunkte jener Linien sind nämlich offenbar:

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(x_2 + x_1), \frac{1}{2}(x_3 + x_1), \ldots; \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_3), \frac{1}{2}(x_2 + x_3), \frac{1}{2}(x_3 + x_2), \ldots; \\
\quad\ldots\ldots \quad\ldots\ldots \quad\ldots\ldots \\
\frac{1}{2}(x_1 + x_n), \frac{1}{2}(x_2 + x_n), \frac{1}{2}(x_3 + x^n), \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2}(y_2 + y_1), \frac{1}{2}(y_3 + y_1), \ldots; \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_3), \frac{1}{2}(y_2 + y_3), \frac{1}{2}(y_3 + y_2), \ldots; \\
\quad\ldots\ldots \quad\ldots\ldots \quad\ldots\ldots \\
\frac{1}{2}(y_1 + y_n), \frac{1}{2}(y_2 + y_n), \frac{1}{2}(y_3 + y_n), \ldots;
\end{array}$$

wobei wir aber jede verbindende Linie doppelt gerechnet haben, so daß jede Coordinate in dieser Darstellung offenbar $2(n-1)$ mal vorkommt. Die Summen der Abscissen und Ordinaten der Mittelpunkte sind also

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(n-1)\{x_1 + x_2 + x_3 \ldots\}, \\
\frac{1}{2}(n-1)\{y_1 + y_2 + y_3 \ldots\},
\end{array}$$

und folglich, da es überhaupt $\frac{1}{2}n(n-1)$ Verbindungslinien, also eben so viele Mittelpunkte derselben giebt, wenn die Coordinaten des Punktes der mittlern Entfer-

Digitized by Google

nungen dieser Mittelpunkte durch (x), (y) bezeichnet werden:

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)\{x_1 + x_2 + x_3 + \dots\}}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

$$(y) = \frac{\frac{1}{2}(n-1)\{y_1 + y_2 + y_3 + \dots\}}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

oder

$$(x) = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots}{n},$$

$$(y) = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots}{n},$$

d. i. $(x) = x$, $(y) = y$ (11.), folglich der Punkt der mittlern Entfernungen der Spitzen zugleich der Punkt der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte aller Verbindungslinien derselben.

Sind (x), (y) die Coordinaten des Punktes der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines ecks, so ist

$$(x) = \frac{\frac{1}{2}(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_2+x_3)+\dots+\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_n)+\frac{1}{2}(x_n+x_1)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_n}{n},$$

d. i. $(x) = x$, und eben so $(y) = y$. Also ist auch der Punkt der mittlern Entfernungen der Mittelpunkte der Seiten eines ecks mit dem Punkte der mittlern Entfernungen der Spitzen einerlei, und man findet demnach z. B. den Punkt der mittlern Entfernungen irgend eines Vierecks, wenn man die Mittelpunkte seiner Gegenseiten verbindet, da diese Mittelpunkte die Spitzen eines Parallelogramms sind.

23. Sind A_1, A_2 irgend zwei Spitzen des Vielecks, K der Punkt der mittlern Entfernungen, $\overset{1}{k}_2$ der Mittelpunkt von $A_1 A_2$; so erhellet, wenn man sich das Dreieck $K A_1 A_2$ denkt, leicht, daß $A_1 K^2 + A_2 K^2 = 2A_1 \overset{1}{k}_2^2 + 2K \overset{1}{k}_2^2 = \frac{1}{2}A_1 A_2^2 + 2K \overset{1}{k}_2^2$ ist. Denkt man sich nun von A_1 nach allen den übrigen $n-1$ Spitzen gerade Linien gezogen; so ist

Digitized by Google

$$A_1K^2 + A_2K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_2^2 + 2K\overset{1}{k}_2^2,$$
$$A_1K^2 + A_3K^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_3^2 + 2K\overset{1}{k}_3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_1K^2 + A_nK^2 = \tfrac{1}{2}A_1A_n^2 + 2K\overset{1}{k}_n^2;$$
$$(n-1).A_1K^2 + A_2K^2 + A_3K^2 + \ldots + A_nK^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\{A_1A_2^2 + A_1A_3^2 + \ldots + A_1A_n^2\}$$
$$+ 2\{K\overset{1}{k}_2^2 + K\overset{1}{k}_3^2 + \ldots + K\overset{1}{k}_n^2\}$$
$$= (n-2).A_1K^2 + S,$$

wenn S die Summe der Quadrate der Entfernungen des Punktes der mittlern Entfernungen von den n Spitzen bezeichnet. Denkt man sich nun für jede der n Spitzen eine ähnliche Gleichung entwickelt, setzt die Summe der Quadrate aller die n Spitzen zu zweien verbindenden Linien $= \Sigma$, die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte derselben vom Punkte der mittlern Entfernungen aber $= S'$; so erhält man durch Addition aller Gleichungen, da offenbar jede Verbindungslinie, also auch jede Entfernung eines Mittelpunktes vom Punkte der mittlern Entfernungen zweimal vorkommt, leicht:

$$\tfrac{1}{2}.2\Sigma + 2.2S' = (n-2)S + nS,$$
$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S'.$$

Aber $\Sigma = nS$ (19.). Also durch Substitution $(n-2)S = 4S'$, $S' = \frac{1}{4}(n-2)S$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der Mittelpunkte aller die n Spitzen des Vielecks verbindenden geraden Linien vom Punkte der mittlern Entfernungen, ist dem vierten Theile der $(n-2)$ fachen Summe der Quadrate der Entfernungen der Spitzen von jenem Punkte gleich.

24. Die Anzahl der Mittelpunkte der verbindenden Linien ist $= \frac{1}{2}n(n-1)$. Setzen wir nun die Summe der Quadrate aller diese Mittelpunkte verbindenden Linien $= \Sigma'$; so ist $\Sigma' = \frac{1}{2}n(n-1)S'$ (19.). Die drei Gleichungen:

$$(n-1)S = \tfrac{1}{2}\Sigma + 2S',$$
$$\Sigma = nS,\ \Sigma' = \tfrac{1}{2}n(n-1)S'$$

dienen zur Bestimmung der vier Größen S, Σ, S', Σ' durch einander. So erhält man z. B.

Digitized by Google

$$(n-1)(n-2)\,\Sigma = 8\,\Sigma',$$
$$n(n-1)(n-2)\,S = 8\,\Sigma',$$

u. s. f., woraus sich wieder merkwürdige Sätze ergeben würden.

25. In jedem Vierecke ABCD (Fig. 105.), welches bei B und C rechtwinklig ist, ist, wenn wir den Winkel BAC = A setzen, immer $ABCD - 2.\Delta ABC = -\frac{1}{4}AD^2.\sin 2A$. Sey AB = b, AC = c; so ist

$$AD = b\sec\varphi = c\sec(A-\varphi),$$
$$b\cos(A-\varphi) = c\cos\varphi,$$
$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{c - b\cos A}{b\sin A}.$$

Folglich, wenn man zugleich b, c vertauscht:

$$BD = \frac{c - b\cos A}{\sin A},\quad CD = \frac{b - c\cos A}{\sin A};$$
$$AD^2 = \frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{\sin A^2}.$$

Durch Substitution der gefundenen Werthe für BD, CD erhält man nun leicht:

$$ABCD = \tfrac{1}{2}b.BD + \tfrac{1}{2}c.CD$$
$$= \frac{2bc\sin A^2 - (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\cos A}{2\sin A},$$

wenn man nur $2bc(\sin A^2 + \cos A^2)$ für 2bc setzt. Aber $2.\Delta ABC = bc\sin A$. Folglich

$$ABCD = bc\sin A - \frac{(b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\sin 2A}{4\sin A^2}$$
$$= 2.\Delta ABC - \tfrac{1}{4}AD^2.\sin 2A,$$

woraus die zu beweisende Gleichung unmittelbar folgt.

26. Sey nun ABCD ... ein willkührliches Vieleck, dessen Inhalt wir durch I bezeichnen wollen. Von irgend einem Punkte K' in der Ebene des Vielecks fälle man auf die Seite Lothe, und verbinde deren Fußpunkten durch gerade Linien, wodurch ein neues Vieleck A'B'C'D' .... von gleicher Seitenzahl entsteht, dessen Inhalt wir = I' setzen wollen; so hat man (25.):

$$K'BA'B' - 2.\Delta K'A'B' = -\tfrac{1}{4}K'B^2.\sin 2B,$$
$$K'CB'C' - 2.\Delta K'B'C' = -\tfrac{1}{4}K'C^2.\sin 2C,$$
$$K'DC'D' - 2.\Delta K'C'D' = -\tfrac{1}{4}K'D^2.\sin 2D,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$K'AN'A' - 2.\Delta K'N'A' = -\tfrac{1}{4}K'A^2.\sin 2A,$$

Digitized by Google

wenn N die letzte Spitze des gegebenen Vielecks ist. Die Summe der Vierecke ist offenbar = I, die der Dreiecke = I'. Also

$$I - 2I' = -\tfrac{1}{4}\{K'A^2 \cdot \sin 2A + K'B^2 \cdot \sin 2B + K'C^2 \cdot \sin 2C + \ldots\}$$

und, wenn das Viereck gleichwinklich ist:

$$I - 2I' = -\tfrac{1}{4}\{K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots\}\sin 2A,$$

Soll nun, indem A und I constant bleiben, I' constant bleiben; so muß $K'A^2 + K'B^2 + K'C^2 + \ldots$ constant bleiben. Diese Quadratensumme bleibt aber (17.) constant, wenn K' in der Peripherie eines aus dem Punkte der mittlern Entfernungen des Vielecks beschriebenen Kreises liegt. Dies giebt folgenden Satz: Fället man aus irgend einem Punkte der Peripherie eines aus dem Punkte der mittlern Entfernungen eines gleichwinkligen Vielecks beschriebenen Kreises auf dessen Seiten Perpendikel, und verbindet deren Fußpunkte durch gerade Linien; so ist der Inhalt des dadurch entstehenden eingeschriebenen Vielecks eine constante Größe. Dieser Satz für regelmäßige Polygone ist von L'Huilier (Bibliothèque universelle. 1824. p. 169.) gefunden, von Sturm und von einem Ungenannten (Annales d. Math. T. XV. p. 250. p. 45.) bewiesen, und von Steiner (Crelles Journal. B. I. S. 51.) noch mehr erweitert.

IV. Punkte kleinster Entfernung.

27. Man habe irgend zwei Punkte M, M' in der Ebene eines Vielecks. Die durch M und M' gehende gerade Linie nehme man als Axe der x an, M sey der Anfang der Coordinaten, die Entfernungen der Spitzen von M sollen durch $r_1, r_2, r_3, \ldots$, ihre Entfernungen von M' durch $r'_1, r'_2, r'_3, \ldots$, die Coordinaten wie vorher, die Entfernung des Punktes M' von M durch k, bezeichnet werden; so ist (15.):

$$r'_1 = \gamma(r_1^2 + k^2 - 2kx_1) = r_1\gamma(1 - c_1),$$
$$r'_2 = \gamma(r_2^2 + k^2 - 2kx_2) = r_2\gamma(1 - c_2),$$
$$r'_3 = \gamma(r_3^2 + k^2 - 2kx_3) = r_3\gamma(1 - c_3),$$
u. s. f. u. s. f.

Digitized by Google

für $c_1 = \frac{k(2x_1 - k)}{r_1^2}$, $c_2 = \frac{k(2x_2 - k)}{r_2^2}$ ....

Entwickelt man die Quadratwurzeln nach dem binomischen Lehrsatze, und ordnet nach Potenzen von k; so wird:

$$r'_1 = r_1 - k\frac{x_1}{r_1} + k^2\left(1 - \frac{x_1^2}{r_1^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_1} + \dots,$$

$$r'_2 = r_2 - k\frac{x_2}{r_2} + k^2\left(1 - \frac{x_2^2}{r_2^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_2} + \dots,$$

$$r'_3 = r_3 - k\frac{x_3}{r_3} + k^2\left(1 - \frac{x_3^2}{r_3^2}\right)\cdot\frac{1}{2r_3} + \dots,$$

u. s. f. u. s. f.

folglich, weil

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2,\ r_2^2 = x_2^2 + y_2^2,\ \dots;$$

$$1 - \frac{x_1^2}{r_1^2} = \frac{y_1^2}{r_1^2},\ 1 - \frac{x_2^2}{r_2^2} = \frac{y_2^2}{r_2^2},\ \dots$$

ist, wenn man auf beiden Seiten addirt:

$$\Sigma r' = \Sigma r - k\left\{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \dots\right\}$$
$$+ k^2\left\{\frac{1}{2r_1}\cdot\frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2}\cdot\frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3}\cdot\frac{y_3^2}{r_3^3} + \dots\right\}$$
$$+ \dots\dots\dots$$

wo die Bezeichnung Σr, $\Sigma r'$ leicht verständlich seyn wird. Man kann den Punkt M nun einer solchen Bedingung unterwerfen, daß für ihn Σr, d. i. die Summe seiner Entfernungen von allen Spitzen des Vielecks kleiner ist, als die Summe der Entfernungen aller andern in seiner Nähe liegenden Punkte von den Spitzen des Vielecks. Zu dem Ende muß also, für kleine k, $\Sigma r' > \Sigma r$ seyn. Man kann nun aber k so klein nehmen, daß das erste Glied

$$-k\left\{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \dots\right\}$$

obiger Reihe, rücksichtlich seines absoluten Werths, größer ist, als die Summe aller übrigen, so daß also für so kleine k das Zeichen der zu Σr addirten Größe bloß von diesem ersten Gliede abhängt, also positiv oder negativ ist, jenachdem

$$-\left\{\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \dots\right\}$$

es ist. Soll demnach, für kleine k, immer $\Sigma r' > \Sigma r$ seyn; so muß nothwendig

Digitized by Google

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0$$

seyn. Das zweite Glied

$$k^2 \cdot \left\{ \frac{1}{2r_1} \cdot \frac{y_1^2}{r_1^2} + \frac{1}{2r_2} \cdot \frac{y_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2r_3} \cdot \frac{y_3^2}{r_3^2} + \ldots \right\}$$

ist offenbar immer positiv, und man kann wieder k^2 so klein nehmen, daß der absolute Werth jenes Gliedes die Summe aller folgenden übertrifft, so daß also, für kleine k, immer $\Sigma r' > \Sigma r$ ist. Folglich giebt es in der Ebene jedes Vielecks Punkte, für welche die Summe ihrer Entfernungen von den Spitzen des Vielecks kleiner ist als die Summe der Entfernungen aller in ihrer Nähe liegenden Punkte von diesen Spitzen. Jene Punkte nennt man **Punkte kleinster Entfernung**, und sie sind, da man offenbar auch x mit y vertauschen kann, der Bedingung unterworfen, daß

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

ist.

28. Man denke sich nun die Coordinatenaxen durch den Punkt kleinster Entfernung M gelegt, schneide von ihm an auf den von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Stücke ϱ ab, und bezeichne die Coordinaten der Endpunkte A_1, A_2, A_3, ... dieser Stücke durch ξ_1, v_1; ξ_2, v_2; ξ_3, v_3; ....; so erhellet auch ohne Figur augenblicklich, daß

$$\frac{x_1}{r_1} = \frac{\xi_1}{\varrho}, \quad \frac{x_2}{r_2} = \frac{\xi_2}{\varrho}, \quad \frac{x_3}{r_3} = \frac{\xi_3}{\varrho}, \ldots;$$

$$\frac{y_1}{r_1} = \frac{v_1}{\varrho}, \quad \frac{y_2}{r_2} = \frac{v_2}{\varrho}, \quad \frac{y_3}{r_3} = \frac{v_3}{\varrho}, \ldots;$$

und folglich wegen der Bedingungsgleichungen (27.), wenn man zugleich mit ϱ multiplicirt:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0,$$
$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = 0.$$

Dies sind aber die Bedingungsgleichungen für den Punkt der mittlern Entfernungen der Punkte A_1, A_2, A_3, ... Folglich ist jeder Punkt der kleinsten Entfernung eines Vielecks der Mittelpunkt der Entfernungen der Punkte,

Digitized by Google

welche man erhält, wenn man auf den, von dem Punkte kleinster Entfernung nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von diesem Punkte aus willkührliche, aber gleiche, Stücke abschneidet.

29. Ist umgekehrt ein Punkt M in der Ebene eines Vielecks der Punkt mittlerer Entfernungen der gleich weit von ihm entfernten Punkte A_1, A_2, A_3, ...; so ist, wenn man sich die Coordinatenaxen wieder durch M gelegt denkt, und die vorige Bezeichnung beibehält (12.):

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots = 0,$$
$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots = 0,$$

woraus wie vorher folgt, daß

$$\frac{x_1}{r_1} + \frac{x_2}{r_2} + \frac{x_3}{r_3} + \ldots = 0,$$
$$\frac{y_1}{r_1} + \frac{y_2}{r_2} + \frac{y_3}{r_3} + \ldots = 0,$$

M also ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks, der vorige Satz folglich auch umgekehrt richtig ist.

Im Viereck ist also der Durchschnittspunkt der Diagonalen ein Punkt kleinster Entfernung, weil, wenn man von den Diagonalen gleiche Stücke abschneidet, und deren Endpunkte verbindet, ein Parallelogramm entsteht, dessen Punkt der mittlern Entfernungen besagter Durchschnittspunkt ist (13.).

30. Giebt es in der Ebene eines Vielecks einen Punkt M von solcher Beschaffenheit, daß die von ihm nach den Spitzen gezogenen Linien lauter gleiche Winkel einschließen; so ist M ein Punkt kleinster Entfernung des Vielecks. Schneidet man nämlich auf den von M nach den Spitzen gezogenen geraden Linien von M aus gleiche willkührliche Stücke ab, und verbindet deren Endpunkte durch gerade Linien; so entsteht offenbar ein reguläres (39.) Vieleck, dessen Mittelpunkt M ist. Also (40.) ist M der Punkt der mittlern Entfernungen dieses regulären Vielecks, folglich der Punkt kleinster Entfernung des gegebenen Vielecks.

31. Sind alle Winkel eines Dreiecks $< \frac{4}{3}$ R; so giebt es innerhalb desselben immer einen Punkt von solcher Be-

Digitized by Google

Beschaffenheit, daß die von ihm nach den Spitzen gezogenen geraden Linien gleiche Winkel (jeder $= \frac{2}{3}R$) einschließen, und nur einen. Wären alle drei Winkel eines Dreiecks $< \frac{2}{3}R$; so wäre die Summe aller $< 2R$. Folglich muß es wenigstens einen geben, welcher $\leqq \frac{2}{3}R$. Dieser Winkel sey BAC (Fig. 106.). Ueber AB und AC beschreibe man zwei Kreisabschnitte, deren jeder einen Winkel $= \frac{2}{3}R$ faßt (Elem. III. 33.); so müssen die Bogen dieser Segmente sich nothwendig zwischen den Schenkeln des Winkels BAC schneiden, weil dieser Winkel $< \frac{2}{3}R$, $\leqq \frac{2}{3}R$ ist, und jede der beiden durch A an die Bogen gezogenen Berührenden mit AB und AC einen Winkel $= \frac{2}{3}R$ einschließt, indem jeder dieser beiden Winkel dem Winkel im entgegengesetzten Kreisabschnitte gleich (Elem. III. 32.), also die Ergänzung von $\frac{2}{3}R$ zu $2R$ (Elem. III. 22.), d. i. $= \frac{2}{3}R$ ist. Da nun der Durchschnittspunkt M der beiden Bogen zwischen den Schenkeln von BAC liegt; so muß M nothwendig innerhalb des Dreiecks liegen, weil der der Spitze A zugekehrte Winkel BMC $= \frac{2}{3}R$ ein converer Winkel ist, welches nicht möglich wäre, wenn M außerhalb des Dreiecks läge. Da nun AMB $=$ AMC $= \frac{2}{3}R$ ist; so ist auch BMC $= \frac{2}{3}R$, und folglich die drei von AM, BM, CM eingeschlossenen Winkel einander gleich. Da die beiden Bogen der Kreisabschnitte, welche $\frac{2}{3}R$ fassen, sich nur in einem Punkte schneiden können; so giebt es auch nur einen Punkt wie M.

32. Da es in jedem Dreieck, dessen Winkel alle $< \frac{2}{3}R$ sind, innerhalb immer einen Punkt giebt, für welchen die von ihm an die Spitzen gezogenen Linien gleiche Winkel einschließen; so giebt es für jedes solche Dreieck immer auch einen Punkt kleinster Entfernung innerhalb (30.). Auch giebt es nur einen Punkt kleinster Entfernung. Gäbe es nämlich zwei M, M′; so müßten wenigstens zwei der von AM′, BM′, CM′, gebildeten Winkel ungleich seyn, weil es nur einen Punkt giebt, wo diese Winkel gleich sind (31.). Der Punkt M′ wäre aber der Punkt der mittlern Entfernungen auf AM′, BM′, CM′ von M′ gleich weit entfernter Punkte (28.). Folglich müßten, wenn man die den

Digitized by Google

beiden ungleichen Winkel zugleich als Schenkel angehörende Linie unter AM′, BM′, CM′ als Axe annähme, die Ordinaten der auf den beiden andern Linien gleichweit von M′ entfernten Punkte einander gleich seyn (12.), welches jedoch wegen der Ungleichheit der Winkel offenbar unmöglich ist.

33. Hat nun ein Dreieck einen Winkel BAC (Fig. 107.), welcher $\geqq \frac{4}{3}$R ist; so kann der Punkt kleinster Entfernung nicht innerhalb liegen, weil sonst AMB = AMC = $\frac{4}{3}$R (32.), also nothwendig MAB′ $< \frac{2}{3}$R, MAC $< \frac{2}{3}$R, BAC $< \frac{4}{3}$R seyn müßte. In einer Seite des Dreiecks kann aber der Punkt kleinster Entfernung überhaupt eben so wenig liegen, als außerhalb des Dreiecks, weil sich von einem solchen Punkte nie nach den Spitzen drei, gleiche Winkel mit einander einschließende, gerade Linien ziehen lassen, wie es doch in vorliegendem Falle möglich seyn müßte (32.). Daher muß der Punkt kleinster Entfernung in zwei Seiten zugleich, d. h. in einer Spitze des Dreiecks, liegen. Da aber offenbar BA + BC > AB + AC, CA + CB > AB + AC ist; so muß der Punkt kleinster Entfernung in der Spitze C des stumpfen Winkels liegen.

V. In und um den Kreis beschriebene Vielecke.

34. Ein Vieleck heißt in einen Kreis beschrieben, wenn alle seine Seiten Sehnen, um einen Kreis, wenn alle seine Seiten Berührende sind. Im erstern Falle heißt der Kreis um, im letztern in das Vieleck beschrieben. Eingeschriebene Vielecke haben einen Mittelpunkt der Spitzen, umschriebene einen Mittelpunkt der Seiten. Erstere heißen centrisch nach den Spitzen, letztere centrisch nach den Seiten.

35. Bezeichnet man in einem eingeschriebenen 2neck, also mit gerader Seitenzahl, die Vieleckswinkel nach der Reihe durch (1), (2), (3), (4), u. s. f.; so ist immer

(1) + (3) + (5) + (7) + .. = (2) + (4) + (6) + (8) + ..

Digitized by Google

Wir wollen annehmen, der Satz gelte für das 2neck. Hat man nun ein $(2n+2)$eck, so schneide man durch die Diagonale, welche die Winkelspitzen (1) und $(2n)$ mit einander verbindet, ein Viereck ab, so daß ein 2neck übrig bleibt. Die an der gezogenen Diagonale liegenden Winkel des 2ecks seyen $(1)'$, $(2n)'$, die des Vierecks $'(1)$, $'(2n)$; so hat man nach der Annahme, und nach dem Art. Viereck (9.)

$$(1)' + (3) + (5) + \ldots + (2n-1) = (2) + (4) + (6) + \ldots + (2n)',$$
$$'(1) + (2n+1) = '(2n) + (2n+2):$$

Woraus, da offenbar $(1)' + '(1) = (1)$, $(2n)' + '(2n) = (2n)$ ist, durch Addition sogleich folgt:

$$(1) + (3) + (5) + \ldots + (2n-1) + (2n+1) = (2) + (4) + (6) + \ldots + (2n) + (2n+2).$$

Der Satz gilt also für das $(2n+2)$eck, wenn er für das 2neck gilt. Er gilt aber für das Viereck, da für dieses immer $(1) + (3) = (2) + (4)$ (Viereck. 9.). Also ist er allgemein.

36. Hat man ein eingeschriebenes Vieleck von $2n-1$, d. i. einer ungeraden Anzahl von Seiten; so theile man durch einen nach irgend einer Spitze gezogenen Radius den Winkel an derselben in zwei Winkel, und bezeichne, diese beiden Winkel mit eingeschlossen, alle Winkel des Vielecks durch (1), (2), (3), $\ldots$ $(2n-1)$, $(2n)$; so hat man auch hier

$$(1) + (3) + \ldots + (2n-1) = (2) + (4) + \ldots + (2n).$$

Ist nämlich in Fig. 108. der Radius CA gezogen; so denke man sich durch A eine Tangente gezogen, und durch eine Diagonale, welche dem Winkel A gegenüber liegt, ein Dreieck abgeschnitten, so daß ein $(2n-2)$eck übrig bleibt. In diesem ist (35.):

$$(1)' + (3) + \ldots + (2n-3) = (2) + (4) + \ldots + (2n-2)'.$$

Aber (Elem. III. 32.) $\alpha = '(2n-2)$, $\beta = '(1)$, auch $\alpha + (2n) = 90^0$, $\beta + (2n-1) = 90^0$, d. i.

$$'(1) + (2n-1) = '(2n-2) + (2n).$$

Dies, zu obiger Gleichung addirt, giebt, da

Digitized by Google

$$(1)' + '(1) = (1)\,;\quad (2n-2)' + '(2n-2) = (2n-2)$$

ist, die zu beweisende Gleichung.

Diese Sätze sind Erweiterungen des Satzes vom eingeschriebenen Viereck.

37. Sehr leicht überzeugt man sich, daß in jedem umschriebenen Vieleck von gerader Seitenzahl, die Summe der 1ten, 3ten, 5ten, ... Seite der Summe der 2ten, 4ten, 6ten, ... gleich ist. In einem umschriebenen Vieleck von ungerader Seitenzahl dagegen ist die Summe der 2ten, 4ten, 6ten, ..., und des ersten Theils der 1ten Seite, bis an ihren Berührungspunkt, gleich der Summe des zweiten Theils der 1ten Seite, von ihrem Berührungspunkte an, und der 3ten, 5ten, 7ten, ... Seite. Die Beweise beider Sätze folgen sogleich aus dem Satze, daß die beiden von einem Punkte außerhalb eines Kreises an denselben gezogenen Berührenden einander gleich sind.

38. Um einen Kreis sey ein Vieleck beschrieben, und mit dem Kreise ein concentrischer Kreis verzeichnet. Zieht man von irgend einem Punkte in der Peripherie des zweiten Kreises gerade Linien an die Berührungspunkte; so ist die Summe der Producte der Quadrate dieser Linien in die entsprechenden Seiten des umschriebenen Polygons eine constante Größe. Die Halbmesser der beiden Kreise seyen r, R, die Seiten des Vielecks a, b, c, d, ..., die entsprechenden Berührungspunkte, A, B, C, D, ..., der angenommene Punkt in der Peripherie des zweiten Kreises sey P und O der gemeinschaftliche Mittelpunkt beider Kreise. Die Winkel POA, POB, POC, ..., von PO an nach einer Seite hin von 0^0 bis 360^0 gezählt, bezeichne man durch α, β, γ, δ, ...; so ist, wie leicht erhellet (Trigonometrie. 7.):

$$AP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\alpha\,,$$
$$BP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\beta\,,$$
$$CP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\gamma\,,$$
$$DP^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\delta\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots$$

Digitized by Google

$$= (r^2 + R^2)(a + b + c + d + \ldots) - 2rR(a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots).$$

Aus (Fig. 109.) erhellet aber sogleich, daß die Winkel α, β, γ, δ, ... den Winkeln gleich sind, welche die Seiten des Polygons mit einer durch O auf OP senkrecht gezogenen Linie OP' einschließen, diese Winkel nach der Richtung der Seiten nach einer Seite hin ebenfalls von 0° bis 360° gezählt. Folglich ist (Trigonometrie. 176.)

$$o = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots,$$

also

$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots = (r^2 + R^2)(a + b + c + d + \ldots),$$

und folglich die Summe

$$AP^2.a + BP^2.b + CP^2.c + DP^2.d + \ldots$$

eine constante Größe, wo auch der Punkt P in der Peripherie des zweiten, mit dem eingeschriebenen concentrischen, Kreises liegen mag. Wird der Punkt in der Peripherie des eingeschriebenen Kreises selbst angenommen; so ist obige Summe

$$= 2r^2(a + b + c + d + \ldots).$$

Ueber in und um den Kreis beschriebene Vielecke, besonders auch über die schwierige Aufgabe, in einen Kreis ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen, vergl. den Art. Kreis (115.). Eine merkwürdige Eigenschaft des eingeschriebenen Sechsecks s. auch im Art. Transversale (35. 36.).

VI. Reguläre Vielecke.

39. Vielecke deren Seiten und Winkel einander gleich sind, heißen reguläre oder regelmäßige Polygone. Die Elemente lehren, daß um und in jedes Polygon dieser Art ein Kreis beschrieben werden kann, oder daß jedes reguläre Polygon centrisch nach den Spitzen und Seiten ist. Der Halbmesser des um das Polygon beschriebenen Kreises heißt der große Radius oder auch bloß der Radius, der Halbmesser des in das Polygon beschriebenen Kreises der kleine Radius des Polygons, der gemeinschaftliche Mittelpunkt

Digitized by Google

beider Kreise des Centrum des Polygons, der von zwei großen, oder zwei kleinen Radien eingeschlossene Winkel der Centriwinkel, ein Perpendikel von dem Mittelpunkte auf eine Seite heißt auch Apothema. Ist das Polygon ein reguläres neck; so ist der Centriwinkel $= \frac{4R}{n}$, der Winkel am Umfange $= \frac{2(n-2)R}{n}$ (3.). Der Polygon- und Centriwinkel machen immer zusammen $2R = 180^0$.

Besonders wichtig ist die Beschreibung der regulären Polygone in und um den Kreis. Die Elemente lehren, daß diese Beschreibung dann allemal möglich ist, wenn der Kreis sich in so viele gleiche Theile geometrisch theilen läßt, als das zu beschreibende Polygon Seiten hat. Wir werden, indem wir dies als hinlänglich bekannt voraussetzen, nachher auf diesen Gegenstand zurück kommen.

40. Der Mittelpunkt eines regulären Polygons ist zugleich sein Punkt der mittlern Entfernungen. Man kann sich hiervon auf folgende einfache Art überzeugen. Ist die Seitenzahl gerade; so nehme man den Durchmesser BE (Fig. 110.) als Axe der x an. Dieser Durchmesser theilt aber das Vieleck offenbar in zwei congruente Theile, so daß also augenscheinlich $y_1 + y_2 + y_3 + \ldots = 0$,

$$y = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + \ldots}{n} (11.) = 0,$$

folglich BE eine Axe der mittlern Entfernungen ist, in welcher demnach der Punkt der mittlern Entfernungen liegt. Eben so liegt aber auch dieser Punkt in AD, folglich in dem Durchschnittspunkte von BE und AD, d. i. in dem Mittelpunkte. Ganz eben so zeigt man bei regulären Vielecken mit ungerader Seitenzahl (Fig. 111.), daß der Punkt der mittlern Entfernungen sowohl in BH, als in AL, folglich im Durchschnittspunkte beider, d. i. im Mittelpunkte K liegen muß.

41. Drückt man diesem gemäß die oben (III.) bewiesenen allgemeinen Sätze vom Punkte der mittlern Entfernungen aus; so ergeben sich viele merkwürdige Eigenschaften der regulären Vielecke, wovon wir hier nur einige ausheben.

Digitized by Google

In jedem regulären neck ist die Summe der Quadrate der von irgend einem Punkte in seiner Ebene nach den Spitzen gezogenen Linien gleich der nfachen Summe der Quadrate des Radius des umschriebenen Kreises und der den Mittelpunkt mit jenem Punkte verbindenden geraden Linie (15.).

Einen allgemeinern Satz, von Lentheric bewiesen, s. in den Annales d. Math. T. XVI. p. 20.

Die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes in der Peripherie irgend eines, mit einem regulären Polygon von n Seiten einerlei Mittelpunkt habenden, Kreises von allen Spitzen des Polygons ist gleich der nfachen Summe des Quadrats des Halbmessers des gegebenen Kreises und des Quadrats des Halbmessers r des Polygons, also eine constante Größe, wo man auch den Punkt in der Peripherie annehmen mag (17.). Ist der Kreis, in dessen Peripherie der Punkt angenommen wird, um das Polygon beschrieben; so ist besagte Quadratensumme offenbar $= 2nr^2$. Theilt man also die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile, und zieht von irgend einem Punkte in der Peripherie nach allen Theilpunkten gerade Linien; so ist, wenn r der Radius des Kreises ist, die Summe der Quadrate dieser Linien $= 2nr^2$, also eine constante Größe, wo man auch den Punkt in der Peripherie annehmen mag.

Die Summe der Quadrate aller Seiten und Diagonalen eines regulären necks ist dem mit n^2 multiplicirten Quadrate des Radius des umschriebenen Kreises gleich (19.). Ist a die Seite des regulären Dreiecks, r der Radius des umschriebenen Kreises; so ist $3a^2 = 9r^2$, $a = r\sqrt{3}$, $r = a:\sqrt{3}$.

Fällt man von irgend einem Punkte in der Peripherie eines mit einem regulären Polygon einerlei Mittelpunkt habenden Kreises auf die Seiten des Polygons Perpendikel, und verbindet deren Fußpunkte durch gerade Linien; so ist der Inhalt des entstehenden Vielecks eine constante Größe, wo auch der angenommene Punkt in der Peripherie des Kreises liegen mag (26.).

Digitized by Google

Fällt man von irgend einem Punkte in der Ebene eines regulären Vielecks, dessen Seite $= s$ sey, auf alle Seiten Perpendikel $p, p', p'', p''', \ldots$, wobei die vom angenommenen Punkte aus in das Polygon hinein gehenden Perpendikel als negativ angesehen werden sollen; so ist, wenn P der Inhalt des Polygons, offenbar

$$P = \tfrac{1}{2}(p + p' + p'' + p''' + \ldots)s.$$

Ist aber ϱ der Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, und die Seitenzahl $= n$; so ist $P = \frac{1}{2}n\varrho s$. Also

$$p + p' + p'' + p''' + \ldots = n\varrho,$$

d. h. die Summe aller von irgend einem Punkte auf die Seiten eines regulären necks gefällten Perpendikel ist dem nfachen kleinen Radius gleich, also eine constante Größe.

Ist in (38.) das um den Kreis beschriebene Polygon regulär; so ist $a = b = c = \ldots$, $a + b + c + \ldots = na$, wenn n die Seitenzahl, wodurch sich die dortige Gleichung in

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + \ldots = n(R^2 + r^2)$$

verwandelt. Zieht man also von irgend einem Punkte in der Peripherie eines mit einem umschriebenen regulären Polygon von n Seiten einerlei Mittelpunkt habenden Kreises nach allen Berührungspunkten desselben gerade Linien; so ist die Summe der Quadrate dieser Linien der nfachen Summe der Quadrate der Radien des eingeschriebenen und des ihm concentrischen Kreises gleich, oder $=$ dem 2nfachen Quadrate des Radius des eingeschriebenen Kreises, wenn der Punkt in der Peripherie dieses Kreises selbst angenommen wird.

42. Schon oben ist bemerkt, daß die Beschreibung der regulären Polygone in und um den Kreis auf die geometrische Theilung der Kreisperipherie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zurückkommt. Schon die Eintheilung eines Bogens in drei gleiche Theile übersteigt die Kräfte der Elementargeometrie, wenn auch die geometrische Theilung des ganzen Kreises in drei gleiche Theile möglich ist. M. vergl. den Art. Trisection des Winkels. Euclid lehrt bloß die Eintheilung des Kreises in 4, 6, 5 und 15 gleiche Theile, und, da sich jeder Bogen geometrisch

Digitized by Google

halbiren läßt, so kann man obige Zahlen auch willkührlich oft verdoppeln und halbiren, wodurch man andere geometrische Theilungen erhält. Alles dieses ist aus den Elementen bekannt. Mascheroni macht in seiner Géometrie du compas (Uebers. v. Grüson. Berlin. 1825.) diese und andere Theilungen zur praktischen Anwendung geschickter, indem er, den Gebrauch des Lineals vermeidend, sie bloß mit dem Zirkel auszuführen lehrt. Renaldinus (De resolutione et compositione mathematica. Lib. II. f. 367.) glaubte eine allgemeine Regel zur Beschreibung jedes regulären Polygons in den Kreis gefunden zu haben, deren Unrichtigkeit aber schon Wolf (Elementa Analyseos finitor. §. 292.) nachgewiesen hat, und in der That ist seit Euclid die Theorie der Eintheilung des Kreises in gleiche Theile um keinen Schritt wesentlich gefördert worden, bis im Jahre 1801 Gauß eine seiner glänzendsten Entdeckungen bekannt machte. Er hat nämlich folgenden merkwürdigen Satz gefunden: Wenn die Seitenzahl n eines regulären Polygons eine Primzahl, und $n-1 = 2^{\alpha} 3^{\beta} 5^{\gamma} \ldots$ ist; so läßt sich die Eintheilung des Kreises in n gleiche Theile immer auf die Auflösung von α Gleichungen des 2ten, β Gleichungen des 3ten, γ Gleichungen des 5ten Grades u. s. f. zurückführen. Der Beweis dieses Satzes beruht auf sehr feinen Untersuchungen der höhern Arithmetik, und hängt unmittelbar mit der Auflösung einer gewissen merkwürdigen Klasse von Gleichungen zusammen, kann aber hier, ohne zu große Weitläufigkeit nicht mitgetheilt werden. Wir haben daher diese merkwürdige und wichtige Theorie in die Zusätze zu diesem Werke, in den Artikel Gleichung, verwiesen, wo sie ganz und im Zusammenhange dargestellt werden soll. Der 7te Abschnitt (De aequationibus circuli sectiones definientibus) der Disquisitiones arithmeticae (Lips. 1801.) des berühmten deutschen Geometers giebt über diesen Gegenstand die vollständigste und beste Belehrung, hängt aber innig mit dem Gegenstande des ganzen Werkes zusammen. Auch in Legendre Théorie des nombres. V. Partie.

Digitized by Google

p. 435 — 480. ist eine klare Darstellung dieser Untersuchungen gegeben. Außerdem s. m. noch eine Abhandlung von Abel in Crelles Journal. IV. 2. 5. 131. wo die Untersuchung zugleich noch erweitert ist. Ist also $n-1=2^\alpha$; so wird zu der Eintheilung des Kreises in n gleiche Theile nur die Auflösung von α quadratischen Gleichungen erfordert, und solche Theilungen sind also immer durch die Elementargeometrie ausführbar, weil jede quadratische Gleichung sich bloß mittelst der geraden Linie und des Kreises construiren läßt. Für $n=17$, wo $n-1=2^4$, ist also die elementar-geometrische Construction möglich. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir nun zur Construction der euclidischen regulären Polygone und des regulären 17ecks in den Kreis über, werden dabei aber vorzüglich uns des Calcus bedienen.

43. Aus der Seite $AB=a$ (Fig. 112.) eines necks im Kreise läßt sich immer die Seite $AD=a'$ des 2necks im Kreise finden. Denn es ist, den Radius $=1$ gesetzt, $a'^2=\frac{1}{4}a^2+DE^2=\frac{1}{4}a^2+(1-\sqrt{(1-\frac{1}{4}a^2)})^2=2-2\sqrt{(1-\frac{1}{4}a^2)}$. Also

$$a'=\sqrt{(2-\sqrt{(4-a^2)})}.$$

Mittelst einer successiven Anwendung dieser Formel erhält man leicht für die Seiten des 2necks, 4necks, 8necks, 16necks, u. s. f. im Kreise aus der Seite a des necks folgende Ausdrücke:

$$\sqrt{(2-\sqrt{(4-a^2)})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(4-a^2)})})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(4-a^2)})})})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(4-a^2)})})})})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(4-a^2)})})})})})},$$

u. s. f. u. s. f.

deren Gesetz leicht erhellet. Für einen beliebigen Radius r braucht man diese Ausdrücke bloß mit r zu multipliciren. Nur bezieht sich a immer auf den Radius $=1$.

44. Die Seite des necks findet man aus der Seite des 2necks durch die Formel

$$a=a'\sqrt{(4-a'^2)}.$$

Für einen beliebigen Radius r muß man diesen Ausdruck

Digitized by Google

mit r multipliciren. Aber a' bezieht sich immer auf den Radius = 1.

45. Die Seite des umschriebenen necks sey = b; so ist (Fig. 113.) AF = $\frac{1}{2}$b. Aber AF : AE = AC:CE, $\frac{1}{2}$b : $\frac{1}{2}$a = 1 : $\sqrt{(1-\frac{1}{4}a^2)}$, woraus

$$b = \frac{2a}{\sqrt{(4-a^2)}}.$$

46. Ein von zwei Radien und einer Seite eines eingeschriebenen regulären Polygons gebildetes gleichschenkliges Dreieck wollen wir ein Bestimmungsdreieck nennen. Der Winkel an dessen Spitze ist der Centriwinkel, der Winkel an der Grundlinie der halbe Polygonwinkel des regulären Vielecks. Der Centriwinkel des regulären Vierecks ist = 90°. Folglich die Seite = $\sqrt{2}$. Also (43.) die Seite des eingeschriebenen regulären Vierecks, Achtecks, Sechzehnecks, u. s. f.:

$\sqrt{2}$,
$\sqrt{(2-\sqrt{2})}$,
$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}$;
$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}$,
$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})})}$,
u. s. f. u. s. f.

immer den Radius = 1 gesetzt. Folglich sind (45.) die Seite des umgeschriebenen regulären Vierecks, Achtecks, Sechzehnecks, u. s. f:

2,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}}}$,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}}}$,
$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})})}}}$,
u. s. f. u. s. f.

Durch verschiedene Reductionen kann man diesen Ausdrücken einfachere Gestalten geben. Das Gesetz ist aber dann nicht so einleuchtend. Für das Achteck erhält man z. B. die Seite = $2(\sqrt{2}-1)$. Die Hälfte dieser

Digitized by Google

Seite ist $= \sqrt{2} - 1$, nämlich = der Differenz zwischen der Seite des eingeschriebenen Vierecks und dem Radius. Vergleichungen dieser Art würden sich hier und im Folgenden mehrere anstellen lassen. Da sie sich aber alle leicht ergeben; so werden sie der Kürze wegen größtentheils übergangen.

47. Der Centriwinkel des eingeschriebenen regulären Sechsecks ist $= 60^0$, und eben so groß der halbe Polygonwinkel; das Bestimmungsdreieck demnach ein gleichseitiges. Folglich die Seite des regulären Sechsecks dem Radius gleich, $= 1$, so daß sich also der Radius genau 6mal in der Peripherie herumtragen läßt, wodurch sogleich die Beschreibung des regulären Sechsecks in den Kreis gegeben. Die Seite des eingeschriebenen regulären Dreiecks ist also (44.) $= \sqrt{3}$, und folglich die Seiten des eingeschriebenen regulären Dreiecks, Sechsecks, Zwölfecks, u. s. f.:

$$\sqrt{3},$$
$$1,$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{3})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{3})})},$$
$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})},$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

Hieraus ergeben sich ferner die Seiten der umgeschriebenen regulären Vielecke von gleicher Seitenzahl:

$$2\sqrt{3},$$
$$2\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})}}},$$
$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})}}{2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})}}},$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

Die Seite des umgeschriebenen regulären Zwölfecks ist

Digitized by Google

einfacher ausgedrückt, $= 2(2 - \sqrt{3})$, also das Doppelte von der Seite des eingeschriebenen regulären Zwölfecks.

48. Der Centriwinkel des regulären Zehnecks ist $= 36°$. Also der halbe Polygonwinkel $= 90° - 18° = 72°$. Im Bestimmungsdreieck ist also der Winkel an der Grundlinie doppelt so groß als der Winkel an der Spitze. Ist also ABC (Fig. 114.) das Bestimmungsdreieck für das Zehneck, dessen Seite AB, und man halbirt den Winkel BAC durch AD; so überzeugt man sich leicht, daß ADC, ADB gleichschenklige Triangel, also $CD = AD = AB$, und die Triangel ABC, ABD ähnlich sind, woraus $BC : AB = AB : BD$, oder, für $AB = x$, $1 : x = x : 1 - x$, $x^2 = 1 - x$, $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Nach (44.) ergiebt sich hieraus leicht die Seite des eingeschriebenen regulären Fünfecks $= \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$. Also hat man (43.) die Seiten des eingeschriebenen regulären Fünfecks, Zehnecks, Zwanzigecks, u. s. f.:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}},$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1),$$

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)},$$

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(2+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}\right)},$$

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(2+\sqrt{\left(2+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}\right)}\right)},$$

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{\left(2+\sqrt{\left(2+\sqrt{\left(2+\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{5}}{2}}\right)}\right)}\right)}\right)},$$

u. s. f. u. s. f.

Für die umschriebenen Vielecke von gleicher Seitenzahl erhält man nach (45.), $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} = \alpha$ setzend:

$$2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}},$$

$$\frac{(\sqrt{5}-1)\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}},$$

$$2\sqrt{\frac{2-\alpha}{2+\alpha}},$$

$$2\sqrt{\frac{2-\sqrt{(2+\alpha)}}{2+\sqrt{(2+\alpha)}}}$$

Digitized by Google

$$2r\frac{2-r(2+r(2+a))}{2+r(2-r(2+a))},$$
$$2r\frac{2-r(2+r(2+r(2+a)))}{2+r(2+r(2+r(2+a)))},$$
u. s. f. u. s. f.

Die Seiten des umschriebenen Fünf- und Zehnecks sind, einfacher ausgedrückt, auch $2r(5-2r5)$ und $2r\frac{5-2r5}{5}$.

49. Da $1+\frac{1}{4}(r5-1)^2 = \frac{1}{2}(5-r5)$ ist; so ist immer das Quadrat des Radius und das Quadrat der Seite des Zehnecks dem Quadrate der Seite des Fünfecks gleich, und der Radius, die Seite des Zehnecks und die Seite des Fünfecks bilden folglich ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse die Seite des Fünfecks ist. Die Seite des Zehnecks ist $= r\frac{5}{4}-\frac{1}{2} = r(1+(\frac{1}{2})^2)-\frac{1}{2}$, oder, wenn man mit r multiplicirt, $= r\left(r^2+\left(\frac{r}{2}\right)^2\right)-\frac{r}{2}$. Dies giebt unmittelbar folgende einfache Construction der Seite des Zehn- und Fünfecks im Kreise. Man halbire (Fig. 115.) den Halbmesser CB in D, ziehe CE senkrecht auf AB, ziehe DE, und beschreibe mit diesem Radius einen Bogen EF; so ist, wegen obigen Ausdrucks, FC die Seite des Zehnecks, und folglich die Hypotenuse FE des rechtwinkligen Dreiecks FCE die Seite des Fünfecks.

50. Die Diagonalen des Fünfecks sind offenbar alle einander gleich, und das Dreieck ABC (Fig. 116.) ist gleichschenklich. Auch sind die Winkel ABC, ACB, als auf den doppelten Bogen stehend, doppelt so groß als BAC, und man hat, für $AB = d$, $BC = a$, ganz wie in (48.), $AB:BC = BC:AB-BC$, $d:a = a:d-a$, $a^2 = d^2-ad$, $d = \frac{1}{2}a(1+r5) = r\frac{5+r5}{2}$ (48.). Auch ist

$$d = \tfrac{1}{2}a\cdot\frac{(r5+1)(r5-1)}{r5-1} = a\cdot\frac{2}{r5-1} = a:\tfrac{1}{2}(r5-1).$$

Setzen wir also die Seite des Zehnecks $= a'$; so ist (48.) immer $d = \frac{a}{a'}$ = der Seite des Fünfecks, dividirt durch die Seite des Zehnecks, oder, für den Radius r, $d = \frac{ra}{a'}$, $a':a = r:d$, die Seite des Zehnecks zur Seite

Digitized by Google

des Fünfecks, wie der Radius zur Diagonale des Fünfecks. Vollendet man den aus D (Fig. 115.) beschriebenen Bogen zum Halbkreise, und zieht EG; so ist, weil FEG ein rechter Winkel, FC:FE = CE:EG, folglich EG die Diagonale des Fünfecks.

Zieht man im eingeschriebenen Zehneck (Fig. 117.) die Diagonalen AB, AC, AD, AE; so ist AB der Durchmesser = 2, AE die Seite des Fünfecks $= \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Ferner ist $AC^2 = AB^2 - BC^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, wenn man AB = 2, und für BC die Seite des Zehnecks setzt (48.). Also ist $AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$ = der Diagonale des Fünfecks (50.). Endlich ist $AD^2 = AB^2 - BD^2, = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, wenn man AB = 2, und für BD die Seite des Fünfecks (48.) setzt. Die Diagonalen des Zehnecks sind also:

AB = 2, der Durchmesser;

$AC = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$, Diagonale des Fünfecks;

$AD = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, und

$AE = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$, Seite des Fünfecks.

In Fig. 115. ist $CG^2 = EG^2 - CE^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - 1$ (50.) $= \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $CG = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, die dritte Diagonale AD (Fig. 117.) des Zehnecks. Das Dreieck FEG (Fig. 115.) enthält also die Seiten und alle Diagonalen des regulären Fünf- und Zehnecks.

51. Da man nach dem Bisherigen das reguläre Sechs- und Zehneck in den Kreis beschreiben, also auch den 6ten und 10ten Theil der Peripherie geometrisch finden kann; so kann man den Kreis in 15 gleiche Theile theilen, da $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$, und folglich auch das reguläre Funfzehneck in den Kreis beschreiben.

Mit Hülfe einiger trigonometrischen Sätze ist die Berechnung der Seite des Funfzehnecks leicht. Es ist nämlich $\frac{1}{30} = \frac{1}{12} - \frac{1}{20}$, die ganze Peripherie als Einheit ge-

Digitized by Google

nommen. Also $\sin\frac{1}{30} = \sin\frac{1}{12}.\cos\frac{1}{20} - \cos\frac{1}{12}.\sin\frac{1}{20}$ (Goniometrie. 24.). Ferner ist $\sin\frac{1}{12} = \frac{1}{2}\text{chord}\frac{1}{6} = \frac{1}{4}$ (47.); also $\cos\frac{1}{12} = \sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{12})} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $\sin\frac{1}{20} = \frac{1}{2}\text{chord}\frac{1}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$ (48.), $\cos\frac{1}{20} = \sqrt{(1-\sin^2\frac{1}{20})} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$. Folglich nach obiger Formel:

$$\sin\frac{1}{30} = \tfrac{1}{8}|\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \sqrt{15} + \sqrt{3}|.$$

Aber $\text{chord}\frac{1}{15} = 2\sin\frac{1}{30}$. Also die Seite des Funfzehnecks

$$= \tfrac{1}{4}|\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \sqrt{15} + \sqrt{3}|.$$

Wie oben findet man nun auch die Seite des ein- und umschriebenen 30, 60, 120ecks, u. s. f. Die Construction des Funfzehnecks ergiebt sich sogleich.

52. Die Beschreibung des regulären Siebzehnecks in den Kreis, welche wir aus der schon oben (42.) erwähnten allgemeinen Theorie von Gauß hier ausheben, beruht, so wie wir die Sache darstellen wollen, vorzüglich auf der Summirung der Reihe

$$\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} - \ldots,$$
$$\ldots \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1} = S,$$

Da (Goniometrie. 27.) immer

$$\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha = 2\cos k\alpha.\cos\alpha,$$
$$\cos(k+1)\alpha = 2\cos k\alpha.\cos\alpha - \cos(k-1)\alpha,$$

ist; so erhält man für die einzelnen Glieder unserer Reihe:

$$\cos\frac{\pi}{2n+1},$$
$$-2\cos\frac{\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} + 1,$$
$$2\cos\frac{2\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{\pi}{2n+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mp 2\cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n-3)\pi}{2n+1},$$
$$\pm 2\cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1}.\cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{(n-2)\pi}{2n+1},$$

Folglich, wenn man addirt:

Digitized by Google

$$S = \cos\frac{\pi}{2n+1} - 2\left\{S \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\}\cdot\cos\frac{\pi}{2n+1}$$
$$+ 1 - \left\{S \pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1}\right\},$$
$$2S\left(1 + \cos\frac{\pi}{2n+1}\right) = \cos\frac{\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{(n+1)\pi}{2n+1}$$
$$\pm \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} + 1 \mp \cos\frac{(n-1)\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1}$$
$$= 1 + \cos\frac{\pi}{2n+1} \mp \cos\frac{n\pi}{2n+1} \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1},$$

da $\frac{(n+1)\pi}{2n+1} + \frac{n\pi}{2n+1} = \pi$ ist. Also $S = \frac{1}{2}$ für jedes ganze positive n.

53. Dies giebt

$$\left.\begin{array}{l}\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\\ + \cos\frac{5\pi}{17} - \cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{7\pi}{17} - \cos\frac{8\pi}{17}\end{array}\right\} = \frac{1}{2},$$

eine Gleichung mit 8 unbekannten Größen. Da es nun hier vorzüglich auf die Bestimmung von $\frac{\pi}{17}$ oder $\cos\frac{\pi}{17}$ ankommt; so sind zwischen diesen acht Unbekannten noch 7 andere Gleichungen zu suchen. Setzen wir

$$\cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} - \left(\cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17}\right) = X,$$
$$\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} - \left(\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\right) = Y;$$

so haben wir die Gleichung:

$$X - Y = \frac{1}{2},$$

54. Multiplicirt man nun die beiden Ausdrücke für X, Y mit einander, und zerlegt das Product jeder zwei Cosinus nach Goniometrie. (27.), so daß z. B.

$$\cos\frac{5\pi}{17}\cdot\cos\frac{8\pi}{17} = \frac{1}{2}\cos\frac{13\pi}{17} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{17}$$
$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{17} + \frac{1}{2}\cos\frac{3\pi}{17},$$

wodurch der Factor von π nie 8 übersteigt; so findet man, daß dieses Product die Hälfte der in (53.) summirten Reihe 4 Mal enthält, woraus

$$XY = 1,$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit der vorigen,

Digitized by Google

reicht zur Bestimmung von X und Y hin, und es erhellet, daß dazu nur quadratische Gleichungen erforderlich sind.

55. Setzen wir nun

$$\cos\frac{3\pi}{17} + \cos\frac{5\pi}{17} = X', \quad \cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17} = X'';$$

$$\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} = Y', \quad \cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17} = Y'';$$

so finden wir nach einer ganz ähnlichen Methode wie vorher, $X'X''$, $Y'Y''$ der Hälfte der in (53.) summirten Reihe gleich. Also haben wir:

$$X' - X'' = X, \; Y' - Y'' = Y;$$
$$X'X'' = \tfrac{1}{4}, \; Y'Y'' = \tfrac{1}{4};$$

vier, zur Bestimmung von X', X'', Y', Y'' hinreichende Gleichungen, und es fällt in die Augen, daß zu dieser Bestimmung ebenfalls nur quadratische Gleichungen erforderlich sind.

56. Nun ist ferner, immer nach derselben Zerlegung wie vorher:

$$\cos\frac{3\pi}{17}\cdot\cos\frac{5\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{2\pi}{17}\right),$$

$$\cos\frac{6\pi}{17}\cdot\cos\frac{7\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{17} - \cos\frac{4\pi}{17}\right),$$

$$\cos\frac{2\pi}{17}\cdot\cos\frac{8\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{17} - \cos\frac{7\pi}{17}\right),$$

$$\cos\frac{\pi}{17}\cdot\cos\frac{4\pi}{17} = \tfrac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{17} + \cos\frac{3\pi}{17}\right).$$

Bezeichnen wir also die acht Glieder der Reihe in (53.), alle positiv genommen, durch $x_1, x_2, x_3, \ldots x_8$; so hat man zur Bestimmung dieser 8 unbekannten Größen folgende Gleichungen:

$$X - Y = \tfrac{1}{2}, \; XY = 1.$$

$$X' - X'' = X, \; Y' - Y'' = Y;$$
$$X'X'' = \tfrac{1}{4}, \; Y'Y'' = \tfrac{1}{4}.$$

$$x_3 + x_5 = X', \; x_3 \cdot x_5 = \tfrac{1}{4}Y';$$
$$x_6 - x_7 = X'', \; x_6 \cdot x_7 = \tfrac{1}{4}Y'';$$
$$x_2 + x_8 = Y', \; x_2 \cdot x_8 = \tfrac{1}{4}X'';$$
$$x_1 - x_4 = Y'', \; x_1 \cdot x_4 = \tfrac{1}{4}X'.$$

Es ist klar, daß diese Gleichungen zur Bestimmung der obigen 8 unbekannten Größen hinreichen, und daß dazu

Digitized by Google

nur Gleichungen des zweiten Grades erforderlich sind. Hat man nun $x_1 = \cos\frac{\pi}{17}$ gefunden; so ist die Seite des Siebenzehnecks offenbar

$$= 2r\sin\frac{\pi}{17} = 2r\sqrt{\left(1-\cos^2\frac{\pi}{17}\right)}.$$

Nach gehöriger Rechnung findet man, wenn $r = 1$, die Seite des Siebzehnecks $=$ der Quadratwurzel aus folgendem Ausdruck:

$$\tfrac{34}{16} - \tfrac{2}{16}\sqrt{17} - \tfrac{2}{16}\sqrt{(34-2\sqrt{17})} - \tfrac{4}{16}\sqrt{(17+3\sqrt{17}-\sqrt{(170+38\sqrt{17})})}.$$

57. Um aus den obigen Formeln eine Construction des Siebenzehnecks abzuleiten, ist es zuvörderst nöthig, ihnen eine etwas veränderte Gestalt zu geben. Zu dem Ende denke man sich von jeder unbekannten Größe das Doppelte genommen, und diese Doppelten durch beigefügte obere oder untere Indices von den primitiven Größen unterschieden; so nehmen obige Gleichungen, so weit wir hier ihrer bedürfen, folgende Gestalt an:

$$X_1 - Y_1 = 1,\ X_1 Y_1 = 4.$$
$$X'_1 - X''_1 = X_1,\ Y'_1 - Y''_1 = Y_1;$$
$$X'_1 X''_1 = 1,\ Y'_1 Y''_1 = 1.$$
$$x'_2 + x'_8 = Y'_1,\ x'_2 \cdot x'_8 = X''_1.$$

Werden die erstern aufgelöst; so erhält man:

$$X_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{17} + \tfrac{1}{2},\ Y_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{17} - \tfrac{1}{2};$$
$$X'_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} + \tfrac{1}{2}X_1,$$
$$X''_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} - \tfrac{1}{2}X_1;$$
$$Y'_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)} + \tfrac{1}{2}Y_1,$$
$$Y''_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)} - \tfrac{1}{2}Y_1.$$

Setzen wir nun, wie immer, den Radius $= 1$; so wird der 17te Theil der Peripherie auf folgende Art durch Construction gefunden. Durch A (Fig. 118.) errichte man auf den Radius CA das Perpendikel AB $=$ dem doppelten Radius $= 2$, halbire AC in D, und mache DE $=$ BD; so ist $BD^2 = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$, $BD = DE = \frac{1}{2}\sqrt{17}$, $CE = \frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{1}{2} = X_1$, $AE = \frac{1}{2}\sqrt{17} - \frac{1}{2} = Y_1$. Halbire AE in F, AB in G, und nimm FH $=$ FG; so ist $FG^2 = 1 + \frac{1}{4}Y_1^2$, $FG = FH = \frac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)}$, $AH = \frac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)} + \frac{1}{2}Y_1 = Y'_1$, $EH =$

Digitized by Google

$\frac{1}{2}\sqrt{(4+Y_1^2)} - \frac{1}{2}Y_1 = Y''_1$. Errichte den senkrechten Radius CI, halbire CE in K, nimm KL = KI; so ist $KI^2 = 1 + \frac{1}{4}X_1^2$, $KI = KL = \frac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)}$, $EL = \frac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} + \frac{1}{2}X_1 = X'_1$, $CL = \frac{1}{2}\sqrt{(4+X_1^2)} - \frac{1}{2}X_1 = X''_1$. Beschreibt man nun über AL und AH Halbkreise, deren erster das Perpendikel CI in M schneidet, zieht durch M eine Parallele MN mit HL bis an den zweiten Halbkreis, und fällt von N auf HL das Perpendikel NP; so ist $NP^2 = CM^2 = AC.CL = PH.PA$, und AH = PH + PA. Da nun AC = 1; so hat man nach dem Obigen:

$$PH + PA = Y'_1,\quad PH.PA = X''_1.$$

Diese Gleichungen, mit

$$x'_2 + x'_8 = Y'_1,\quad x'_2.x'_8 = X''_1$$

verglichen, verbunden mit der Bemerkung, daß $x'_2 = 2x_2$, als der doppelte Cosinus des kleinern Winkels, $> x'_8$ ist, geben $PH = x'_2$, $PA = x'_8$. Aber $x'_8 = 2x_8 = 2\cos\frac{8\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{8\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{\pi}{34}$ = chord $\frac{2\pi}{34}$ = der Seite des Vier- und Dreißigecks = PA. Nimmt man also Aa = AP; so ist der Bogen $Aa = \frac{1}{34}$, sein Doppeltes also = $\frac{1}{17}$ der Peripherie. Ferner ist $x'_2 = 2x_2 = 2\cos\frac{2\pi}{17} = 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2\pi}{17}\right) = 2\sin\frac{13\pi}{34}$ = chord $\frac{13\pi}{17}$. Nimmt man also Ab = PH; so ist Bogen $Ab = \frac{13\pi}{17}$, also $A'b = \frac{4\pi}{17}$, $\frac{1}{2}A'b = \frac{2\pi}{17}$. Wird also Bog A'b in c halbirt; so ist Bog $A'c = \frac{1}{17}$ der Peripherie, und Sehne A'c die Seite des regulären Siebzehnecks. Diese Construction ergiebt sich unmittelbar aus unsern obigen Formeln. M. s. auch Geometrie von Paucker. Königsb. 1823. S. 187. H. A. Rothe, de divisione peripheriae circuli in XVII et XIII part. aequales. Erlangae. 1804. Paucker de divisione geometrica peripheriae circuli in XVII part. aequales. 1817. Auch Erchinger hat der Göttingischen Societät eine Construction vorgelegt, und geometrisch bewiesen.

Digitized by Google

58. Noch sind einige Inhaltsbestimmungen übrig. Der Inhalt eines regulären necks im Kreise ist offenbar:

$$I = \tfrac{1}{2} n r^2 \sin \frac{2\pi}{n},$$

der Inhalt des umschriebenen necks dagegen:

$$I' = n r^2 \tang \frac{\pi}{n}.$$

Der Umfang des umschriebenen necks ist immer $P' = 2nr \tang \frac{\pi}{n}$. Für $r = 1$ ist $I' = n \tang \frac{\pi}{n}$, und für $2r = 1$ auch $P' = n \tang \frac{\pi}{n}$. Also ist das Verhältniß der Fläche eines umschriebenen necks zum Quadrate des Radius einerlei mit dem Verhältniß seines Umfangs zum Durchmesser.

Der Inhalt eines in einen Kreis beschriebenen regulären Polygons von $2n$ Seiten ist:

$$i = n r^2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} I.I' &= \tfrac{1}{2} n^2 r^4 \sin \frac{2\pi}{n} \tang \frac{\pi}{n} \\ &= n^2 r^4 \sin \frac{\pi}{n} \cos \frac{\pi}{n} \tang \frac{\pi}{n} \\ &= n^2 r^4 \left(\sin \frac{\pi}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Also $I.I' = i^2$, d. h. das eingeschriebene reguläre Polygon von $2n$ Seiten ist das geometrische Mittel zwischen dem in und um den Kreis beschriebenen regulären Polygon von n Seiten.

Der Inhalt des regulären Polygons von $2n$ Seiten um den Kreis ist:

$$i' = 2nr^2 \tang \frac{\pi}{2n}.$$

Aber (Goniometrie. 38.)

$$\tang \frac{\pi}{2n} = \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{1 + \cos \frac{\pi}{n}},$$

und

Digitized by Google

$$\cos\frac{\pi}{n} = \frac{nr^2 \sin\frac{\pi}{n}}{nr^2 \tang\frac{\pi}{n}} = \frac{i}{I};$$

also

$$i' = \frac{2iI'}{I'+i}.$$

Aber nach dem Obigen

$$I'+i = \frac{i(I+i)}{I}.$$

Also

$$i' = \frac{2II'}{I+i}.$$

Aus dem erstern Ausdrucke für i' folgt leicht, daß

$$I' : i = I' - i' : i' - i,$$

d. h. das um den Kreis beschriebene reguläre Polygon i' von 2n Seiten ist das harmonische Mittel (S. harmonische Proportion) zwischen dem in den Kreis beschriebenen Polygon i von 2n Seiten, und dem um den Kreis beschriebenen I' von n Seiten.

Setzt man den Radius $= 1$; so ist die Seite des ein- und umgeschriebenen Quadrats $= \sqrt{2}$, $= 2$, also der Flächeninhalt $I = 2$, $I' = 4$. Folglich $i = \sqrt{2.4} = 2{,}8284271$, $i' = \frac{2.2.4}{2+\sqrt{8}} = 3{,}3137085$, der Inhalt des ein- und umgeschriebenen Achtecks. Nach derselben Methode findet man ohne Schwierigkeit den Inhalt des ein- und umgeschriebenen 16, 32, 64ecks, u. s. f. Für das ein- und umgeschriebene 32768eck erhält man auf diese Art für beide die Zahl 3,1415926, woraus man schließt, daß dies der Flächeninhalt des Kreises bis auf die 7te Decimale genau ist, folglich auch die halbe Peripherie, da der Flächeninhalt $= r^2 . \pi = \pi$ für $r = 1$.

59. Noch erwähnen wir hier eines merkwürdigen, von Gauß (Carnots Geom. d. Stellung. A. d. F. v. Schumacher. Thl. II. S. 362.) gefundenen Ausdrucks für den Inhalt eines willkührlichen Vielecks durch die Coordinaten seiner Spitzen. Sey I_3 der Inhalt des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ (Fig. 119.), und die Coordinaten der Spitzen, nach einer Richtung gezählt, $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3$.

Digitized by Google

Offenbar ist $I_3 =$ der Summe der beiden Trapezien $A_1 a_3$, $A_2 a_3$, weniger dem Trapezio $A_1 a_2$. Also (Trapezium. 1.)

$$I_3 = \tfrac{1}{2}(y_3 + y_1)(x_3 - x_1) + \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 - x_3) - \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\}$$

und, obgleich diese Formel nur für den in der Figur dargestellten Fall entwickelt ist, so überzeugt man sich doch bald von ihrer Allgemeinheit, wenn nur die Coordinaten mit den gehörigen Zeichen genommen werden. S. z. B. m. Lehrb. d. Statik. Halle. 1826. S. 254. Ein Viereck läßt sich in zwei Dreiecke $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_4$ zerlegen, deren Flächenräume:

$$\tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right\},$$

$$\tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_3 - y_4) + x_3(y_4 - y_1) + x_4(y_1 - y_3)\right\}.$$

Folglich

$$I_4 = \tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)\right\}.$$

Ein Fünfeck läßt sich in ein Viereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ und ein Dreieck $A_1 A_4 A_5$ zerlegen. Der Inhalt des Vierecks ist der obige, der des Dreiecks

$$\tfrac{1}{2}\left\{x_1(y_4 - y_5) + x_4(y_5 - y_1) + x_5(y_1 - y_4)\right\}.$$

Durch Addition erhält man leicht den Inhalt des Fünfecks. Hieraus folgt, daß allgemein für irgend ein neck der Inhalt $I_n =$

$$\tfrac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} x_1(y_2 - y_n) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + \ldots \\ \ldots + x_{n-1}(y_n - y_{n-2}) + x_n(y_1 - y_{n-1}) \end{array}\right\}$$

eine auch zu praktischen Rechnungen sehr brauchbare Formel. In Puissant Traité de Topographie. Paris. 1820. p. 263. findet man ein vollständig berechnetes Beispiel, Gauß aber wird nicht als Erfinder genannt.

60. Folgende Tafel enthält einige numerische Bestimmungen für Umfang und Flächeninhalt einiger regulären Polygone:

Digitized by Google

Seitenzahl.	Eingeschriebene Vielecke.		Umschriebene.
	Umfang zum Durchmesser.	Fläche zum Quadrat des Halbmessers.	Umfang zum Durchm. Fläche zum Quadrat des Halbmessers.
3	2,5980762	1,2990381	3,1961524
4	2,8284271	2,0000000	4,0000000
5	2,9389262	2,3776413	3,6327126
6	3,0000000	2,5980762	3,4641016
8	3,0614674	2,8284271	3,3137085
10	3,0901699	2,9389262	3,2491969
12	3,1058285	3,0000000	3,2153903
15	3,1186753	3,0505248	3,1883484
16	3,1214451	3,0614674	3,1825978
17	3,1237418	3,0705541	3,1778507

61. Die Berechnung der Vielecke aus gegebenen Bestimmungsstücken lehrt die Polygonometrie (S. Trigonometrie. IV.). Ueber isoperimetrische Vielecke vergl. den Art. Größtes und Kleinstes. Mehrere andere, hier nicht entwickelte merkwürdige Eigenschaften kommen in den mathematischen Zeitschriften, besonders den Annales d. Math. und Crelles Journal, zerstreut vor. Alle einzelne Aufsätze hier anzuführen, gestattet der Raum nicht. Auch s. m. Carnots neue Eigenschaften der Vielecke, frei a. d. F. übers. v. Schellig. Dresden. 1802. 4. Wir wünschen, daß die in diesem Artikel mitgetheilte Theorie der Eintheilung des Kreises in 17 gleiche Theile zum Studium der von Gauß a. a. O. gegebenen allgemeinen Theorie dieser Theilungen reitzen möge, noch ehe die Zusätze zu diesem Werke (vergl. 42.) erscheinen.

Vieleckiger Körper oder **Polyeder** heißt jeder von lauter Ebenen eingeschlossene Körper. Die ein-

Digitized by Google

zelnen begränzenden ebenen Figuren heißen Seitenflächen, die Gesammtheit aller heißt Oberfläche. Die Durchschnittslinien der Seitenflächen werden Kanten genannt, die Durchschnittspunkte der Kanten Ecken. An jeder Ecke liegt ein Körperwinkel, die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander heißen Flächenwinkel. Dieser Artikel ist allgemeinen Untersuchungen über die Polyeder gewidmet. Einzelne vieleckige Körper, z. B. das Prisma, das Parallelepipedon, die Pyramide u. s. f., s. m. in besondern Artikeln.

I. Allgemeine Eigenschaften beliebiger Polyeder.

1. Man denke sich ein Netz an einander hängender ebener Figuren, welche in einer Ebene liegen können oder nicht, und bezeichne die Anzahl aller ebenen Figuren, Kanten und Ecken desselben durch S, K, E. Um zwischen diesen drei Größen eine Gleichung zu finden, stelle man sich vor, daß zu dem Netze eine neue Figur mit n Seiten hinzu komme, welche n′ Seiten mit dem Netze gemein, n″ nicht mit demselben gemein habe, und bezeichne durch S′, K′, E′ in Bezug auf das neue Netz dasselbe, was S, K, E in Bezug auf das primitive bedeuten; so erhellet augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$n = n' + n'', \quad S' = S + 1, \quad K' = K + n''.$$

Zugleich aber ist auch klar, daß die hinzukommende Figur, welche n′ Seiten mit dem primitiven Netze gemein hat, n′ + 1 Eckpunkte mit demselben gemein, also n″ − 1 Eckpunkte mit demselben nicht gemein hat, da immer

$$n = n' + n'' = (n' + 1) + (n'' - 1)$$

seyn muß. Also ist

$$E' = E + n'' - 1.$$

Man hat also jetzt

$$\begin{aligned} E' &= E + n'' - 1 \\ S' &= S + 1 \\ -K' &= -K - n'' \end{aligned}$$

Digitized by Google

woraus, wenn man auf beiden Seiten addirt, sogleich erhalten wird:

$$E' + S' - K' = E + S - K,$$

so daß also die Größe $E + S - K$ für alle Netze eine constante Größe ist. Für ein aus einer einzigen Figur bestehendes Netz ist aber

$$E = K,\ S = 1,\ E + S - K = 1.$$

Also ist für alle Netze

$$E + S - K = 1,\ E + S = K + 1;$$

d. h. die Summe der Anzahl der Ecken und Figuren ist um Eins größer als die Anzahl der Kanten.

Diese merkwürdige Gleichung ist zuerst von Cauchy gefunden worden (Journal de l'école polytechnique. T. IX. Cah. 16. p. 80.).

Hat man ein völlig umschlossenes Polyeder mit S Seitenflächen, K Kanten und E Ecken; so denke man sich einmal eine Seitenfläche hinweg, wodurch man ein Netz mit $S-1$ Figuren, K Kanten und E Ecken erhält, in welchem also nach dem Vorigen

$$E + S - 1 = K + 1,\ E + S = K + 2.$$

Folglich ist in jedem völlig umschlossenen Polyeder die Summe der Anzahl der Ecken und Seitenflächen um Zwei größer als die Anzahl der Kanten.

Dieser merkwürdige und wichtige Satz bildet die Grundlage der allgemeinen Theorie vieleckiger Körper. Man nennt ihn nach seinem ersten Erfinder den Euler'schen Satz. M. s. Eulers Abhandlung: Elementa doctrinae solidorum. Nov. Comm. Petrop. T. IV. p. 109. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. Ibid. p. 140.

Ferner denke man sich jetzt ein nicht unterbrochenes System, oder ein Netz mehrerer Polyeder, deren Anzahl wir durch P, die Anzahl ihrer Seitenflächen wie vorher durch S, die Anzahl der Kanten durch K, und die Anzahl der Ecken durch E bezeichnen wollen.

Digitized by Google

Denke man sich nun wieder, daß zu diesem Netze ein neues Polyeder hinzu komme, für welches P′, S′, K′, E′ dasselbe bedeuten, was P, S, K, E in Bezug auf das primitive Netz bezeichnen. Sey ferner s die Anzahl der Seiten, k die Anzahl der Kanten, und e die Anzahl der Ecken, welche das neu hinzukommende Polyeder nicht mit dem primitiven Netze gemein hat; so ist nach dem zuerst bewiesenen Satze von Cauchy

$$e + s - k = 1.$$

Zugleich erhellet aber augenblicklich die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$E' = E + e,\ S' = S + s,\ K' = K + k,\ P' = P + 1;$$

oder

$$\begin{aligned} E' &= E + e, \\ S' &= S + s, \\ -K' &= -K - k, \\ -P' &= -P - 1. \end{aligned}$$

Folglich, wenn man addirt:

$$E' + S' - K' - P' = E + S - K - P + e + s - k - 1.$$

Aber nach dem Obigen

$$e + s - k - 1 = 0.$$

Also

$$E' + S' - K' - P' = E + S - K - P.$$

Folglich $E + S - K - P$ für jedes Netz von Polyedern eine constante Größe. Ist nun $P = 1$, so ist nach dem Euler'schen Satze

$$E + S = K + 2,$$

$$E + S - K - P = 2 - 1 = 1.$$

Also ist in jedem Netze von Polyedern

$$E + S - K - P = 1,\ E + S = K + P + 1;$$

d. i. in jedem Netze von Polyedern ist die Summe der Anzahl der Ecken und Seitenflächen um Eins größer als die Summe der Anzahl der Polyeder, welche das Netz bilden, und die Anzahl der Kanten.

Diesen merkwürdigen Satz hat ebenfalls Cauchy gefunden.

Mit dem Beweise der vorhergehenden Sätze haben sich mehrere Mathematiker beschäftigt. Gewöhnlich gründet

Digitized by Google

man denselben auf die Formel für den Flächeninhalt sphärischer Polygone (Trigonometrie. 92.), worüber u. A. Legendre Elém. de Géométrie. Onzième éd. p. 228. Meier Hirsch Sammlung geometrischer Aufgaben. II. Berlin. 1807. S. 93. nachzusehen sind. Auf diese Weise kann aber bloß der Eulersche Satz bewiesen werden, und überdies scheint die Anwendung des Satzes von den sphärischen Polygonen bei einem an sich so einfachen Satze einer guten Methode nicht gemäß zu seyn. — Andere Beweise haben gegeben Cauchy (s. d. Crelles Journal der Math. I. 3. S. 228.), Rothe (Kastners Archiv für die gesammte Naturlehre. B. IV. S. 396.), Steiner in Crelles Journal. I. 4. S. 364. Den hier mitgetheilten Beweis für den Eulerschen und den ersten Satz von Cauchy habe ich zuerst in Crelles Journal. II. 4. S. 367. gegeben; er ist sodann wiederholt worden in dem Bulletin des sciences mathém. par Férussac. Avril. 1828. p. 235., und in einer Abhandlung von Gergonne in den Annales de Mathématiques. T. XIX. p. 333. In dieser Abhandlung hat Gergonne auch den zweiten Satz von Cauchy auf die obige Art bewiesen, indem er den von mir eingeschlagenen Weg weiter verfolgte. M. s. auch noch Karstens Lehrbegriff. Thl. II. Abth. 1. S. 563., und Annales de Mathém. T. XV. p. 157.

2. Die Anzahl aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Polyeders sey $= W$; so ist immer

$$W = 2K + 4$$

d. h. die Anzahl aller ebenen Winkel auf der Oberfläche eines Polyeders ist der doppelten Anzahl der Kanten gleich, und folglich immer eine gerade Zahl. — Es gehört nämlich jede Kante zu zwei Seitenflächen, so daß also die Anzahl der Kanten immer halb so groß ist, wie die gesammte Anzahl aller Seiten der Seitenflächen, also auch halb so groß als die Anzahl der Winkel.

3. Nimmt man den rechten Winkel als Einheit an; so ist die Summe aller ebenen Winkel auf der Oberfläche des Polyeders $= 4(E - 2)$. Die Seitenzahlen der einzelnen Seitenflächen seyen $n, n', n'', n''', \ldots$, so

Digitized by Google

sind die Winkelsummen der einzelnen Seitenflächen (Vieleck. 3.) $2n-4$, $2n'-4$, $2n''-4$, $2n'''-4$, ... Folglich die Summe aller Winkel

$$= 2(n + n' + n'' + n''' + \ldots) - 4S,$$

oder, da offenbar

$$n + n' + n'' + n''' + \ldots = W = 2K$$

ist (2.), obige Summe $= 4K - 4S = 4(K-S) = 4(E-2)$ (1.).

4. Wird ein Polyeder von m Seitenflächen von gerader und n Seitenflächen von ungerader Seitenzahl begränzt; so ist n immer eine gerade Zahl. Sind nämlich 2α, $2\alpha'$, $2\alpha''$, ꝛc., $2\gamma+1$, $2\gamma'+1$, $2\gamma''+1$, ꝛc. die Seitenzahlen der einzelnen Seitenflächen; so ist offenbar

$$W = 2(\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots + \gamma + \gamma' + \gamma'' + \ldots) + n.$$

Da nun (2.) W immer eine gerade Zahl ist; so ist es auch n. Der Satz gilt auch, wenn $m = o$.

5. Die Anzahl der Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, u. s. w., welche ein Polyeder begränzen, sey a, b, c, d, ...; so ist offenbar $S = a + b + c + d + \ldots$, und $W = 2K = 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots$. Aber (1.) $E + S = K + 2$, $2E + 2S = 2K + 4$. Also

$$\begin{aligned} 2E + 2a + 2b + 2c + 2d + \ldots &= \\ = 4 + 3a + 4b + 5c + 6d + \ldots, & \\ 2(E-2) = a + 2b + 3c + 4d + \ldots, & \end{aligned}$$

folglich $a + 2b + 3c + 4d + \ldots$ immer eine gerade Zahl, so wie nach dem Obigen auch $3a + 4b + 5c + 6d + \ldots$. Die halbe Summe aller ebenen Winkel ist $= a + 2b + 3c + 4d + \ldots$ (3.), immer für den rechten Winkel als Einheit.

6. Sey

$$b + 2c + 3d + 4e + \ldots = p;$$

so ist

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}(3a + 4b + 5c + 6d + \ldots) \quad (5.) \\ &= \tfrac{3}{2}(a + b + c + d + \ldots) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(b + 2c + 3d + 4e + \ldots) = \tfrac{3}{2}S + \tfrac{1}{2}p. \end{aligned}$$

Da nun ferner $E = K - S + 2$ (1.); so ist $E = 2 + \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}p$. Also, weil p in gewissen Fällen zwar $= o$, aber nie negativ seyn kann, immer $K \geqq \frac{3}{2}S$, $E \geqq$

Digitized by Google

$2 + \frac{1}{2}S$. Da jede Ecke wenigstens von 3 ebenen Winkeln gebildet wird; so ist $W \geqq 3E$. Aber $W = 2K$ (2.). Also $2K \geqq 3E$, oder $K \geqq \frac{3}{2}E$.

7. Also $2K \geqq 3S$, $2K \geqq 3E$. Aber $S = K - E + 2$, $E = K - S + 2$ (1.). Also $2K \geqq 3K - 3E + 6$, $2K \geqq 3K - 3S + 6$, $3E \geqq K + 6$, $3S \geqq K + 6$, $K \leqq 3E - 6$, $K \leqq 3S - 6$.

Also kann man $K + 6 + \alpha = 3E$, $K + 6 + \beta = 3S$ setzen. Da nun auch $K = \frac{3}{2}E + \gamma$, $K = \frac{3}{2}S + \delta$ (6.) gesetzt werden kann; so ist

$$\tfrac{1}{2}E + \gamma + 6 + \alpha = 3E, \quad \tfrac{1}{2}S + \delta + 6 + \beta = 3S;$$
$$\alpha + \gamma + 6 = \tfrac{1}{2}E, \quad \beta + \delta + 6 = \tfrac{1}{2}S;$$
$$E = 4 + \tfrac{2}{3}(\alpha + \gamma), \quad S = 4 + \tfrac{2}{3}(\beta + \delta).$$

Folglich kann weder die Anzahl der Ecken, noch der Seitenflächen, in einem Polyeder < 4 seyn. Da $K = E + S - 2$ (1.); so erhält man leicht

$$K = 6 + \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

und die Anzahl der Kanten kann also nie < 6 seyn. Die dreiseitige Pyramide, in welcher $E = 4$, $S = 4$, $K = 6$, ist also der Körper mit der geringsten Anzahl von Ecken, Seitenflächen und Kanten.

8. Da $K = \frac{3}{2}E + \gamma$, $K = \frac{3}{2}S + \delta$ (7.), $S + E = K + 2$ (1.) ist; so ist $S + E = \frac{3}{2}E + \gamma + 2 = \frac{3}{2}S + \delta + 2$, $2S + 2E = 3E + 2\gamma + 4 = 3S + 2\delta + 4$, $2S = E + 2\gamma + 4$, $2E = S + 2\delta + 4$; $2S = (E + 4) + 2\gamma$, $2E = (S + 4) + 2\delta$; $2S \geqq E + 4$, $2E \geqq S + 4$.

9. Nach dem Bisherigen haben wir also: $K \geqq \frac{3}{4}S$, $E \geqq 2 + \frac{1}{2}S$, $K \geqq \frac{3}{2}E$, $K + 6 \leqq 3E$, $K + 6 \leqq 3S$, $E + 4 \leqq 2S$, $S + 4 \leqq 2E$. Dies giebt folgende Tabelle.

Wenn gegeben:	so ist der Größe	kleinster Werth	größter Werth.
S	K	$\frac{3}{4}S$	$3S - 6$
	E	$2 + \frac{1}{2}S$	$2S - 4$
K	S	$2 + \frac{1}{3}K$	$\frac{3}{2}K$
	E	$2 + \frac{1}{3}K$	$\frac{3}{2}K$
E	S	$2 + \frac{1}{2}E$	$2E - 4$
	K	$\frac{1}{2}E$	$3E - 6$

Digitized by Google

10. Diese Tabelle giebt zu folgenden Bemerkungen Veranlassung.

a) Kein Körper kann 7 Kanten haben, weil, für $K = 7$, S zwischen die Gränzen $2 + \frac{7}{7}$, $\frac{14}{3}$, d. i. $4\frac{1}{3}$, $4\frac{2}{3}$, fallen müßte, zwischen denen keine ganze Zahl liegen kann.

b) Kein Körper kann von lauter solchen Figuren eingeschlossen werden, die mehr als 5 Seiten haben. Hätten nämlich alle Seitenflächen mehr als 5 Seiten, so wäre offenbar $W \geqq 6S$, $2K \geqq 6S$ (2.), $K \geqq 3S$, da doch nach der Tabelle $K \leqq 3S - 6$, also immer $< 3S$ ist.

c) Es giebt keinen Körper, dessen Ecken alle von 6 oder mehrern ebenen Winkeln gebildet würden. Wäre dies nämlich der Fall; so wäre $W \geqq 6E$, $2K \geqq 6E$ (2.), $K \geqq 3E$, da doch nach der Tabelle $K \leqq 3E - 6$, also immer $< 3E$ ist.

d) Auch ergiebt sich hieraus folgende Tabelle für die möglichen eckigen Körper.

Anzahl der Seitenflächen.	Ecken.	Kanten.	Namen der Körper.
4	4	6	Tetraedrum tetragonum
5	5	8	Pentaedrum pentagonum
	6	9	— — — hexagonum
6	5	9	Hexaedrum pentagonum
	6	10	— — — hexagonum
	7	11	— — — heptagonum
	8	12	— — — octogonum
7	6	11	Heptaedrum hexagonum
	7	12	— — — heptagonum
	8	13	— — — octogonum
	9	14	— — — enneagonum
	10	15	— — — decagonum
8	6	12	Octaedrum hexagonum
	7	13	— — — heptagonum
	8	14	— — — octogonum
	9	15	— — — enneagonum
	10	16	— — — decagonum
	11	17	— — — endecagonum
	12	18	— — — dodecagonum
etc.	etc.	etc.	etc.

S. Karstens Lehrbegriff. II. 1. S. 569.

Digitized by Google

11. Körper, welche von lauter Dreiecken eingeschlossen, und deren Ecken alle entweder von fünf oder sechs ebenen Winkeln gebildet werden, haben immer 12 Ecken der ersten Art. Die Anzahl der Ecken der ersten Art sey $= V$, die der zweiten $= VI$; so ist $E = V + VI$, $W = 5.V + 6.VI = 2K$ (2.). Also $6.V + 6.VI = 6E$, $5.V + 6.VI = 2K$, $V = 6E - 2K$. Da nun alle Seitenflächen Dreiecke sind; so ist $W = 3S = 2K$ (2.), $E + S = K + 2$ (1.), $2E + 2S = 2K + 4$, $2E + 2S = 3S + 4$, $2E = S + 4$, $6E = 3S + 12$, $V = 3S + 12 - 3S = 12$.

Auch ist $5.V + 6.VI = 2K$, $5.V + 5.VI = 5E$, $VI = 2K - 5E = 3S - 5E$. Aber $2E = S + 4$, $5E = \frac{5}{2}S + 10$, $VI = \frac{1}{2}S - 10$, und $E = V + VI = \frac{1}{2}S - 10 + 12 = \frac{1}{2}S + 2$, auch $E = VI + 12$.

12. Ein Polyeder werde wieder von a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, u. s. f. eingeschlossen. Werden die Ecken je zwei mit einander verbunden; so ist die Anzahl der Verbindungslinien offenbar $= \frac{E(E-1)}{2}$. Will man die Anzahl der Diagonalen D haben; so muß man hiervon die Anzahl der Kanten und der Diagonalen der Seitenflächen abziehen. Dies giebt (Vieleck. 2.)

$$D = \frac{E(E-1)}{2} - K - \{2b + 5a + 9d + \ldots\}.$$

Ist der Körper von lauter Dreiecken eingeschlossen; so ist $b = c = d = \ldots = o$. Also

$$D = \frac{E(E-1)}{2} - K = \frac{E(E-1) - 2K}{2}.$$

Da $E = K - S + 2$ ist (1.); so ist auch

$$D = \frac{(K-S+2)(K-S+1)}{2} - K - \{2b + 5c + \ldots\}.$$

Man kann auch setzen

$$D = \frac{E(E-1)}{2} - K + \tfrac{1}{2}(3a + 4b + 5c + \ldots) - \tfrac{1}{2}(3^2.a + 4^2.b + 5^2.c + \ldots)$$
$$= \frac{E(E-1)}{2} + 2K - \tfrac{1}{2}(3^2.a + 4^2.b + 5^2.c + \ldots),$$

da $2K = 3a + 4b + 5c + \ldots$ ist (5.). Dies giebt auch

$$E(E-1) + 4K - 2D = 3^2.a + 4^2.b + 5^2.c + 6^2.d + \ldots,$$

Digitized by Google

woraus folgt, daß das letztere Aggregat immer eine gerade Zahl ist. Also ist auch $3^2, a + 5^2, c + 7^2, e + \ldots$, immer eine gerade Zahl.

13. Wichtig und interessant ist auch noch die Frage, wie viele Stücke eines Polyeders gegeben seyn müssen, wenn dasselbe völlig bestimmt seyn soll. Sey eine Seitenfläche ein neck, so sind zu deren Bestimmung $2n - 3$ Stücke nöthig (Vieleck. 8.). Außerhalb dieses ecks liegen $E - n$ Ecken des Polyeders. Zur Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume sind aber immer 3 Stücke, z. B. seine drei Coordinaten in Bezug auf ein gewisses System, nöthig, welches $3(E - n) + 2n - 3 = 3E - n - 3$ Bestimmungsstücke giebt. Diese Anzahl ist aber zu groß. Bezeichnet man nämlich die Seitenzahlen der übrigen Seitenflächen durch $n', n'', n''', \ldots$; so liegen immer $n', n'', n''' \ldots$ Ecken des Polyeders in einer Ebene. Die Lage einer Ebene wird aber durch 3 Punkte bestimmt, und, wenn also die Lage des n'ecks z. B. einmal durch 3 Punkte bestimmt ist; so braucht man zur Bestimmung der übrigen $n' - 3$ Punkte in dieser Ebene nur noch $2(n' - 3)$ Bestimmungsstücke. Oben rechneten wir $3(n' - 3)$ Bestimmungsstücke für diese $n' - 3$ Punkte, also $n' - 3$ zu viel, welches für alle übrigen Seitenflächen mit $n'', n''', \ldots$ Seiten eben so gilt. Folglich muß die Summe $(n' - 3) + (n'' - 3) + (n''' - 3) + \ldots$ von dem obigen $3E - n - 3$ abgezogen werden. Die Summe dieser Reihe ist $= n' + n'' + n''' + \ldots - 3(S - 1) = n + n' + n'' + n''' + \ldots - n - 3(S - 1) = W - n - 3(S - 1) = 2K - n - 3(S - 1)$ (2.). Also die Anzahl der nöthigen Bestimmungstücke $= 3E - n - 3 - 2K + n + 3(S - 1) = 3(E + S) - 2K - 6 = 3(K + 2) - 2K - 6$ (1.) $= K$, d. h. die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke eines Polyeders ist immer der Anzahl seiner Kanten gleich, woraus man aber nicht etwa schließen darf, daß durch jede K Stücke ein Polyeder völlig bestimmt werde, indem ja dann z. B. jedes Prisma durch seine Kanten völlig bestimmt seyn müßte, welches offenbar nicht der Fall ist, da man

Digitized by Google

ja unter Beibehaltung der Grundfläche durch verschiedene Neigung der Seitenkanten mit denselben Kanten sehr verschiedene Prismen construiren kann. Der Sinn unsers Satzes ist allein der, daß die Anzahl der nöthigen Bestimmungsstücke eben so groß ist wie die Anzahl der Kanten, wobei es nun aber weiter auf die richtige Auswahl der nöthigen Bestimmungsstücke ankommen würde.

II. Vergleichung der Polyeder mit einander im Allgemeinen.

14. In Bezug auf die Vergleichung zweier Polyeder mit einander sind vier Arten denkbar.

a) Polyeder heißen einander gleich, oder nach Legendre (a. a. O. p. 276.) äquivalent, wenn sie gleiche körperliche Räume einschließen.

b) Congruente, oder nach Legendre (a. a. O.) gleiche, Polyeder sind solche, welche sich so in einander legen lassen, daß sie nur ein einziges Polyeder derselben Art bilden, und ihre Oberflächen sich also völlig decken. Polyeder dieser Art sind also völlig in einerlei Ordnung von lauter congruenten und gleich gegen einander geneigten Seitenflächen eingeschlossen. Nach Euclid (XI. Def. 10.) sind gleich und ähnliche, also congruente, Polyeder solche, welche von gleich und ähnlichen Ebenen in gleicher Anzahl eingeschlossen sind. Mag diese Erklärung nun von Euclid selbst, oder, welches wahrscheinlicher ist, von einem unwissenden Herausgeber herrühren; so ist sie doch in doppelter Rücksicht zu tadeln, indem α) sogleich in die Augen fällt, daß sie eigentlich einen Lehrsatz enthält, welcher bewiesen werden muß, wie auch schon ältere Herausgeber gefühlt haben. Clavius z. B. fügt dieser Definition eine Erläuterung bei, die, mit quod anfangend, mit quare etc. endigend, ganz die Form eines Beweises hat. Man könnte hier anführen, daß ja Euclid im ersten Buche die Congruenz zweier Dreiecke aus Gleichheit der drei Seiten auch als einen Lehrsatz aufstellt und beweiset. β) Ferner ist aber zu bemerken, daß der in obiger Erklä-

Digitized by Google

rung enthaltene Satz, wenigstens so allgemein ausgesprochen, ein falscher Satz ist, welches sogleich erhellet, wenn man sich ober- und unterhalb ein und derselben Seitenfläche eines Polyeders ein und dieselbe Pyramide beschrieben denkt, wodurch man, wenn man die erste Pyramide als zu dem Polyeder addirt, die zweite als davon subtrahirt ansieht, zwei Polyeder mit denselben Seitenflächen erhält, welche offenbar nicht congruent. Dem Geiste der Elemente des Euclides ist es indeß ganz gemäß, nur Polyeder mit lauter auswärts gehenden Körperwinkeln, convexe Polyeder, zu betrachten, und es wird sich also fragen, ob vielleicht der in der obigen Erklärung enthaltene Satz unter der Einschränkung auf convexe Polyeder richtig ist, welche Frage in III. beantwortet werden wird. Robert Simson läßt die Erklärung in seiner Bearbeitung der Elemente ganz weg, und fügt einige Erläuterungen bei, die den obigen ähnlich sind. In der französischen Uebersetzung des Simsonschen Euclides von Friedrich Castillon (Berlin. 1767. 8.) ist bei genannter Erklärung nur bemerkt: omise.

c) Symmetrische Polyeder sind solche, welche über einer gemeinschaftlichen Grundfläche auf beiden Seiten derselben so liegen, daß die Spitzen ihrer in gleicher Anzahl vorhandenen körperlichen Winkel je zwei in ein und derselben auf der gemeinschaftlichen Grundfläche senkrechten Linie in gleichen Entfernungen von der Grundfläche auf beiden Seiten derselben liegen. Daß diese Erklärung sich leicht noch einigermaßen erweitern ließe, und die Bedingung einer gemeinschaftlichen Grundfläche nur größerer Einfachheit wegen eingeführt worden, fällt in die Augen. Daß symmetrische Polyeder wegen der umgekehrten Ordnung, in der ihre einzelnen, wenn auch gleichen, Theile liegen, nicht zur Deckung gebracht werden können, also nicht congruent, sondern nur gleich sind, erhellet leicht. Euclid hat diesen Unterschied übersehen, und ist deshalb, besonders XI. 28., in Fehler verfallen. Der Begriff der Symmetrie ist von den französischen Geometern, besonders von Legendre, in die Geometrie eingeführt. M. v. d. Art. Symmetrie.

Digitized by Google

d) Aehnliche Polyeder sind nach Euklid (XI. Def. 9.) solche, welche von einer gleichen Anzahl ähnlicher Figuren eingeschlossen werden; eine Erklärung, auf welche dieselben Bemerkungen wie in (b) anwendbar sind. Robert Simson erklärt daher ähnliche Polyeder als solche, deren körperliche Winkel in der Ordnung, wie sie auf einander folgen, gleich sind, und welche von gleich vielen ähnlichen Figuren eingeschlossen werden. Indeß scheint diese Erklärung einige überflüssige Bedingungen zu enthalten, welches näher zu erörtern hier der Raum fehlt. Legendre (a. a. O. p. 163. 164.) giebt daher folgende Erklärung: Zwei dreieckige Pyramiden sind ähnlich, wenn sie zwei ähnliche, ähnlich gelegene, und gleich gegen einander geneigte Seitenflächen haben. Polyeder sind ähnlich, wenn sie zwei ähnliche Grundflächen haben, und die außerhalb derselben liegenden Ecken durch ähnliche und ähnlich liegende dreiseitige Pyramiden bestimmt werden. Obgleich manche neuere Schriftsteller, z. B. Kramp (Elémens de Géom. Cologne. 1806. p. 270. 276.) hiervon abweichende Definitionen geben; so werden wir in diesem Artikel doch Legendre folgen, weil die von ihm gegebene Erklärung namentlich vor der von Euclid und R. Simson gegebenen, den wichtigen Vorzug hat, daß aus ihr sogleich die Möglichkeit ähnlicher Pyramiden und Polyeder erhellet.

III. Congruente Polyeder.

15. Die Frage, ob der in Euclids Definition congruenter Polyeder enthaltene Lehrsatz: Polyeder sind congruent, d. h. können sich decken, wenn sie von lauter congruenten Figuren in gleicher Aufeinanderfolge eingeschlossen werden, unter der Bedingung, daß beide Polyeder convex sind, richtig ist (14. b.), ist von Cauchy durch einen sehr sinnreichen Beweis dieses Satzes, welchen wir hier mittheilen, bejahend beantwortet werden.

16. Sind in zwei sphärischen Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich; so sind auch die übri-

Digitized by Google

gen Stücke gleich. Sey (Fig. 120.) $A = A'$, $AC = A'C'$, $AB = A'B'$. Man fälle von C, C' auf ABD, A'B'D' die Perpendikel CE, C'E', von E, E' auf AD, BD, A'D', B'D' die Perpendikel EF, EG, E'F', E'G', und ziehe CF, CG, C'F', C'G', welche auch auf AD, BD, A'D', B'D' senkrecht stehen werden; so läßt sich leicht aus der Voraussetzung zeigen, daß $\measuredangle CFE \cong \measuredangle C'F'E'$ ist, woraus $CE = C'E'$, $FE = F'E'$. Auch ist klar, daß, wegen der gleichen Bogen AC, A'C', $FD = F'D'$ ist. Also $\measuredangle FDE \cong \measuredangle F'D'E'$, und folglich $ED = E'D'$, $\measuredangle EDF = \measuredangle E'D'F'$, woraus, da, wegen der gleichen Bogen AB, A'B', auch $\measuredangle ADB = \measuredangle A'D'B'$ ist, leicht $\measuredangle EDG \; \measuredangle E'D'G'$, $\measuredangle EDG \cong \measuredangle E'D'G'$, $EG = E'G'$, $\measuredangle CEG \cong \measuredangle C'E'G'$, $\measuredangle CGE = \measuredangle C'G'E'$, d. i. $B = B'$ folgt. Durch eine ähnliche Construction, indem man von B, B' Perpendikel auf CAD, C'A'D' fällt, zeigt man, daß $C = C'$. Da wegen der Congruenz der Dreiecke CEG, C'E'G' auch $CG = C'G'$ ist; so ist auch $BC = B'C'$. Dieser Satz ist in vielen Lehrbüchern durch das Princip der Deckung bewiesen, welches aber nur zulässig seyn würde, wenn die gleichen Stücke in beiden Dreiecken ganz in einerlei Ordnung lägen. Er liegt den folgenden Untersuchungen zum Grunde, und mußte daher hier vorausgeschickt werden.

17. Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich folgende Sätze ganz eben so wie die entsprechenden Sätze bei ebenen Dreiecken beweisen: 1) Im gleichschenklichen sphär. Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich, und umgekehrt. 2) Der größern Seite steht der größere Winkel gegenüber, und umgekehrt. 3) Sind in zwei sphär. Dreiecken zwei Seiten gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich; so steht dem größern Winkel eine größere Seite gegenüber, und umgekehrt.

18. Wir werden nun allgemein untersuchen, ob mit denselben Seitenflächen eines convexen Polyeders in derselben Aufeinanderfolge, indem man ihnen verschiedene Neigungen giebt, ein von jenem verschiedenes Polyeder beschrieben werden kann. Zwei dreiseitige körperliche Ecken

Digitized by Google

sind congruent, wenn sie von gleichen ebenen Winkeln in einerlei Ordnung eingeschlossen werden, wovon man sich sogleich überzeugt, wenn man sich die beiden Ecken mit ein Paar gleichen ähnlich liegenden Seitenflächen auf einander gelegt, und mit den andern Seitenflächen Kegelflächen beschrieben denkt, welche sich, so wie ihre Durchschnittslinien, also auch die beiden Ecken, offenbar decken werden. Daher braucht man bei angedeuteter Untersuchung nur Polyeder zu betrachten, bei denen keine Ecke weniger als vierseitig ist, indem die Veränderung der Neigung der Seitenflächen nur auf den Theil des Polyeders Einfluß haben kann, welchen man erhält, wenn man sich nach und nach alle dreiseitigen Ecken abgeschnitten denkt. Hiernächst sind folgende Sätze vorläufig zu beweisen.

19. Wenn in einem sphärischen Vielecke ABCDEF (Fig. 121.) alle Seiten bis auf eine, AF, gegeben sind, und man läßt einen der, der Seite AF nicht anliegenden, Winkel sich verändern, indem alle übrigen Winkel ungeändert bleiben; so nimmt AF mit dem veränderten Winkel gleichzeitig zu und ab, wenn das Polygon immer convex bleibt. Verändert sich, indem alles Uebrige ungeändert bleibt, z. B. der Winkel ABC; so bleibt, da sich sonst Nichts ändert, auch BF offenbar ungeändert, der Winkel ABF nimmt aber mit ABC gleichzeitig zu und ab, also im Dreieck ABF, wo auch AB ungeändert bleibt, auch die Seite AF (17. 3.). Verändert sich irgend ein anderer Winkel CDE; so bleiben AD, FD ungeändert, da alles Uebrige ungeändert bleibt, der Winkel ADF, und folglich (17. 3.) auch AF, nimmt aber mit CDE gleichzeitig zu und ab. Daß der Satz nur gilt, wenn das Polygon immer convex bleibt, fällt leicht in die Augen. Denkt man sich nämlich z. B. den Winkel FED so lange vermindert, bis der Punkt F in die Diagonale AE fällt; so erhellet aus dem Vorigen, daß sich dann auch AF immer gleichzeitig vermindert. Läßt man aber den Winkel FED noch weiter abnehmen, wo dann das Vieleck bei F einen einspringenden Winkel erhält; so ist klar, daß auf der andern Seite der Diagonale AF eben so wieder zunehmen wird,

Digitized by Google

wie es vorher abgenommen hat. Nehmen mehrere der nicht an AF liegenden Winkel zugleich zu, oder zugleich ab; so ist aus dem Vorigen klar, daß durch dieses mehrfache Zu- oder Abnehmen auch eine mehrfache Zu- oder Abnahme von AF hervorgebracht werden wird, wenn nur das Polygon immer convex bleibt.

20. In einem convexen sphärischen Polygon von mehr als drei, z. B. n, Seiten, dessen Seiten constant bleiben, indem sich die Winkel ändern, bezeichne man alle größer gewordenen Winkel durch +, alle kleiner gewordenen durch —, die ungeändert gebliebenen Winkel dagegen durch kein Zeichen; so müssen in der Reihe dieser Zeichen immer wenigstens vier Zeichenwechsel vorkommen.

1) Man denke sich irgend eine Seite des Polygons; so stehen derselben n—2 Winkel gegenüber. Hätten sich, indem vielleicht einige ungeändert geblieben wären, diese n—2 Winkel bloß vermehrt, oder bloß vermindert; so müßte auch jene Seite größer oder kleiner geworden seyn (19.), da doch die Seiten constant bleiben sollen. Also können nicht lauter +, oder lauter — Zeichen, sondern + und — Zeichen, d. i. es müssen wenigstens zwei Zeichenwechsel vorkommen.

2) Kämen nun (Fig. 122.) bloß zwei Zeichenwechsel vor, so denke man sich in dem ursprünglichen unveränderten Polygon durch zwei willkührliche, in beiden Polygonen aber gleich gelegene, Punkte α, β in AB, FE den Bogen eines größten Kreises $\alpha\beta$ gelegt; so müßte, da die der $\alpha\beta$ gegenüber liegenden Winkel im Polygon αAHGFβ nur zugenommen, die der $\alpha\beta$ gegenüber liegenden Winkel im Polygon αBCDEβ nur abgenommen haben, $\alpha\beta$ sich zugleich vergrößert und vermindert haben (19.), welches zusammen nicht statt finden kann.

3) Eben so wenig können bloß drei Reihen von Zeichen vorkommen, weil die erste und dritte Reihe immer aus gleichen Zeichen bestehen, sich daher an einander anschließen, und daher doch eigentlich nur zwei Zeichenreihen, und zwei Zeichenwechsel existiren würden.

Digitized by Google

4) Also muß es wenigstens vier Zeichenwechsel geben.

21. Beschreibet man aus der Spitze einer convexen körperlichen Ecke von mehr als drei Seiten mit willkührlichem Radius eine Kugel; so umschließt die Ecke ein sphärisches convexes Polygon, von dessen Seiten die Ecke einschließenden Winkel gemessen werden, und dessen Winkel den Flächenwinkeln der Ecke gleich sind. Also ist der vorige Satz unmittelbar auf convexe körperliche Ecken von mehr als drei Seiten anwendbar.

22. Nun läßt sich beweisen, daß durch Veränderung der Neigungen der Seitenflächen eines convexen Polyeders mit lauter mehr als dreiseitigen körperlichen Ecken (18.), wenn nur die Seitenflächen selbst ungeändert bleibt, und auch ihre Ordnung keine Veränderung erleidet, kein von dem gegebenen verschiedenes convexes Polyeder erzeugt werden kann.

1) Alle Neigungswinkel der Seitenflächen sollen eine Aenderung erlitten haben. Die Anzahl aller Zeichenwechsel bei allen Ecken des Polyeders sey $= n$; so ist, da bei keiner Ecke weniger als 4 Zeichenwechsel vorkommen können (21.), $n \geqslant 4E$.

Denke man sich nun die Zeichen auf die Kanten des Polyeders, also auch auf die Seiten der Seitenflächen gesetzt; so kann man ihre Aufeinanderfolge sowohl auf den Kanten rings herum, welches eigentlich bloß hierher gehört (21.), als auch rings um die einzelnen Seitenflächen herum betrachten. Zwei auf einander folgende Kanten einer Ecke gehören immer zu einer; und, auf die Aufeinanderfolge derselben gesehen, nur zu einer Seitenfläche des Polyeders, und es erhellet, da alle Neigungswinkel sich geändert haben, also jede Kante mit einem Zeichen versehen ist, leicht, daß jedem Zeichenwechsel oder jeder Zeichenfolge auf den Kanten auch ein Zeichenwechsel oder eine Zeichenfolge auf den Seitenflächen entspricht, die Anzahl der Zeichenwechsel auf den Kanten also immer der Anzahl der Zeichenwechsel auf den Seitenflächen gleich seyn muß, diese folglich statt jener gesetzt werden kann.

Digitized by Google

Die größte Anzahl der Zeichenwechsel auf den Seiten einer ebenen Figur erhält man aber, wenn man die Zeichen immer abwechseln läßt. Jenachdem die Figur $2m$ oder $2m+1$ Seiten hat, ist die Folge der Zeichen:

$$\begin{array}{cccccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & \ldots\ldots & (2m-1) & (2m) \\ - & + & - & + & - & + & \ldots\ldots & - & + \text{ ,} \\ + & - & + & - & + & - & \ldots\ldots & + & - \text{ ,} \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ccccccccccc} (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) & \ldots\ldots & (2m-1) & (2m) & (2m+1) \\ - & + & - & + & - & + & \ldots\ldots & - & + & - \text{ ,} \\ + & - & + & - & + & - & \ldots\ldots & + & - & + \text{ .} \end{array}$$

Denkt man sich jede dieser Reihen in einen Kreis geschrieben; so ist klar, daß man in jedem Falle $2m$ Zeichenwechsel erhält, die Seitenzahl mag gerade oder ungerade seyn, als größte Anzahl der Zeichenwechsel. Wird nun das Polyeder von a Dreiecken, b Vierecken, c Fünfecken, u. s. f. eingeschlossen; so ist also die Anzahl der Zeichenwechsel auf jeder Art von Figuren überhaupt

$$\leqq 2a, \leqq 4b, \leqq 4c, \leqq 6d, \leqq 6e, \text{ etc.,}$$

$$n \leqq 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + \ldots .$$

Aber (5.)

$$2K = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + \ldots ,$$

$$S = a + b + c + d + e + \ldots ,$$

$$4E = 4K - 4S + 8 \quad (1.)$$

$$= 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \ldots .$$

Also offenbar $n \leqq 4E - 8$, oder immer $n < 4E$, da doch nach dem Obigen $n \leqq 4E$ seyn muß. Folglich ist die angenommene Veränderung aller Neigungswinkel der Seitenflächen unsers Polyeders unstatthaft.

2) Haben nicht alle Neigungswinkel der Seitenflächen eine Veränderung erlitten; so nehme man auf die Kanten, an welchen sich die Neigungswinkel nicht geändert haben, gar keine Rücksicht, wodurch man ein Polyeder erhält, das nicht bloß von ebenen Figuren, sondern zum Theil von nicht in einer Ebene liegenden Figurennetzen als Seitenflächen eingeschlossen wird, bei welchem aber nun an allen Kanten die Neigungswinkel sich geändert haben. Auf ein solches Polyeder ist das vorige Raisonne-

Digitized by Google

ment ebenfalls völlig anwendbar, wenn nur der Eulersche Satz auch für solche Polyeder seine Richtigkeit behält, wie es in der That der Fall ist. Denn man betrachte bei einem Polyeder, wo $E + S = K + 2$ ist (1.), ein Netz mehrerer Seitenflächen als eine Seitenfläche, und bezeichne die Anzahl der Ecken, Kanten und Figuren dieses Netzes durch E', K', S'; so ist nach Cauchy's Satze (1.) $E' + S' = K' + 1$. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Seitenflächen des so betrachteten Polyeders sey E_1, K_1, S_1, die Anzahl der äußern und innern Ecken und Kanten des Netzes dagegen E'', K'' und E''', K'''; so ist

$$E'' + E''' + S' = K'' + K''' + 1,$$

und, weil offenbar $E'' = K''$ ist:

$$E''' + S' = K''' + 1.$$

Folglich, mittelst der Gleichung

$$E + S = K + 2$$

durch Subtraction:

$$E - E''' + S - S' = K - K''' + 1.$$

Aber, wie sogleich erhellet:

$$E_1 = E - E''', K_1 = K - K''',$$
$$S_1 = S - S' + 1, S_1 - 1 = S - S'.$$

Also

$$E_1 + S_1 - 1 = K_1 + 1,$$

oder

$$E_1 + S_1 = K_1 + 2.$$

Auf ähnliche Art könnte man weiter schließen, wenn noch ein anderes Netz mehrerer Seitenflächen als eine Seitenfläche betrachtet worden wäre, u. s. f., und man wird den Eulerschen Satz immer bestätigt finden. Demnach kann mit denselben Seitenflächen in derselben Ordnung, auch wenn nicht alle Neigungswinkel der Seitenflächen sich änderten, kein neues convexes Polyeder beschrieben werden.

23. Daher sind zwei convexe, von denselben Seitenflächen in derselben Ordnung eingeschlossene Polyeder, einander congruent, so daß also die Erklärung congruenter Polyeder des Euclides für den Fall der Convexität derselben einen völlig richtigen Satz enthält (V. 14. b.).

Digitized by Google

24. Da ein ebenes Dreieck bloß durch seine Seiten bestimmt wird; so wird auch ein von lauter Dreiecken eingeschlossenes Polyeder bloß durch seine Kanten bestimmt, und zwei Polyeder, deren sämmtliche Seitenflächen Dreiecke sind, sind congruent, wenn die Kanten gegenseitig in einerlei Ordnung gleich sind.

IV. Symmetrische Polyeder.

25. Zunächst ist zu beweisen, daß in zwei von gleichen ebenen Winkeln eingeschlossenen dreiseitigen körperlichen Ecken bei A und H (Fig. 123.) die Seitenflächen gleich gegen einander geneigt sind. Nimmt man nämlich AK $=$ PH, fällt von K und P auf die gegenüber liegenden Seitenflächen die Perpendikel KN, PQ, und von N, Q auf AC, AD, HF, HG die Perpendikel LN, MN, QT, QS, und zieht LK, KM, PT, PS, welche auch auf AC, AD, HF, HG senkrecht seyn werden; so folgt aus der Voraussetzung leicht, daß $\triangle$AKL $\cong$ PHS, $\triangle$AKM $\cong$ $\triangle$PHT, also KL $=$ PS, KM $=$ PT, so wie auch AL $=$ HS, AM $=$ HT, also ALNM $\cong$ HTQS, und folglich LN $=$ QS, MN $=$ QT, also $\triangle$KLN $\cong$ $\triangle$PSQ, $\triangle$KMN $\cong$ $\triangle$PQT, $\angle$ KLN $=$ $\angle$ PSQ, $\angle$ KMN $=$ $\angle$ PTQ. Die Gleichheit der dritten Neigungswinkel folgt eben so, wenn man nur die Punkte K, P in AD, FH oder AC, GH annimmt.

26. In zwei symmetrischen Polyedern sind alle ähnlich liegenden Seitenflächen congruent, und alle gleich gegen einander geneigt.

Sey ABCDE (Fig. 124.) die gemeinschaftliche Grundfläche der beiden Polyeder (14. c.), und M, N; M′, N′ correspondirende Ecken derselben; so sind MM′, NN′ auf der gemeinschaftlichen Grundfläche, also auch auf mn senkrecht, und es ist Mm $=$ M′m, Nn $=$ N′n (14. c.), also offenbar Trap. MNmn $\cong$ Trap. M′N′mn, MN $=$ M′N′, so daß also je zwei correspondirende Spitzen beider Polyeder gleich weit von einander entfernt sind. Kommen noch die Ecken P, P′ dazu; so ist eben so MP $=$ M′P′,

Digitized by Google

$NP = N'P'$, also $\triangle MNP \cong \triangle M'N'P'$ und folglich jede zwei zwischen drei correspondirenden Ecken der beiden Polyeder enthaltene Dreiecke einander congruent. Kommen ferner noch die Ecken Q, Q' hinzu, und die Dreiecke MNP, NPQ liegen in einer Ebene; so läßt sich zeigen, daß auch $M'N'P'$, $N'P'Q'$ in einer Ebene liegen müssen. Zieht man nämlich MQ, $M'Q'$; so ergiebt sich aus dem Vorigen unmittelbar, daß $\triangle MPQ \cong \triangle M'P'Q'$, $\angle MPQ = \angle M'P'Q'$ ist. Da aber nach dem Obigen auch $\angle MPN = \angle M'P'N'$, $\angle NPQ = \angle N'P'Q'$, und, weil MPN, NPQ in einer Ebene liegen, $\angle MPQ = \angle MPN + \angle NPQ$ ist; so ist auch $\angle M'P'N' + \angle N'P'Q' = \angle M'P'Q'$, welches nicht der Fall seyn könnte, wenn $M'N'P'$, $N'P'Q'$ nicht in einer Ebene lägen (Elem. XI. 20.). Aus allem Bisherigen erhellet, daß alle Seitenflächen der beiden Polyeder aus lauter congruenten Dreiecken in derselben gegenseitigen Lage zusammengesetzt, und daher je zwei correspondirende congruent sind. Um zu beweisen, daß zwei in NP, $N'P'$ z. B. zusammenstoßende Seitenflächen gleich gegen einander geneigt sind, denke man sich wieder MQ, $M'Q'$ gezogen; so werden nach dem Vorigen die beiden dreiseitigen Ecken $MNQP$, $M'N'Q'P'$ von lauter congruenten Dreiecken, also von lauter gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen, so daß also ihre Seitenflächen alle gleich gegen einander geneigt sind (25.), woraus das zu Beweisende unmittelbar folgt.

27. Aus dem vorigen Satze folgt unmittelbar, daß symmetrische Polyeder immer auch gleiche körperliche Räume einschließen müssen. Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind, wie in den Elementen bewiesen wird, gleich. Also sind auch symmetrische Pyramiden gleich, wie aus der Erklärung 14. c. unmittelbar folgt. Symmetrische Polyeder lassen sich aber offenbar in gleich viele symmetrische Pyramiden zerlegen. Also sind symmetrische Polyeder auch aus diesem Grunde gleich.

M. v. den Artikel Symmetrie.

Der Satz, daß jedes Parallelepipedon durch eine Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen getheilt

Digitized by Google

wird, bei dessen Beweise Eukides (XI. 28.) den Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie übersehen hat (S. d. a. Art.), läßt sich auf folgende Art streng beweisen. Man denke sich die Diagonale AB (Fig. 125.) in n gleiche Theile getheilt, und durch alle Theilpunkte mit den Seitenflächen des Parallelepipedons parallele Ebenen gelegt; so wird dadurch das Parallelepipedon offenbar in n^2 congruente Parallelepipeda getheilt, von denen n um die Diagonale liegen. Jedes dieser Parallelepipeda sey $= p$, der Inhalt des gegebenen $= P$; so ist $p = \frac{P}{n^2}$. Auf jeder Seite der Diagonalfläche liegen $\frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ Parallelepipeda, deren jedes $= p$, und, setzen wir die beiden Prismen, in welche das gegebene Parallelepipedon durch die Diagonalfläche getheilt wird, $= P'$ und $= P''$; so ist offenbar $P' > \frac{n(n-1)}{2} p$, $P'' > \frac{n(n-1)}{2} p$. Also

$$P' = \frac{n(n-1)}{2} p + \Delta = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{P}{n^2} + \Delta,$$

$$P'' = \frac{n(n-1)}{2} p + \Delta'' = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{P}{n^2} + \Delta'',$$

$$P' = \frac{n-1}{2n} P + \Delta, \quad P'' = \frac{n-1}{2n} P + \Delta'',$$

wo offenbar sowohl Δ als Δ'' kleiner als die Summe der um die Diagonale liegenden Parallelepipeda ist, d. i. $\Delta < np, < n \cdot \frac{P}{n^2}, < \frac{P}{n}$; $\Delta'' < np, < n \cdot \frac{P}{n^2}, < \frac{P}{n}$. Wäre nun nicht $P' = P''$, also auch nicht $\Delta = \Delta''$; so sey zunächst $\Delta > \Delta''$, $= \Delta'' + \delta$, $\Delta - \Delta'' = \delta$. Nimmt man, welches offenbar immer möglich ist (M. s. Elem. X. 1.), n so groß, daß $\frac{P}{n} < \delta$ ist; so ist um so mehr nach dem Obigen $\Delta < \delta$, $\Delta - \Delta'' < \delta$, gegen das obige $\Delta - \Delta'' = \delta$. Wäre ferner $\Delta < \Delta''$, $\Delta'' = \Delta + \delta'$, $\Delta'' - \Delta = \delta'$; so nehme man n so groß, daß $\frac{P}{n} < \delta'$ ist; so ist um so mehr $\Delta'' < \delta'$, $\Delta'' - \Delta < \delta'$, gegen $\Delta'' - \Delta = \delta'$. Also muß $\Delta = \Delta''$, $P' = P''$ seyn.

Einen andern Beweis hat Pfaff gegeben im Art. Prisma des Probehefts zu der von Ersch und Gruber

Digitized by Google

herausgegebenen Encyklopädie. Auch s. Lorenz Grundriß d. r. Math. N. A. v. Gerling. Helmst. 1820. S. 251., und die bekannten Schriften von Karsten.

V. Aehnliche Polyeder.

28. Zwei ähnliche dreieckige Pyramiden (14. d.) sind von lauter ähnlichen Dreiecken eingeschlossen, und haben gleiche körperliche Winkel, also auch gleiche Flächenwinkel. Der Erklärung ähnlicher dreieckiger Pyramiden (14. d.) gemäß, sey (Fig. 126.) $\triangle ABC \sim \triangle abc$, $\triangle ABD \sim \triangle abd$, und die Neigungswinkel an den Kanten AB, ab seyen einander gleich; so kann man sich die beiden Pyramiden offenbar so in einander gelegt denken, wie die Figur zeigt, so daß $\triangle BEG \sim \triangle ABD$, $\triangle BEF \sim \triangle ABC$ ist, und überhaupt die Pyramide BEFG mit abcd einerlei ist. Also ist $AB : BE = BD : BG = BC : BF$, folglich $\triangle BCD \sim \triangle BGF \sim \triangle bcd$. Also $BD : BG = AD : GE = CD : GF$, $AB : BE = AC : EF = AD : EG$, $BC : BF = AC : EF = CD : FG$; folglich $\triangle ACD \sim \triangle EFG \sim \triangle acd$, so daß also die beiden Pyramiden von lauter ähnlichen Seitenflächen, die Ecken folglich von lauter gleichen ebenen Winkeln eingeschlossen sind, daher auch alle Flächenwinkel der beiden Pyramiden, also auch alle körperlichen Winkel, einander gleich sind (25.). Es ergiebt sich hieraus auch leicht, daß alle Kanten ähnlicher dreieckiger Pyramiden proportional sind.

29. Seyen S, S′, S″, S‴ und s, s′, s″, s‴ die Seitenflächen, K, k ein Paar ähnlich liegende Kanten; so ist (Elem. VI. 20.) $S : s = S' : s' = S'' : s'' = S''' : s''' = K^2 : k^2$, da alle Kanten proportional sind (28); $S + S' + S'' + S''' : s + s' + s'' + s''' = S : s = K^2 : k^2$, so daß sich also die Oberflächen ähnlicher dreieckiger Pyramiden wie die Quadrate zweier ähnlich liegenden Kanten verhalten.

30. Aus (28.) folgt unmittelbar, daß die Linien AD, EG; CD, FG, also auch die Ebenen ACD, EFG pa-

Digitized by Google

rallel sind. Bezeichnet man nun diese beiden Dreiecke durch F, f, ihre Entfernungen von B aber durch E, e; so ist $F:f = CD^2:FG^2 = BD^2:BG^2 = E^2:e^2$; aber auch $E:e = E:e$; also $F.E:f.e = E^3:e^3$. Sind aber P, p die Volumina der beiden Pyramiden; so ist $P:p = \frac{1}{3}F.E:\frac{1}{3}f.e = F.E:f.e = E^3:e^3$, und da, wenn K, k zwei willkührliche Kanten sind, indem alle Kanten einerlei Verhältniß zu einander haben (28.), offenbar $E:e = K:k$, $E^3:e^3 = K^3:k^3$ ist; so ist auch $P:p = K^3:k^3$, d. h. die Volumina zweier ähnlichen dreieckigen Pyramiden verhalten sich wie die Würfel zweier ähnlich liegenden Kanten zu einander.

31. Zwei ähnliche Polyeder (14. d.) werden von lauter ähnlichen und gleich gegen einander geneigten Figuren begränzt. ABCDE, abcde (Fig. 127.) seyen die beiden ähnlichen Grundflächen der Polyeder (14. d.), und F, G; f, g irgend zwei ähnlich liegenden Ecken in beiden, welche durch die ähnlichen dreiseitigen Pyramiden ABCF, ABCG; abcf, abcg bestimmt werden. Wegen Aehnlichkeit dieser Pyramiden sind FAC, GAC; fac, gac gegen die Grundflächen (28.), also auch gegen einander gleich geneigt, und überdies ist FAC ∽ fac, GAC ∽ gac (28.), also Pyr. ACFG ∽ Pyr. acfg (14. d.), und folglich $FG:fg = FA:fa = AB:ab$, da auch $\triangle ABF \sim \triangle abf$ (28.). Die Entfernungen zweier ähnlich liegenden Ecken der beiden Polyeder verhalten sich also immer zu einander wie zwei ähnlich liegende Seiten der Grundflächen, und da die Seiten der Grundflächen alle einander proportional sind; so haben auch alle Entfernungen zweier ähnlich liegenden Ecken, also auch alle Kanten der beiden Polyeder, einerlei Verhältniß zu einander. Kommt eine neue Ecke H, h hinzu, so sind, wie so eben bewiesen, die Seiten der Dreiecke FGH, fgh proportional, diese Dreiecke, so wie jede zwei durch drei ähnlich liegende Ecken bestimmten Dreiecke, also einander ähnlich. Kommt noch eine neue Ecke K, k hinzu; so läßt sich ganz wie in (26.) zeigen, daß, wenn FGH, GHK in einer Ebene liegen, dies auch mit fgh, ghk der Fall seyn muß, und daß FGH, GHK und fgh, ghk

Digitized by Google

gleich gegen einander geneigt sind, da aus der Aehnlichkeit der Dreiecke eben so wie aus ihrer Congruenz die Gleichheit der Winkel folgt. Denkt man sich nun die Oberflächen beider Polyeder auf ähnliche Art in Dreiecke zerlegt; so sind die homologen Dreiecke einander ähnlich und gleich gegen einander geneigt, welches also auch von den ganzen homologen Seitenflächen gilt. Aus der Gleichheit der Flächenwinkel folgt unmittelbar die Gleichheit der homologen körperlichen Winkel. Der hier bewiesene Satz ist die von Robert Simson gegebene Definition ähnlicher Polyeder (14. d.)

32. Eine unmittelbare Folge hieraus ist, daß die geraden Linien, welche irgend vier ähnlich liegende Ecken zweier ähnlichen Polyeder mit einander verbinden, zwei ähnliche dreieckige Pyramiden einschließen, indem diese Linien einerlei Verhältniß zu einander haben (31.), also ähnliche Dreiecke einschließen, die Ecken der beiden Pyramiden folglich von gleichen ebenen Winkeln gebildet werden, und die Seitenflächen der Pyramiden also gleich gegen einander geneigt sind (25.). Demnach lassen sich zwei ähnliche Polyeder immer in lauter ähnlich und ähnlich gelegene, in gleicher Anzahl vorhandene, dreieckige Pyramiden zerlegen.

33. Sind nun Π, π; Π', π'; Π'', π''; u. s. f. diese Pyramiden; K, k; K', k'; K'', k''; u. s. f. aber ähnlich liegende Kanten derselben; so ist (30.) $\Pi : \pi = K^3 : k^3$, $\Pi' : \pi' = K'^3 : k'^3$, $\Pi'' : \pi'' = K''^3 : k''^3$, u. s. f. Aber (31.) $K : k = K' : k' = K'' : k'' = \ldots$, $K^3 : k^3 = K'^3 : k'^3 = K''^3 : k''^3 = \ldots$, $\Pi : \pi = \Pi' : \pi' = \Pi'' : \pi'' = \ldots = K^3 : k^3$, $\Pi + \Pi' + \Pi + \ldots : \pi + \pi' + \pi'' + \ldots = \Pi : \pi = K^3 : k^3$, d. i., wenn P, p die Volumina der beiden ähnlichen Polyeder bezeichnen, $P : p = K^3 : k^3$. Also verhalten sich die Volumina ähnlicher Körper wie die Würfel ähnlich liegender Kanten (oder Diagonalen (31.)). Eben so leicht würde sich (29.) auf beliebige Polyeder erweitern lassen.

Digitized by Google

VI. Reguläre Polyeder.

34. Reguläre Polyeder sind solche, welche von lauter congruenten regulären, und gleich gegen einander geneigten, ebenen Figuren eingeschlossen werden. Mittelst Elem. XI. 21. überzeugt man sich leicht, daß es nur fünf reguläre Körper geben kann. Der Winkel des regulären Dreiecks ist $= 60^0$. Drei, vier, fünf solcher Winkel, zu einer Ecke verbunden, geben die Summen 180^0, 240^0, 300^0, also weniger als 360^0; sechs und mehrere geben aber schon 360^0 und mehr, können folglich keine Ecke bilden. Der Winkel des regulären Vierecks ist $= 90^0$. Drei, zu einer Ecke verbunden, geben die Summe 270^0; vier aber schon 360^0, und können folglich keine Ecke bilden. Der Winkel des regulären Fünfecks ist $= 108^0$, $3.108^0 = 324^0$, $4.108^0 = 432^0$, $> 360^0$. Der Winkel des regulären Sechsecks ist $= 120^0$, $3.120^0 = 360^0$. Also können solche Winkel gar keine Ecke bilden. Es kann also bloß drei von regulären Dreiecken, einen von regulären Vierecken, und einen von regulären Fünfecken eingeschlossenen, im Ganzen also nur fünf reguläre Körper geben.

35. Ein regulärer Körper werde von lauter regulären Dreiecken eingeschlossen, deren Anzahl $= n$ sey; so ist $W(2.) = 3n$, $S = n$, $K = \frac{1}{2}W(2.) = \frac{3}{2}n$. Aber $K + 6 \gtreqless 3S$ (9.). Also $\frac{3}{2}n + 6 \gtreqless 3n$, $12 \gtreqless 3n$, $n \gtreqless 4$. Folglich kann die Anzahl der Dreiecke nicht < 4 seyn.

36. Nehmen wir nun zuerst an, daß jede Ecke von drei ebenen Winkeln eingeschlossen werden soll; so ist $W = 3E$, $2K = 3E(2.)$, $S = \frac{1}{3}W = E$. Aber $E + S = K + 2(1.)$. Also $2E = \frac{3}{2}E + 2$, $E = 4 = S$, $K = 6$, und $D = o(12.)$. Dieser reguläre Körper wird also von 4 regulären Dreiecken eingeschlossen, hat 4 Ecken, 6 Kanten und keine Diagonale. Er heißt Tetraeder.

37. Wird jede Ecke von vier Winkeln regulärer Dreiecke eingeschlossen; so ist $W = 4E = 2K(2.)$, $K = 2E$, $S = \frac{1}{3}W = \frac{4}{3}E$, $E + \frac{4}{3}E = 2E + 2(1.)$, $E = 6$,

Digitized by Google

$S = 8$, $K = 12$, und $D = 3$ (12.). Dieser von 8 regulären Dreiecken eingeschlossene Körper mit 6 Ecken, 12 Kanten und 3 Diagonalen heißt Octaeder.

38. Wird endlich jede Ecke von 5 Winkeln regulärer Dreiecke eingeschlossen; so ist $W = 5E = 2K$, und auf ähnliche Art wie vorher erhält man $E = 12$, $S = 20$, $K = 30$, $D = 36$. Dieser von 20 regulären Dreiecken eingeschlossene Körper mit 12 Ecken, 30 Kanten und 36 Diagonalen heißt Icosaeder. Andere reguläre von Dreiecken eingeschlossene reguläre Körper giebt es nicht.

39. In einem regulären Körper, der von lauter regulären Vierecken, und jede Ecke von drei ebenen Winkeln eingeschlossen wird, ist $W = 3E = 2K$, $S = \frac{1}{4}W = \frac{3}{4}E$, $E + \frac{3}{4}E = \frac{3}{2}E + 2$, $E = 8$, $S = 6$, $K = 12$, $D = 4$. Dieser von 6 Quadraten eingeschlossene reguläre Körper mit 8 Ecken, 12 Kanten, 4 Diagonalen heißt Hexaeder oder Würfel.

40. Ist endlich ein regulärer Körper nur von regulären Fünfecken, jede Ecke aber von drei ebenen Winkeln eingeschlossen; so ist $W = 3E = 2K$, $S = \frac{1}{5}W = \frac{3}{5}E$, $E + \frac{3}{5}E = \frac{3}{2}E + 2$, $E = 20$, $S = 12$, $K = 30$, $D = 100$. Dieser von 12 regulären Fünfecken eingeschlossene reguläre Körper mit 20 Ecken, 30 Kanten und 100 Diagonalen heißt Dodecaeder.

41. Man nennt diese Köper oft pythagoräische, auch platonische Körper. Die Pythagoräer verglichen nach ihrer symbolischen Lehrart das Tetraeder mit dem Feuer, den Würfel mit der Erde, das Octaeder mit der Luft, das Icosaeder mit dem Wasser, das Dodecaeder mit dem Weltall. M. s. Plato im Timäus. Das dreizehnte, vierzehnte und funfzehnte Buch in den Elementen des Euclides ist ihrer Untersuchung gewidmet, und Euclides soll sogar die ganzen Elemente wegen dieser Körper verfaßt haben. Das 14te und 15te Buch werden jedoch dem Alexandriner Hypsikles, dessen Zeitalter ungewiß ist, zugeschrieben. Das 13te und 14te Buch betreffen die Construction der regulären Körper, die Verhältnisse ihrer

Digitized by Google

Theile, und ihrer gegenseitigen Beziehungen, das 15te beschäftigt sich mit der Beschreibung dieser Körper in einander. Ein 16tes Buch hat Franciscus Flussates Candalla (Francis Foix de Candalla, Bischoff von Aire, welcher 1594 im 90sten Jahre starb, und eine Lehrstelle der Mathematik zu Bourdeaux gestiftet hat, mit deren Ertheilung die Bedingung verbunden war, daß der Adspirant einen Satz von eigner Erfindung, der nicht über das 9te Buch der Elemente hinausging, und einen neuen Satz von den regulären Körpern vortragen mußte) seiner zuerst 1566 (dann 1578, 1602) erschienenen Uebersetzung der Elemente beigefügt, welches sich auch in des Clavius Euclid (Coloniae 1591. fol. T. II. p. 324.) befindet, und verschiedene Vergleichungen der in einander beschriebenen regulären Körper und ihrer Seiten enthält. Die Netze zur Verfertigung der regulären Körper aus Pappe u. dergl. findet man z. B. in den Wolfischen Schriften. Wir wollen nur die wichtigsten Elemente derselben mittelst des Calculs bestimmen.

42. Eine körperliche Ecke werde von n gleichen und gleich gegen einander geneigten ebenen Winkeln α eingeschlossen. Man soll die Größe eines Neigungswinkels $= 2\gamma$ bestimmen. Aus der Spitze der Ecke sey mit willkührlichem Radius eine Kugel beschrieben, und ABCDE (Fig. 128.) sey das der Ecke entsprechende sphärische Polygon, dessen Seiten und Winkel, wie aus der Natur der Ecke unmittelbar folgt, alle gleich sind. Jede Seite ist $= \alpha$, jeder Winkel $= 2\gamma$. Werden nun zwei Winkel, z. B. A und B durch AF, BF halbirt, und auch CF, DF u. s. f. gezogen; so folgt aus bekannten Sätzen vom sphärischen Dreieck (16. 17.) leicht, daß ABF, BCF, CDF, u. s. f. lauter gleichschenkliche sphärische Dreiecke mit gleichen Seiten und Winkeln sind, so daß also AF $=$ BF, $\angle$ AFB $= \frac{360°}{n} = \frac{2\pi}{n}$ ist. Wird nun AB in G halbirt; so ist FG auf AB senkrecht, und $\angle$ AFG $= \angle$ BFG $= \frac{\pi}{n}$, wie ebenfalls leicht zu beweisen ist (16. 17.). Folglich hat man (Trigonometrie. 76.) sin GBF $= \frac{\cos BFG}{\cos BG}$, d. i.

Digitized by Google

$\sin\gamma = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{1}{2}\alpha}$, wodurch der Neigungswinkel 2γ bestimmt ist.

43. Ist nun bei irgend einem regulären Körper n die Anzahl der ebenen Winkel, welche jede Ecke bilden, m die Anzahl der Seiten jeder Seitenfläche; so ist $\frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{m}\pi$, $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sin\frac{1}{m}\pi$, also $\sin\gamma = \frac{\cos\frac{1}{n}\pi}{\sin\frac{1}{m}\pi}$.

Für das Tetraeder, Hexaeder, Octaeder, Dodecaeder, Icosaeder ist respective $n = 3, 3, 4, 3, 5$; $m = 3, 4, 3, 5, 3$. Folglich nach (Goniometrie. 168.) mittelst leichter Rechnung für diese Körper nach der Reihe:

$$\sin\gamma = \frac{\cos 60^\circ}{\sin 60^\circ} = r\tfrac{1}{3},$$
$$= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 45^\circ} = r\tfrac{1}{2},$$
$$= \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ} = r\tfrac{2}{3},$$
$$= \frac{\cos 60^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{2}{r(10-2r5)},$$
$$= \frac{\cos 36^\circ}{\sin 60^\circ} = \tfrac{1}{3}r(2+\tfrac{3}{4}r5).$$

Hieraus erhält man leicht:

$\cos\gamma$	$\sin 2\gamma$	$\cos 2\gamma$
$= r\frac{2}{3}$	$= \frac{2}{3}r2$	$= \frac{1}{3}$
$= r\frac{1}{2}$	$= 1$	$= 0$
$= r\frac{1}{3}$	$= \frac{2}{3}r2$	$= -\frac{1}{3}$
$= \sqrt{\frac{3-r5}{5-r5}}$	$= \frac{2}{r5}$	$= -\frac{1}{r5}$
$= r(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}r5)$	$= \frac{2}{3}$	$= -\frac{1}{3}r5$

woraus sich für die fünf regulären Körper in obiger Folge respective folgende rationale Ausdrücke ergeben $\cos 2\gamma = \frac{1}{3}$, $\sin 2\gamma = 1$, $\cos 2\gamma = -\frac{1}{3}$, $\tang 2\gamma = -2$, $\sin 2\gamma = \frac{2}{3}$, und man hat

für das Tetraeder $2\gamma = 70^\circ 31' 44''$,
" " Hexaeder " $= 90^\circ$,
" " Octaeder " $= 109^\circ 28' 16''$,
" " Dodecaeder " $= 116^\circ 33' 54''$,
" " Icosaeder " $= 138^\circ 11' 23''$.

Digitized by Google

44. Bezeichnen r, R die Halbmesser der in und um ein reguläres Polyeder beschriebenen Kugel, so ist der gemeinschaftliche Mittelpunkt der beiden Kugeln die gemeinschaftliche Spitze von so vielen regulären Pyramiden, als das Polyeder Seitenflächen hat. Die Seitenkante einer solchen Pyramide ist $= R$, ihre Höhe, welche den Mittelpunkt der Grundfläche trifft, $= r$, der Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche $= \gamma$, der Polygonwinkel der Grundfläche $= \alpha$. Eine Kante des Polyeders sey $= a$, die Halbmesser des in und um eine Seitenfläche beschriebenen Kreises seyen $= r'$, R'; so erhellet auch ohne Figur leicht, daß $r' = \frac{1}{2} a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha$, $r = r' \operatorname{tang} \gamma$, $R' = \frac{1}{2} a \sec \frac{1}{2}\alpha$, $R^2 = r^2 + R'^2$ ist, woraus durch Verbindung dieser Formeln

$$r = \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tang} \gamma,$$
$$R = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(1 + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\alpha^2 . \sec \gamma^2)}.$$

Setzt man nun $\frac{\pi}{m} = \varphi$, $\frac{\pi}{n} = \psi$; so ist $\cos \frac{1}{2}\alpha = \sin \varphi$, $\sin \gamma = \frac{\cos \psi}{\sin \varphi}$, welches, in die Formel für R gesetzt, die Größe unter dem Wurzelzeichen

$$= \frac{\sin \psi^2}{\sin \varphi^2 - \cos \psi^2} = \frac{\sin \psi^2}{\cos \psi^2} \cdot \frac{\cos \psi^2}{\sin \varphi^2 - \cos \psi^2} = \operatorname{tang} \psi^2 . \operatorname{tang} \gamma^2$$

giebt. Da $\operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \cot \frac{\pi}{m}$ (43.); so ist

$$r = \tfrac{1}{2} a \cot \tfrac{\pi}{m} \operatorname{tang} \gamma, \quad R = \tfrac{1}{2} a \operatorname{tang} \tfrac{\pi}{n} \operatorname{tang} \gamma;$$

also $\frac{R}{r} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} \operatorname{tang} \frac{\pi}{m}$. Im Dodecaeder und Icosaeder ist $n = 3$, $m = 5$; $n = 5$, $m = 3$; folglich das Verhältniß $R : r$ in beiden Körpern dasselbe.

45. Ist K der körperliche Inhalt, S eine Seitenfläche, F die ganze Oberfläche, v die Anzahl der Seitenflächen eines Polyeders; so erhellet leicht, daß der Inhalt eines der m congruenten Dreiecke, in welche jede Seitenfläche aus ihrem Mittelpunkte getheilt werden kann, $= \frac{1}{4} a^2 \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{4} a^2 \cot \frac{\pi}{m}$, also $S = \frac{1}{4} m a^2 \cot \frac{\pi}{m}$, $F = \frac{1}{4} m v a^2 \cot \frac{\pi}{m}$ ist. Der Inhalt einer der v gleichen Pyramiden, in welche das Polyeder aus seinem Mittelpunkte getheilt werden

Digitized by Google

kann, ist $= \frac{1}{3} Sr = \frac{1}{12} mra^2 \cot\frac{\pi}{m} = \frac{1}{24} ma^3 \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 . \tang\gamma$. Also $K = \frac{1}{24} mva^3 . \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 . \tang\gamma$.

In den Formeln

$$\sin\gamma = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}};$$

$$r = \tfrac{1}{2} a \cot\frac{\pi}{m} \tang\gamma, \quad R = \tfrac{1}{2} a \tang\frac{\pi}{n} \tang\gamma;$$

$$S = \tfrac{1}{4} ma^2 \cot\frac{\pi}{m}, \quad F = \tfrac{1}{4} mva^2 \cot\frac{\pi}{m};$$

$$K = \tfrac{1}{12} mva^3 . \left(\cot\frac{\pi}{m}\right)^2 . \tang\gamma$$

ist die ganze Theorie der regulären Körper enthalten.

Da

$$a = \frac{2r}{\cot\frac{\pi}{m} \tang\gamma} = \frac{2R}{\tang\frac{\pi}{n} \tang\gamma};$$

so kann auch Alles leicht durch r oder R ausgedrückt werden.

46. Nach diesen Formeln ist:

Für das Tetraeder:

$R = \frac{1}{4} a \sqrt{6} = a . 0{,}6123724,$
$K = \frac{1}{12} a^3 \sqrt{2} = a^3 . 0{,}1178511,$
$F = a^2 . \sqrt{3} = a^2 . 1{,}73205,$
$a = 2R\sqrt{\frac{2}{3}} = R . 1{,}632993,$
$S = \frac{2}{3} R^2 \sqrt{3} = R^2 . 1{,}154701,$
$F = \frac{8}{3} R^2 \sqrt{3} = R^2 . 4{,}618804,$
$K = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3} = R^3 . 0{,}513200.$

Für das Hexaeder:

$R = \frac{1}{2} a \sqrt{3} = a . 0{,}8660254,$
$K = a^3 = a^3 . 1{,}000000,$
$F = a^2 . 6{,}000000,$
$a = \frac{2}{3} R \sqrt{3} = R . 1{,}154700,$
$S = \frac{4}{3} R^2 = R^2 . 1{,}333333,$
$F = 8R^2 = R^2 . 8{,}000000,$
$K = \frac{8}{9} R^2 \sqrt{3} = R^3 . 1{,}539600.$

Digitized by Google

Für das Octaeder:

$R = \frac{1}{2}a\sqrt{2} = a.0{,}7071068$,
$K = \frac{1}{3}a^3\sqrt{2} = a^3.0{,}4714045$,
$F = 2a^2.\sqrt{3} = a^2.3{,}46410$,
$a = R\sqrt{2} = R.1{,}414214$,
$S = \frac{1}{2}R^2.\sqrt{3} = R^2.0{,}866025$,
$F = 4R^2.\sqrt{3} = R^2.6{,}928203$,
$K = \frac{4}{3}R^3 = R^3.1{,}333333$.

Für das Dodecaeder:

$R = \frac{1}{4}a\sqrt{(18+6\sqrt{5})} = a.1{,}4012585$,
$K = \frac{1}{4}a^3.(15+7\sqrt{5}) = a^3.7{,}6631189$,
$F = 3a^2\sqrt{5}.\sqrt{(5+2\sqrt{5})} = a^2.20{,}645728$,
$a = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{3}} = R.0{,}713644$,
$S = \frac{1}{2}R^2\sqrt{10}.\sqrt{(5-\sqrt{5})} = R^2.0{,}876218$,
$F = 2R^2\sqrt{10}.\sqrt{(5-\sqrt{5})} = R^2.10{,}514616$,
$K = \frac{2R^3(5+\sqrt{5})}{3\sqrt{3}} = R^3.2{,}785164$.

Für das Icosaeder:

$R = \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} = a.0{,}9510565$,
$K = \frac{5}{12}a^3.(3+\sqrt{5}) = a^3.2{,}1816950$,
$F = 5a^2\sqrt{3} = a^2.8{,}66025$,
$a = \frac{R\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{5}} = R.1{,}051462$,
$S = \frac{3R^2.(5-\sqrt{5})}{10\sqrt{3}} = R^2.0{,}478727$,
$F = \frac{6R^2.(5-\sqrt{5})}{\sqrt{3}} = R^2.9{,}574540$,
$K = \frac{2R^3.\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{3} = R^3.2{,}536150$.

VII. Archimedische Körper.

47. Archimedische Körper nennt man solche Körper, welche von regulären Figuren zweier- oder dreierlei Art eingeschlossen werden (Keplerі Harmonice mundi Linc. Austr. 1649. fol. Lib. II. 27. 28.), mit der Bedingung, daß alle ihre körperlichen Winkel gleich, nämlich congruent oder symmetrisch sind. Sehr ausführ-

Digitized by Google

liche Untersuchungen über solche Körper findet man in Meier Hirsch geom. Aufg. Berlin. II. 1807. S. 139 — 186, wo S. 186 — 196 auch von solchen Körpern gehandelt wird, die von lauter Rhomben eingeschlossen sind. Geometry improved 1) by a large and accurate table of segments of circles; 2) a concise Treatise of polyedra etc. by A. Sharp. Lond. 1718. (Weitläufig ohne sphär. Trig.). Meister de solidis geometricis. Comm. Gotting. T. VII. Netze für solche Körper zu zeichnen in Marpurgs Progressionalcalcul. Berlin u. Stralsund. 1774. 4tes Buch. Kästner de polyedris data lege irregularibus. Comm. Gotting. Vol. VI. VII. VIII. Mit Anwendung auf Krystallographie Kästner de sectionibus solidorum crystallorum structuram illustrantibus. Ibid. VI. Der rein-wissenschaftliche Werth solcher Untersuchungen ist sehr beschränkt. M. Hirsch (a. a. O. S. 149. 175.) giebt auch eine Aufzählung der überhaupt möglichen archimedischen Körpern.

VIII. Polyedrometrie.

48. Was die Polygonometrie (Trigonometrie. IV.) in Bezug auf Polygone leistet, sucht die Polyedrometrie in Bezug auf Polyeder zu leisten, nämlich aus einigen, ein Polyeder bestimmenden Stücken (13.), die übrigen Stücke durch Rechnung zu finden. Eine vollständige Auflösung aller Fälle würde eine großes Werk füllen. Wir müssen daher hier mit einigen, vorzüglich von L'Huilier und not (S. dessen Geom. d. Stellung. A. d. Franz. v. umacher. Altona. Thl. II. 1810. S. 57. und eine andlung von L'Huilier in den Mém. présentés à nstitut par les savans étrangers. T. I.) gefundenen rundformeln begnügen.

49. Die Projection jeder ebenen Figur auf eine Ebene ist ihrem Inhalte nach dem Producte gleich, welches man erhält, wenn man den Flächeninhalt der gegebenen Figur mit dem Cosinus des Neigungswinkel ihrer Ebene gegen die Projectionsebene multiplicirt.

Digitized by Google

Iſt nämlich (Fig. 129.) AB'C die Projection von ABC, und der Neigungswinkel BDB' $= \alpha$; ſo iſt $\Delta AB'C = \frac{1}{2}AC.B'D = \frac{1}{2}AC.BD.\cos\alpha = \Delta ABC.\cos\alpha$. Iſt dagegen allgemein (Fig. 130.) A'B'C' die Projection von ABC; ſo ſey CD mit MN parallel, und durch CD eine mit der Projectionsebene parallele Ebene gelegt. Die Projectionen der Dreiecke ADC, BDC auf dieſer Ebene ſind nach dem Obigen $= \Delta ADC.\cos\alpha$, $\Delta BDC.\cos\alpha$. Folglich $\Delta A'B'C'$, welches der Projection auf der parallelen Ebene durch CD offenbar gleich iſt, $= (\Delta ADC + \Delta BDC).\cos\alpha = \Delta ABC.\cos\alpha$. Fiele CD außerhalb des Dreiecks ABC, ſo würde ſich die Addition nur in eine Subtraction verwandeln. Jede geradlinige Figur läßt ſich in Dreiecke zerlegen, und jede krummlinige Figur kann als ein Vieleck mit unendlich vielen Seiten betrachtet werden. Alſo gilt der Satz allgemein.

50. Alle Seitenflächen eines Polyeders denke man ſich auf irgend eine Ebene projicirt. Der Inhalt der Figur, welche die äußerſte Gränzlinie der Projectionen bildet, ſey $= M$. Ferner ſeyen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. die ſpitzen Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Projectionsebene, welche nach dem innern Raume des Polyeders; $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$. dagegen die nach dem äußern Raume deſſelben hinliegenden Neigungswinkel, und a, b, c, ...; a', b', c', ... die entſprechenden Seitenflächen; ſo iſt klar, daß

$$\begin{aligned} M &= a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots, \\ M &= a'\cos\alpha' + b'\cos\beta' + c'\cos\gamma' + \ldots, \\ o &= a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots \\ &\quad - a'\cos\alpha' - b'\cos\beta' - c'\cos\gamma' + \ldots \end{aligned}$$

iſt. Nimmt man aber alle Neigungswinkel entweder nach dem innern, oder nach dem äußern Raume des Polyeders hin; ſo ſind die Neigungswinkel, welche den ſpitzen Neigungswinkeln nach dem äußern oder innern Raume hin entſprechen, ſtumpfe Winkel, und ihre Coſinus alſo poſitiv. Bezeichnen wir alſo, alle Neigungswinkel nach dem innern, oder alle nach dem äußern Raume hin nehmend, die Seitenflächen und entſprechenden Neigungswinkel durch a, b, c, d, ..., und $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$.; ſo iſt nach dem Obigen

$$o = a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + \ldots.$$

Digitized by Google

51. Bezeichnen wir nun den nach dem innern Raume des Polyeders hin liegenden Neigungswinkel irgend zweier Seitenflächen m, n gegen einander, überhaupt durch (m, n); so ist, wenn irgend eine Seitenfläche, z. B. a, als Projectionsebene angenommen wird,

$$o = a\cos(a, a) + b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + \dots$$

Da aber die Winkel nach dem innern Raume hin genommen werden; so ist $(a, a) = 180^0$, $\cos(a, a) = -1$, und folglich, zugleich durch Verwechslung der Buchstaben:

$$\begin{aligned} a &= b\cos(a, b) + c\cos(a, c) + d\cos(a, d) + \dots \\ b &= a\cos(b, a) + c\cos(b, c) + d\cos(b, d) + \dots \\ c &= a\cos(c, a) + b\cos(c, b) + d\cos(c, d) + \dots \\ d &= a\cos(d, a) + b\cos(d, b) + c\cos(d, c) + \dots \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Jede Seitenfläche ist also der Summe aller andern gleich, wenn man jede mit dem Cosinus ihres nach dem innern Raume des Polyeders hin liegenden Neigungswinkels gegen jene Seitenfläche multiplicirt.

52. Multiplicirt man die vorigen Gleichungen auf beiden Seiten successive mit a, b, c, ..., und addirt; so erhält man

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots = \\ 2ab\cos(a, b) + 2ac\cos(a, c) + 2ad\cos(a, d) + \dots \\ + 2bc\cos(b, c) + 2bd\cos(b, d) + \dots \\ + 2cd\cos(c, d) + \dots \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \dots \\ + 2ab + 2ac + 2ad + \dots \\ + 2bc + 2bd + \dots \\ + 2cd + \dots \end{aligned}\right\} =$$

$$= (a + b + c + d \dots)^2$$

$$\begin{aligned} = 2ab\{1 + \cos(a, b)\} + 2ac\{1 + \cos(a, c)\} + \dots \\ + 2bc\{1 + \cos(b, c)\} + \dots \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a + b + c + d + \dots}{2}\right)^2 =$$

$$\begin{aligned} ab\cos^2\tfrac{1}{2}(a, b) + ac\cos^2\tfrac{1}{2}(a, c) + ad\cos^2\tfrac{1}{2}(a, d) + \dots \\ + bc\cos^2\tfrac{1}{2}(b, c) + bd\cos^2\tfrac{1}{2}(b, d) + \dots \\ + cd\cos^2\tfrac{1}{2}(c, d) + \dots \end{aligned}$$

Also erhält man das Quadrat der halben Oberfläche eines Polyeders, wenn man die Producte aller Seiten-

Digitized by Google

flächen zu zwei und zwei in das Quadrat des Cosinus ihres halben gegenseitigen Neigungswinkel (wie oben genommen) zu einander addirt.

53. Da (51.)

$$a^2 = ab\cos(a, b) + ac\cos(a, c) + \ldots;$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \ldots =$$
$$2ab\cos(a, b) + 2ac\cos(a, c) + 2ad\cos(a, d) + \ldots$$
$$+ 2bc\cos(b, c) + 2bd\cos(b, d) + \ldots$$
$$+ 2cd\cos(c, d) + \ldots;$$

so erhält man leicht

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + \ldots$$
$$- 2bc\cos(b, c) - 2bd\cos(b, d) - \ldots$$
$$- 2cd\cos(c, d) - \ldots$$

Also erhält man jede Seitenfläche, wenn man von der Summe der Quadrate aller übrigen die doppelte Summe der Producte aller übrigen zu zwei und zwei in den Cosinus ihres gegenseitigen Neigungswinkels (wie oben) subtrahirt, und aus der Differenz der Quadratwurzel zieht.

Für eine dreiseitige Pyramide ist also immer

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2$$
$$- 2\{bc\cos(b, c) + bd\cos(b, d) + cd\cos(c, d)\}$$

und, wenn die Pyramide rechtwinklig, d. i. $(b, c) = (b, d) = (c, d) = 90^0$, ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2,$$

wie schon Theil III. S. 926. auf andere Art bewiesen.

54. Der cubische Inhalt eines jeden Polyeders läßt sich auch durch die Coordinaten seiner Ecken ausdrücken. Sey A′B′C′ die Grundfläche eines schief abgeschnittenen geraden Prismas ABCA′B′C′, und zugleich die Ebene der xy. Die Coordinaten von A, B, C seyen x, y, z; x′, y′, z′; x″, y″, z″; also, da das Prisma gerade seyn soll, x, y; x′, y′; x″, y″ die Coordinaten von A′, B′, C′. Der Inhalt der Grundfläche A′B′C′ sey $= F$, und der Kürze wegen möge z unter z, z′, z″ am kleinsten seyn. Legt man durch A eine mit der Grundfläche parallele Ebene; so wird das schief abgeschnittene Prisma in ein gerades Prisma und eine vierseitige Pyramide getheilt. Der Inhalt des erstern ist $= Fz$. Die

Digitized by Google

Spitze der Pyramide liegt in A, und ihre Höhe ist = dem von A′ auf B′C′ gefällten Perpendikel, welches $= \frac{2F}{B'C'}$ ist. Die Grundfläche der Pyramide ist ein Trapezium, dessen parallele Seiten $z' - z$, $z'' - z$ sind, und dessen Höhe = B′C′, sein Inhalt also $= \frac{(z' + z'' - 2z).B'C'}{2}$; folglich der Inhalt der Pyramide $= \frac{1}{3}F(z' + z'' - 2z)$. Addirt man dies zu Fz; so erhält man den Inhalt des schief abgeschnittenen Prismas $= \frac{1}{3}(z + z' + z'').F$. Nach Vieleck. (59.) ist aber

$$F = \tfrac{1}{2}|x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y)|.$$

Folglich der Inhalt unsers Prismas =

$$\tfrac{1}{6}(z + z' + z'')|x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y)|.$$

Hat man nun ein mehr als dreiseitiges gerades schief abgeschnittenes Prisma, dessen Grundfläche die Ebene der xy ist; so kann man sich dasselbe in mehrere dreiseitige schief abgeschnittene Prismen zerlegt denken, und es ist, wenn die Coordinaten seiner außerhalb der Grundfläche liegenden Ecken durch x, y, z; x', y', z'; ... $x^{n-1}, y^{n-1}, z^{n-1}$ bezeichnet, und alle Diagonalflächen durch den Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, gehend gedacht werden, für

$$\begin{aligned}
X' &= x(y'' - y') + x'(y - y'') + x''(y' - y),\\
X'' &= x(y''' - y'') + x''(y - y''') + x'''(y'' - y),\\
X''' &= x(y'''' - y''') + x'''(y - y'''') + x''''(y''' - y),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
X^{n-2} &= x(y^{n-1} - y) + x^{n-1}(y - y^{n-2}) + x^{n-2}(y^{n-1} - y),
\end{aligned}$$

der Inhalt des schief abgeschnittenen mehrseitigen Prismas =

$$\tfrac{1}{6}(z + z' + z'')X' + \tfrac{1}{6}(z + z'' + z''')X''$$
$$+ \tfrac{1}{6}(z + z''' + z'''')X''' + \ldots + \tfrac{1}{6}(z + z^{n-2} + z^{n-1})X^{n-2}.$$

55. Denkt man sich nun irgend ein Polyeder durch rechtwinklige Coordinaten auf eine Ebene der xy bezogen; so erhält man offenbar zwei Reihen schief abgeschnittener Prismen über derselben Grundfläche. Bezeichnet man diese Prismen durch P, P′, P″, ...; Π, Π′, Π″, ...; so ist klar, daß der Inhalt des Polyeders = P + P′ + P″ + ... ± Π ± Π′ ± Π″ ± ..., wo die obern oder

Digitized by Google

untern Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die Ebene der xy das Polyeder schneidet, oder nicht schneidet. Die einzelnen Prismen lassen sich durch ihre Coordinaten ausdrücken (54.), also auch der Inhalt des Polyeders.

56. Eine ganz vollständige Ausführung der Lehre von den Polyedern ließ sich ohne zu große Weitläufigkeit in diesem Artikel nicht geben. Indeß mag das Obige zur Andeutung der Hauptmomente dieser interessanten Theorie hinreichend seyn, wobei ich nur noch bemerke, daß es für jedes Polyeder, wie für jedes Vieleck auch einen Punkt der mittlern Entfernungen giebt, d. h. einen Punkt von solcher Beschaffenheit, daß seine Entfernung von jeder willkührlich im Raume angenommenen Ebene das arithmetische Mittel der Entfernungen aller Ecken des Polyeders von dieser Ebene ist. Die im Art. Vieleck gegebene Ausführung der Theorie dieses Punktes wird hinreichend seyn, um mit Leichtigkeit die Anwendung auf Polyeder zu machen. Verschiedene Eigenschaften der Polyeder sind in den Zeitschriften der Mathematik, besonders in Crelles Journal, und den Annales d. Math. par Gergonne zerstreut, worauf wir hier noch im Allgemeinen verweisen.

Vieleckige Zahlen, s. Polygonalzahlen.

Vieleckseite, s. Vieleck.

Vieleckswinkel, s. Vieleck.

Vielfacher Punkt (punctum multiplex) ist ein Punkt einer Curve, welchen mehrere Zweige derselben mit einander gemein haben. Jenachdem zwei, drei, vier, u. s. w. Zweige der Curve durch diesen Punkt gehen, heißt er ein zweifacher- oder Doppelpunkt (punctum duplex), ein dreifacher, vierfacher Punkt, u. s. w. (punctum triplex, quadruplex, u. s. w.). Die Theorie dieser Punkte setzt eine allgemeinere Darstellung der Lehre von den Berührungen, als in diesem Wörterbuche in dem Art. Berührende Linie gegeben worden ist, voraus, wodurch wir genöthigt sind, einige Betrachtungen in dieser Beziehung

Digitized by Google

vorauszuschicken, jedoch nur so viel, als die Lehre von den vielfachen Punkten unmittelbar erfordert.

1. Die Gleichungen zweier Curven seyen

$$y = f(x),\ y_1 = f'(x_1);$$

so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$f(x+i) = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \cdots,$$

$$f'(x_1+i) = y_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \cdots,$$

wofür wir der Kürze wegen setzen wollen:

$$f(x+i) = y + y'\cdot\frac{i}{1} + y''\cdot\frac{i^2}{1.2} + y'''\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + y''''\cdot\frac{i^4}{1..4} + \cdots,$$

$$f'(x_1+i) = y_1 + y_1'\cdot\frac{i}{1} + y_1''\cdot\frac{i^2}{1.2} + y_1'''\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + y_1''''\cdot\frac{i^4}{1..4} + \cdots.$$

Die Bedingung, daß diese beiden Curven einen Punkt, dessen Abscisse nun durch x bezeichnet werden soll, mit einander gemein haben, wird durch die Gleichung

$$y = y_1 \text{ oder } f(x) = f'(x)$$

ausgedrückt. Setzen wir die auf der Ordinate, welche der Abscisse $x+i$ entspricht, genommene Entfernung der beiden Curven von einander $= \Delta$; so ist, nur immer x für x_1 gesetzt, offenbar

$$\Delta = f(x+i) - f'(x+i),$$

oder, weil nach der so eben ausgesprochenen Bedingung $y = y_1$ ist:

$$\Delta = (y'-y_1')\cdot\frac{i}{1} + (y''-y_1'')\cdot\frac{i^2}{1.2} + (y'''-y_1''')\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + (y''''-y_1'''')\cdot\frac{i^4}{1....4} + \cdots.$$

Nun ist klar (M. v. den Art. Taylors Lehrsatz. 32.), einmal, daß diese Differenz, wenn man i abnehmen läßt, willkührlich klein gemacht werden kann, dann aber auch, daß, gewissermaßen bei gleichem Grade der Kleinheit von i, dieselbe desto kleiner ist, je mehr Glieder der Reihe, durch welche sie dargestellt wird, vom Anfange an ver-

Digitized by Google

schwinden; und desto inniger werden die beiden Curven sich an einander anschließen.

Hat man nun zuerst

$$y = y_1 , y' = y'_1 ;$$

so daß

$$\Delta = (y'' - y_1'') \cdot \frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_1''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_1'''') \cdot \frac{i^4}{1...4} + \ldots ;$$

so denke man sich irgend eine dritte Curve, deren Gleichung

$$y_2 = f''(x) ,$$

und bezeichne, indem man zugleich annimmt, daß diese Curve auch durch den Punkt geht, welchen die beiden ersten mit einander gemein haben, die Entfernung dieser Curve von der ersten, auf der Ordinate genommen, welche der Abscisse $x + i$ entspricht, durch Δ'; so ist, wie vorher

$$\Delta' = (y' - y'_2) \cdot \frac{i}{1} + (y'' - y_2'') \cdot \frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_2''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_2'''') \cdot \frac{i^4}{1...4} + \ldots .$$

Folglich kann man, wofern nicht etwa $y' - y'_2 = 0$ ist, i immer so klein nehmen, daß $\Delta < \Delta'$ ist, so daß also die dritte Curve in der Nähe des allen gemeinschaftlichen Punktes nicht zwischen den beiden ersten Curven liegen kann, wenn nicht $y' - y'_2 = 0$, $y'_2 = y'$, und also auch $y'_2 = y'_1$ ist. Man sagt daher in diesem Falle, wo also

$$y = y_1 , y' = y'_1$$

ist, daß zwischen den beiden ersten Curven in dem Punkte, dessen Abscisse x ist, eine Berührung des ersten Grades statt findet. Eine Berührung des zweiten Grades dagegen findet statt, wenn

$$y = y_1 , y' = y'_1 , y'' = y''_1 ,$$

ist, und eben so eine Berührung des dritten Grades, wenn

$$y = y_1 , y' = y_1' , y'' = y_1'' , y''' = y_1''' ,$$

ist, u. s. f.

Bei den Berührungen des zweiten Grades ist

Digitized by Google

$$\Delta = (y''' - y_1''') \cdot \frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_1'''') \cdot \frac{i^4}{1 \ldots 4} + \ldots ,$$

und ändert folglich, wegen der in dem ersten Gliede, von welchem für kleine i das Zeichen von Δ abhängt, enthaltenen ungeraden Potenz von i, sein Zeichen mit i, so daß also die osculirende Curve in der Nähe des Berührungspunktes oberhalb und unterhalb der ersten Curven liegt. Aehnliche Bemerkungen gelten für alle Berührungen einer geraden Ordnung.

2. Um ein Beispiel zu geben, sey die osculirende Curve eine gerade Linie, deren Gleichung

$$y_1 = f(x_1) = Ax_1 + B ,$$

und so zu bestimmen, daß sie mit einer durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung hat. Zu dem Ende hat man nach dem Obigen:

$$y_1 = y , \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x} ,$$

indem man $x_1 = x$ setzt. Aber $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = A$; also $A = \frac{\partial y}{\partial x}$;

$$y = Ax + B , B = y - x\frac{\partial y}{\partial x} .$$

Folglich die Gleichung der Berührenden:

$$y_1 - y = \frac{\partial y}{\partial x}(x_1 - x) .$$

Sind die Coordinaten rechtwinklig, und bezeichnet α den Winkel der Berührenden mit der Abcissenaxe; so ist

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\partial y}{\partial x} .$$

Die Subtangente würde sich ebenfalls leicht bestimmen lassen.

Da bei einer Berührung des nten Grades nach dem Obigen $n + 1$ Bedingungen zu erfüllen sind; so muß die Gleichung einer Curve, die eine osculirende Curve des nten Grades seyn kann, $n + 1$ constante, durch die erwähnten $n + 1$ Bedingungsgleichungen zu bestimmende, Größen enthalten. Die Osculation der geraden Linie kann also nie den ersten Grad übersteigen.

Digitized by Google

3. Soll der Kreis gefunden werden, welcher mit einer durch die Gleichung

$$y = f(x)$$

gegebenen Curve eine Berührung des ersten Grades hat; so sey

$$(x_1 - a)^2 + (y_1 - b)^2 = r^2$$

die Gleichung dieses Kreises. Folglich, wegen der Berührung erster Ordnung:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x-a}{y-b};$$

woraus für $\frac{\partial y}{\partial x} = y'$:

$$x = a + \frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}}, y = b - \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Man hat also bloß zwei Gleichungen, und eine der Constanten a, b, r bleibt also unbestimmt. Eliminirt man r; so erhält man:

$$b - y = -\frac{1}{y'}(a-x) = -\frac{\partial x}{\partial y}(a-x),$$

welches, wie leicht erhellen wird, die Gleichung der Normale der gegebenen Curve für den Berührungspunkt ist, auf der also die Mittelpunkte aller Kreise, die mit der gegebenen Curve eine Berührung erster Ordnung haben, liegen.

Für die Berührung zweiter Ordnung hat man, x für x_1 gesetzt:

$$y_1 = y, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Folglich

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

$$(x-a) + (y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + (y-b)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

woraus leicht:

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$b = y + \frac{1+y'^2}{y''}, r = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

Digitized by Google

zur völligen Bestimmung des gesuchten Kreises, der bekanntlich der Krümmungskreis, und sein Radius der Krümmungshalbmesser der gegebenen Curve für den gegebenen Punkt genannt wird, und also immer eine Berührung zweiter Ordnung mit derselben hat.

So viel schien aus der Lehre von den Berührungen zur Erläuterung des Vorhergehenden, und dem Verständniß des Folgenden nöthig zu seyn.

4. Man hat zwei Arten vielfacher Punkte zu unterscheiden, jenachdem nämlich die einzelnen Zweige der Curve sich in ihnen schneiden, oder bloß berühren. Die Gleichung der gegebenen Curve sey immer:

$$u = f(x, y) = 0 .$$

5. Im ersten Falle hat jeder Zweig der Curve in dem vielfachen Punkte eine verschiedene Berührende, und also, ohne daß x, y, die Coordinaten des vielfachen Punktes, sich ändern, $\frac{\partial y}{\partial x}$ (2.) eben so viele Werthe, als die Ordnungszahl des vielfachen Punktes angiebt, so daß man also auch umgekehrt aus der Anzahl der verschiedenen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ in dem vielfachen Punkte auf dessen Ordnungszahl schließen kann. Die Differentialgleichung der gegebenen Curve ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0 .$$

Zwei verschiedene Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ in dem vielfachen Punkte seyen A, B; so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + B\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ,$$

wo $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ in beiden Gleichungen einerlei Werth haben. Folglich durch Subtraction

$$(A - B)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 ,$$

und demnach, weil $A - B$ nicht $= 0$ ist,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \text{ also auch } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 .$$

Digitized by Google

Hat also die gegebene Curve vielfache Punkte; so müssen die Coordinaten derselben den Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, u = 0$$

genügen, und man wird also x, y aus zweien dieser Gleichungen bestimmen, und untersuchen, ob die gefundenen Werthe auch der dritten genügen, in welchem Falle diese Werthe im Allgemeinen vielfachen Punkten der Curve als Coordinaten entsprechen.

Entwickelt man nun aus

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\partial x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial y = 0$$

die zweite Differentialgleichung; so wird

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\partial x^2 + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\partial x\,\partial y + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\partial y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\partial^2 y = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$. Also

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + 2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ vom zweiten Grade, und dieser Differentialquotient hat also, wofern nicht alle Glieder der Gleichung $= 0$ werden, zwei Werthe, die entweder beide reell, oder beide imaginär sind. Im ersten Falle ist der vorher gefundene Punkt ein Doppelpunkt, und die Lagen der beiden Berührenden in demselben werden durch die beiden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, die sich aus obiger Gleichung ergeben, bestimmt. Sind aber beide Wurzeln derselben imaginär; so giebt es, weil

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{tang}\,\alpha$$

gar keinen reellen Werth hat, für den gefundenen Punkt keine Berührende, so daß derselbe also auch nicht eigentlich in der Curve, als zusammenhängender Zug gedacht, liegen kann, obgleich er allerdings auch der Gleichung der Curve entspricht. Solche sich zwar aus der Gleichung einer Curve mit ergebende, aber nicht eigentlich in der Curve als zusammenhängender Zug liegende Punkte heißen conju-

Digitized by Google

girte Punkte, oder auch, namentlich bei ältern Schriftstellern, unsichtbare vielfache Punkte (puncta multiplicia invisibilia).

Sollten alle Glieder der obigen quadratischen Gleichung verschwinden; so müßte man die dritte Differentialgleichung entwickeln, in welcher wieder die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ behafteten Glieder verschwinden werden. In Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist diese Gleichung vom dritten Grade, und hat also entweder drei reelle Wurzeln, oder eine reelle und zwei imaginäre, vorausgesetzt, daß nicht alle Glieder derselben verschwinden. Sind alle drei Wurzeln reell; so ist der Punkt ein dreifacher, im andern Falle dagegen nur ein einfacher, weil $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur einen, aber doch einen, reellen Werth hat. Verschwinden auch alle Glieder der vorhergehenden Gleichung; so entwickele man die vierte Differentialgleichung, welche in Bezug auf $\frac{\partial y}{\partial x}$ vom vierten Grade seyn wird, und in der wieder die mit $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$ behafteten Glieder verschwinden. Diese Gleichung hat also entweder vier reelle, oder zwei reelle und zwei imaginäre, oder vier imaginäre Wurzeln. Im ersten Falle ist der Punkt ein vierfacher, im zweiten ein Doppelpunkt, im dritten ein conjugirter. Wie man auf diese Art weiter gehen kann, fällt in die Augen. Die folgenden Beispiele werden zur Erläuterung des Gesagten dienen.

Entwickelt man $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus der Gleichung der gegebenen Curve unmittelbar; so erhält man, wie aus der hier gelehrten Bestimmung der vielfachen Punkte unmittelbar hervorgeht, wenn in $\frac{\partial y}{\partial x}$ für x die Abscisse eines vielfachen Punktes gesetzt wird, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{0}{0}$, dessen Werth auch nach den bekannten Regeln (Function. 50.) bestimmt werden kann.

6. Die Gleichung der Curve sey

$$u = x^4 - 2ay^3 - 3a^2y^2 - 2a^3x^2 + a^4 = 0;$$

so ist

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 4x^3 - 4a^2x, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -6ay^2 - 6a^2y;$$

$$x(x^2 - a^2) = 0, y(y + a) = 0;$$

$$x = 0, = \pm a; y = 0, = -a.$$

Nun untersuche man, ob diese Werthe von x, y der gegebenen Gleichung $u = 0$ genügen. Für $x = 0$ erhält man aus derselben $y = -a$, und für $y = 0$ ergiebt sich $x = \pm a$, so daß also

$$x = 0, y = -a; x = \pm a, y = 0$$

drei vielfachen Punkten entsprechen können. Nun hat man

$$\left.\begin{aligned} 4x^3\partial x - 4a^2x\partial x - 6ay^2\partial y - 6a^2y\partial y &= 0, \\ 2x^3\partial x - 2a^2x\partial x - 3ay^2\partial y - 3a^2y\partial y &= 0, \\ 6x^2\partial x^2 - 2a^2\partial x^2 - 6ay\partial y^2 - 3a^2\partial y^2 & \\ - 3ay(y + a)\partial^2 y & \end{aligned}\right\} = 0,$$

$$6x^2 - 2a^2 - 3a(2y + a)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Für $x = 0$, $y = -a$ wird diese Gleichung:

$$-2 + 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\tfrac{2}{3}};$$

und für $x = \pm a$, $y = 0$:

$$4 - 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt{\tfrac{4}{3}}.$$

Also ist jeder der drei vorher bestimmten Punkte ein Doppelpunkt. Für den ersten ist $\text{tang}\,\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$, für die beiden andern dagegen $\text{tang}\,\alpha = \sqrt{\frac{4}{3}}$, wo natürlich immer das doppelte Zeichen der Wurzel zu berücksichtigen ist.

Für $x = 0$ ist die Gleichung

$$-2ay^3 - 3a^2y^2 + a^4 = 0,$$

welche sich in folgende drei Factoren zerlegen läßt:

$$a(y + a)(y + a)(a - 2y) = 0,$$

und demnach die drei Wurzeln

$$y = -a, y = -a, y = \tfrac{1}{2}a$$

hat. Die beiden ersten entsprechen dem einen Doppelpunkte, die letztere dient zur Verzeichnung der Curve. Zu weiterer Bestimmung ihrer Gestalt suche man die Punkte, in denen die Berührende der Abscissen- und Ordinatenaxe parallel ist. Für den ersten Fall ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2x(x^2 - a^2)}{3ay(y + a)} = 0.$$

Digitized by Google

Also $x(x^2 - a^2) = 0$, d. i. $x = 0$, $x = \pm a$. Für $x = 0$ sind die entsprechenden Werthe von y schon gefunden, und $x = \pm a$ giebt die beiden Doppelpunkte, für welche $y = 0$. Setzt man aber $x = \pm a$; so wird die gegebene Gleichung:

$$-2ay^3 - 3a^2y^2 = 0, \quad -2y - 3a = 0,$$

woraus noch $y = -\frac{3}{2}a$ für die den Abscissen $x = \pm a$ entsprechenden Punkte, in denen die Berührende der Abscissenaxe parallel ist. Für die Punkte, wo die Berührende der Ordinatenaxe parallel ist, ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \infty, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{3ay(y+a)}{2x(x^2 - a^2)} = 0,$$

Also $y(y+a) = 0$, $y = 0$, $y = -a$. Der erste Werth von y giebt, wie wir schon wissen, $x = \pm a$, die beiden letztern Doppelpunkte. Für $y = -a$ wird die Gleichung der Curve:

$$x^4 - 2a^2x^2 = 0, \quad x^2 - 2a^2 = 0.$$

Also $x = 0$, wie wir schon wissen, und $x^2 = 2a^2$, $x = \pm a\sqrt{2}$ für die Punkte, in denen die Berührende der Ordinatenaxe parallel ist. Für die Doppelpunkte wird hier immer $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$. Zur Verzeichnung unserer Curve haben wir also:

$x = 0, \quad y = -a$ $x = +a, \quad y = 0$ $x = -a, \quad y = 0$	Doppelpunkte.
$x = 0, \quad y = +\frac{1}{2}a$ $x = +a, \quad y = -\frac{3}{2}a$ $x = -a, \quad y = -\frac{3}{2}a$	Punkte, wo die Berührende der Abscissenaxe parallel ist.
$x = +a\sqrt{2}, \quad y = -a$ $x = -a\sqrt{2}, \quad y = -a$	Punkte, wo die Berührende der Ordinatenaxe parallel ist.

Die Lage der Berührenden in den Doppelpunkten ist schon vorher bestimmt. Die Curve ist in Fig. 131., wo $AD = -a$, $AD' = +a$, $AD'' = -a$; $AE' = +a\sqrt{2}$, $AE'' = -a\sqrt{2}$; $AF = +\frac{1}{2}a$; $D'G' = -\frac{3}{2}a$; $D''G'' = -\frac{3}{2}a$; $E'H' = -a$, $E''H'' = -a$ ist, verzeichnet.

Digitized by Google

7. Für

$$u = ay^3 - x^3y - bx^3 = 0 \text{ ist:}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = -3x^2(y+b), \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 3ay^2 - x^3;$$

$$x^2(y+b) = 0, 3ay^2 - x^3 = 0;$$

$$x = 0, y = -b; x = \sqrt[3]{3ab^2}, y = 0.$$

Nur $x = 0$, $y = 0$ genügen der gegebenen Gleichung $u = 0$. Die zweite Differentialgleichung wird mit Weglassung des $\partial^2 y$ enthaltenden Gliedes:

$$6ay\partial y^2 - 6x^2\partial x\partial y - 6x(y+b)\partial x^2 = 0,$$

in welcher also alle Glieder für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden. Eben so wird die dritte Differentialgleichung mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$6a\partial y^3 - 18x\partial x^2\partial y - 6(y+b)\partial x^3 = 0,$$

woraus für $x = y = 0$:

$$a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - b = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = \sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

Also hat $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur einen reellen Werth, und der durch $x = 0$, $y = 0$ gegebene Punkt ist also kein vielfacher Punkt, deren die Curve folglich überhaupt nicht hat.

8. Sey ferner

$$u = x^4 + 2ax^2y - ay^3 = 0;$$

so ist die erste Differentialgleichung:

$$4x^3\partial x + 4axy\partial x + 2ax^2\partial y - 3ay^2\partial y = 0,$$

$$4x(x^2 + ay) + a(2x^2 - 3y^2)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$x(x^2 + ay) = 0, 2x^2 - 3y^2 = 0;$$

$$x = 0, x = +a\sqrt{\tfrac{2}{3}}, = -a\sqrt{\tfrac{2}{3}}; y = 0, = -\tfrac{2}{3}a, = -\tfrac{2}{3}a.$$

Nur $x = 0$, $y = 0$ genügen der gegebenen Gleichung $u = 0$. Die zweite Differentialgleichung ist, mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$6x^2 + 2ay + 4ax\frac{\partial y}{\partial x} - 3ay\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

Alle Glieder dieser Gleichung verschwinden für $x = 0$, $y = 0$. Entwickelt man nun die dritte Differentialgleichung; so ist, wieder mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

Digitized by Google

$$4x + 2a\frac{\partial y}{\partial x} - a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 = 0$$

und folglich für $x = 0$:

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left\{2 - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\} = 0.$$

Folglich ist der Punkt, für welchen $x = 0$, $y = 0$, ein dreifacher Punkt, und zur Bestimmung der Berührenden der drei sich in demselben schneidenden Zweige hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0, = +\sqrt{2}, = -\sqrt{2},$$

so daß also die eine dieser Berührenden der Abscissenaxe parallel, oder vielmehr, weil $x = b$, $y = 0$, die Abscissenaxe selbst ist. Die beiden andern sind durch $\tang\alpha = \pm\sqrt{2}$ ebenfalls bestimmt. Die Curve hat die in Fig. 132. dargestellte Gestalt, wie sich bei näherer Untersuchung zeigt.

9. Für

$$u = y^4 - x^5 + x^4 + 3x^2y^2 = 0$$

ist die erste Differentialgleichung:

$$4y^3\partial y - 5x^4\partial x + 4x^3\partial x + 6xy^2\partial x + 6x^2y\partial y = 0,$$

$$4x^3 - 5x^4 + 6xy^2 + 2y(3x^2 + 2y^2)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$4x^3 - 5x^4 + 6xy^2 = 0,\ 2y(3x^2 + 2y^2) = 0.$$

Allein $x = 0$, $y = 0$ erfüllen diese Bedingungen, und genügen der gegebenen Gleichung. Die zweite und dritte Differentialgleichung verschwinden an sich. Die vierte ist mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + 3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 = 0.$$

Löset man diese Gleichung wie eine quadratische auf; so findet man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{\pm\sqrt{5}-3}{2}},$$

so daß also alle Wurzeln obiger Gleichung imaginär sind, und der durch $x = 0$, $y = 0$ bestimmte Punkt folglich ein conjugirter Punkt der Curve ist.

10. Die Gleichung sey

Digitized by Google

$$u = ay^2 - 2aby + ab^2 - x^3 - cx^2 = o,$$
$$-x(3x + 2c)\partial x + 2a(y - b)\partial y = o,$$
$$-x(3x + 2c) + 2a(y - b)\frac{\partial y}{\partial x} = o,$$
$$x(3x + 2c) = o,\ y - b = o;$$
$$x = o, = -\tfrac{2}{3}c;\ y = b.$$

Nur $x = o$, $y = b$ genügen der gegebenen Gleichung. Die zweite vollständige Differentialgleichung ist:

$$-(3x + c)\partial x^2 + a\partial y^2 - a(y - b)\partial^2 y = o,$$

und, mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$-3x - c + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o.$$

Also für $x = o$:

$$-c + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = o,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}},$$

wodurch die Berührenden der beiden Zweige bestimmt werden. Der durch $x = o$, $y = b$ bestimmte Punkt ist also ein Doppelpunkt.

11. Findet aber, um nun zu näherer Betrachtung des in (4.) angedeuteten zweiten Falls überzugehen, zwischen den einzelnen Zweigen der Curve in dem vielfachen Punkte überhaupt eine Berührung des $(n-1)$ten Grades statt; so bezeichne man die Werthe von

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}, \ldots$$

in dem vielfachen Punkte für irgend einen bestimmten Zweig durch y', y'', y''', y'''', ..., für jeden andern Zweig durch y_1', y_1'', y_1''', y_1'''', ..., die auf der Ordinate, welche, wenn x die Abscisse des vielfachen Punktes bezeichnet, der Abscisse $x + i$ entspricht, genommene Entfernung der beiden Zweige der Curve von einander aber durch Δ; so ist (1.):

$$\Delta = (y' - y_1')\cdot\frac{i}{1} + (y'' - y_1'')\cdot\frac{i^2}{1.2} + (y''' - y_1''')\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + (y'''' - y_1'''')\cdot\frac{i^4}{1..4} + \ldots$$

Da aber zwischen den einzelnen Zweigen eine Berührung des $(n-1)$ten Grades statt findet; so ist (1.):

$$y' = y_1',\ y'' = y_1'',\ y''' = y_1''',\ \ldots\ y^{(n-1)} = y_1^{(n-1)};$$

Digitized by Google

und folglich

$$\Delta = (y^{(n)} - y_1^{(n)}) \cdot \frac{i^n}{1 \ldots n} + (y^{(n+1)} - y_1^{(n+1)}) \cdot \frac{i^{n+1}}{1 \ldots (n+1)} + \ldots$$

Nun ist klar, daß Δ, wie klein man auch i nehmen mag, so viele verschiedene Werthe haben wird, als die Anzahl der in dem vielfachen Punkte zusammenkommenden Zweige Einheiten enthält, weniger einen. Eben so viele verschiedene Werthe wird also, da dies bei jedem Grade der Kleinheit von i gilt, auch $y^{(n)} - y_1^{(n)}$, folglich auch $y_1^{(n)}$, haben. Demnach hat, wenn man nun den Werth $y^{(n)}$ selbst mit zählt, $y^{(n)}$ oder $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ eben so viele verschiedene Werthe, als Zweige der Curve in dem vielfachen Punkte zusammenkommen. Für

$$y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$$

giebt es dagegen in dem vielfachen Punkte nur einen Werth, wie aus dem Obigen erhellet. Nun hat aber, wenn $u = 0$, wie immer, die Gleichung der gegebenen Curve bezeichnet, die nte Differentialgleichung überhaupt die Form:

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = 0,$$

wo alle fehlenden Glieder einen niedrigern Differentialquotienten von y als den nten enthalten, ein Gesetz, welches für $n = 1$, $n = 2$ unmittelbar aus (5.) erhellet, und durch die bekannte Schlußart von dem nten auf den $(n+1)$teu Fall leicht zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Sind also A, B wieder irgend zwei der verschiedenen Werthe von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ in dem vielfachen Punkte; so hat man

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + \ldots + A\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$
$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + \ldots + B\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0,$$

woraus, da, wie wir so eben gesehen haben, alle Differentialquotienten von y unter dem nten in dem vielfachen Punkte einerlei Werth behalten, ganz wie in (5.) geschlossen wird, daß

Digitized by Google

$$\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

Da aber die erste Differentialgleichung überhaupt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$ ist; so hat man in diesem Falle ganz wie in dem ersten:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, u = 0,$$

so daß also in beiden Fällen die vielfachen Punkte völlig auf gleiche Art gefunden werden. Ob die einzelnen Zweige sich schneiden oder berühren, ergiebt sich unmittelbar bei der Bestimmung der Lage der Berührenden der einzelnen Zweige (5.), indem im letztern Falle die Gleichung, durch welche $\frac{\partial y}{\partial x}$ bestimmt wird, bloß so viele einander gleiche, im ersten dagegen so viele verschiedene Wurzeln haben wird, als die Ordnungszahl des vielfachen Punktes Einheiten enthält.

Vielfache Punkte der zweiten Art können in besondern Fällen auch in Spitzen übergehen, über deren Unterscheidung der Art. Rückkehrpunkt nachzusehen ist.

12. Auch ohne Calcul erhellet leicht, daß überhaupt nur erst eine Linie des $(n+1)$ten Grades einen $n$fachen Punkt haben kann. Denn sollte schon eine Linie des $n$ten Grades einen $n$fachen Punkt haben; so denke man sich durch denselben und irgend einen andern Punkt der Curve eine gerade Linie gezogen, welches offenbar immer möglich ist; so würde diese gerade Linie, da in dem $n$fachen Punkte n Zweige der Curve zusammenkommen, letztere offenbar eigentlich in $n+1$ Punkten schneiden, welches bekanntlich nicht möglich ist (Krumme Linie. 27.). Kein Kegelschnitt also kann einen Doppelpunkt haben, sondern nur erst eine Linie des dritten Grades. Aus der allgemeinen Gleichung

$$u = A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy + Fy^2 = 0$$

der Kegelschnitte erhält man:

$$B + 2Dx + Ey + (C + Ex + 2Fy)\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Digitized by Google

Folglich zur Bestimmung der vielfachen Punkte:

$$B + 2Dx + Ey = o,\ C + Ex + 2Fy = o;$$

$$x = -\frac{2BF - CE}{4DF - E^2},\ y = -\frac{2CD - BE}{4DF - E^2}.$$

Diese Werthe genügen aber der Gleichung $u = o$ nicht, welches sogleich erhellet, wenn man für die Coefficienten, um eine weitläufige allgemeine Rechnung zu vermeiden, einfache bestimmte Werthe setzt. Setzt man z. B. alle Coefficienten $= 1$; so ist die Gleichung:

$$u = 1 + x + y + x^2 + xy + y^2 = o,$$

und für x und y erhält man mittelst obiger Formeln die Werthe $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$. Also müßte

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = o$$

seyn, welches ungereimt ist.

13. Auf die in (5. am Ende) erwähnte Schwierigkeit bei den Berührenden in vielfachen Punkten scheint zuerst Rolle gestoßen zu seyn. Er glaubte dabei die neue Rechnung des Unendlichen unzureichend zu finden, und machte seine Methode in dem Journal des Sçavans. Avril. 1702. bekannt. Diesen Aufsatz beantwortete Saurin, und zeigte, daß der Art. 163. der Analyse des infiniment petits (par de l'Hospital) hinreiche, die Berührenden in den schwierigen Fällen zu ziehen. Weiter verfolgte Saurin diesen Gegenstand in drei Abhandlungen in den Mém. de l'Acad. de Paris. 1716. p. 59. 275. 1723. p. 222. unter dem Titel: Rémarques sur un cas singulier du problème des tangentes. Am ausführlichsten ist die Lehre von den vielfachen Punkten behandelt in der Introduction à l'Analyse des lignes courbes par Cramer. Chap. X. XIII. Einiges kommt auch in der Introductio in Analysin infinitorum. T. II. §. 295 — 303. vor. Weder Cramer noch Euler bedienen sich der Differentialrechnung. Ihre Methoden gründen sich ganz auf die Verwandlung der Coordinaten. Eine besondere Schrift über die Anwendung der Differentialrechnung auf diesen Theil der höhern Geometrie ist: G. H. Bortz de rationibus regularum, quas calculus differentialis in constituendis punctis cur-

Digitized by Google

varum multiplicibus et subtangentibus in iis ad haec puncta ducendis offert. Lips. 1769. Ueber die vielfachen und conjugirten (points multiples invisibles) Punkte der Linien der vierten Ordnung s. m. zwei besondere Abhandlungen von Brage-Longne in den Mém. de l'Acad. de Paris. 1730. p. 363. 1731. p. 10. Auch Camus sur les tangentes des points communs à plusieurs branches d'une même courbe. Mém. de Paris. 1747. p. 272. Mehreres findet man auch in den neuern Werken über höhere Analysis, besonders in Lacroix Traité du calc. diff. et int. Ed. 2. T. I. §. 187. sqq. und dessen Traité élém. du calc. diff. et int. Ed. 2. p. 104. Auch s. m. Karsten Mathesis theoretica elem. atque sublimior. Rost. 1760. p. 921. sqq. Größere Ausführlichkeit gestattet hier der Raum nicht.

Vielfaches einer Größe A ist eine Größe, welche entsteht, wenn man zu der Größe A eine oder mehrere andere ihr gleiche hinzudenkt. Denkt man sich n der A gleiche Größen mit einander vereinigt; so erhält man das nfache von A, welches durch nA bezeichnet wird. A selbst heißt die vervielfältigte Größe. Das Vielfache einer Größe ist mit derselben immer von einerlei Art.

Vielfaches eines Verhältnisses, s. Verhältniß (14.).

Vielfaches, kleinstes gemeinschaftliches, s. Theiler, gemeinschaftlicher (9.).

Viereck heißt jede von vier geraden Linien in einer Ebene, oder von vier Bogen auf der Oberfläche einer Kugel eingeschlossene Figur. Die besondern Arten des Vierecks: Parallelogramm und Trapezium s. m. in besondern Artikeln. Ein in oder um einen Kreis beschriebenes Viereck heißt ein ein- oder umgeschriebenes Viereck. Jedes Viereck, um oder in welches sich ein Kreis beschreiben läßt, heißt centrisch nach den Ecken oder nach

Digitized by Google

den Seiten. Ein System von vier geraden Linien, welche sich wie AC, CE, AD, BE (Fig. 133.) schneiden, nennt man ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalen BD, CF, AE sind, indem jedes Viereck im gewöhnlichen Sinne nur zwei Diagonalen hat. Die Berechnung der Seiten und Winkel der Vierecke aus gegebenen Stücken s. m. im Art. Trigonometrie V.

1. Für die Congruenz der Vierecke gelten folgende Bedingungen.

a) Wenn alle vier Seiten und ein Winkel gegenseitig gleich sind. Denn sind B, F (Fig. 134.) die gleichen Winkel; so folgt leicht die Congruenz der Dreiecke ABC, EFG, woraus AC = EG, also auch $\measuredangle$ACD $\cong$ $\measuredangle$EGH, und folglich offenbar die Vierecke congruent.

b) Wenn drei Seiten und die beiden eingeschlossenen Winkel gegenseitig gleich sind. Wird sehr leicht durch das Aufeinanderlegen bewiesen.

c) Wenn drei Seiten und die beiden anliegenden Winkel gleich sind. Sind AB, BC, CD und EF, FG, GH die gleichen Seiten; so fälle man die Perpendikel BK, CL, BP, FM, GN, FQ. Dann erhellet leicht, daß die Dreiecke ABK, EFM und CLD, GNH congruent sind. Also BK = FM, CL = GN, woraus CP = GQ. Folglich $\measuredangle$BCP $\cong$ $\measuredangle$FGQ. Nun schließt man leicht, daß die Winkel der Vierecke bei B, F und C, G gleich, die Vierecke also congruent sind.

d) Wenn zwei zusammenstoßende Seiten und drei (also alle vier) Winkel einander gleich sind. Sind AB, BC und FE, FG die gleichen Seiten, so ziehe man AC, EG, und beweise die Congruenz der Dreiecke ABC, FEG, und ACD, EGH, welches keine Schwierigkeit hat.

e) Wenn zwei gegenüberliegende Seiten, und drei (also alle vier) Winkel gleich sind. Sind BC, FG, und AD, EH die gleichen Seiten; so verlängere man die andern Seiten, bis sie sich in R, S schneiden; so ist es leicht, die Congruenz der Dreiecke BRC, FSG und ARD, ESH zu beweisen, woraus sogleich die Congruenz der Vierecke

Digitized by Google

folgt. Sind aber die Seiten AB, CD und EF, GH parallel; so kann man offenbar den Seiten BC, FG unendlich viele Lagen geben, so daß sie sich immer gleich bleiben, und die Vierecke doch nicht congruent sind.

f) Wenn drei Seiten, ein eingeschlossener und ein auf diesen folgender anliegender Winkel gegenseitig gleich sind, und wenn zugleich die Diagonale durch den anliegenden Winkel kleiner ist, als die Seite zwischen den beiden unbestimmten Winkeln. Wird sehr leicht durch die Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die den gegebenen eingeschlossenen Winkeln gegenüberstehenden Diagonalen zieht.

g) Wenn drei Seiten, ein anliegender und der diesem gegenüberstehende eingeschlossene Winkel gleich sind, und zugleich die Diagonale durch die beiden unbestimmten Winkel größer ist, als die gegebene Seite an dem anliegenden Winkel. Wird eben so leicht aus der Congruenz der Dreiecke bewiesen, wenn man die genannte Diagonale zieht.

Durch jede der in diesen Sätzen angegebenen fünf Stücke wird also ein Viereck bestimmt. Sonst giebt es immer zwei Vierecke, wovon man sich in jedem Falle leicht überzeugen wird.

2. Die meisten merkwürdigen Eigenschaften haben die centrischen Vierecke. Für alle Vierecke gilt der von Euler gefundene interessante Satz, daß die Summe der Quadrate der vier Seiten immer der Summe der Quadrate der beiden Diagonalen nebst dem vierfachen Quadrate der die Mittelpunkte der Diagonalen verbindenden Linie gleich ist. Ist nämlich im Dreieck ABC (Fig. 135.) $AD = DC$, und BD gezogen; so falle das Perpendikel BE auf AC. Dann ist (Dreieck. 19. 20.) $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2AD \cdot DE$, $BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2CD \cdot DE$, woraus, wegen $AD = CD$, wenn man addirt, sich leicht ergiebt: $AB^2 + BC^2 = 2AD^2 + 2BD^2$. Sey nun im Viereck ABCD (Fig. 136.) $DE = BE$, $AF = CF$; so ziehe man AE, CE. Dann ist $AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2DE^2$, $BC^2 + CD^2 =$

Digitized by Google

$2CE^2 + 2DE^2$, $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = 2(AE^2 + CE^2) + 4DE^2 = 4AF^2 + 4FE^2 + 4DE^2 = (2AF)^2 + (2DE)^2 + 4FE^2 = AC^2 + DB^2 + 4FE^2$. Im Parallelogramm ist $FE = o$. Also $AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2$. M. s. über diesen Satz auch eine Abhandlung von G. W. Krafft in den Nov. Comm. Petrop. I.

3. Verbindet man die Mittelpunkte der Seiten eines Vierecks ABCD (Fig. 137.) durch gerade Linien; so ist leicht zu zeigen, daß die entstehende Figur EFGH ein seinem Flächeninhalte nach halb so großes Parallelogramm als das gegebene Viereck ist.

4. Die Summe der Quadrate der Diagonalen eines jeden Vierecks ist der doppelten Summe der Quadrate der, die Mittelpunkte der Gegenseiten verbindenden, geraden Linien EF, GH gleich. Da EFGH ein Parallelogramm ist (3.); so ist $EF^2 + GH^2 = EG^2 + GF^2 + FH^2 + EH^2$ (2.) $= 2EG^2 + 2GF^2$. Aber offenbar $EG = \frac{1}{2}BD$, $GF = \frac{1}{2}AC$, $2EG^2 = \frac{1}{2}BD^2$, $2GF^2 = \frac{1}{2}AC^2$. Also $EF^2 + GH^2 = \frac{1}{2}AC^2 + \frac{1}{2}BD^2$, $AC^2 + BD^2 = 2\{EF^2 + GH^2\}$.

5. Ist m die Linie, welche die Mitten der Diagonalen verbindet; so ist $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4m^2$ (2.) $= 2EF^2 + 2GH^2 + 4m^2$ (4.). Addirt man auf beiden Seiten $AC^2 + BD^2 = 2EF^2 + 2GH^2$ (4.); so erhält man $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + AC^2 + BD^2 = 4\{EF^2 + GH^2 + m^2\}$.

6. Sind K, L die Mittelpunkte der Diagonalen; so erhellet sehr leicht, daß EK, LF beide mit AB, EL und KF beide mit CD parallel sind, und folglich EKFL ein Parallelogramm ist. Also ist $EF^2 + KL^2 = EK^2 + FK^2 + LF^2 + EL^2$ (2.) $= 2KF^2 + 2EK^2 = \frac{1}{2}CD^2 + \frac{1}{2}AB^2$. Also $AB^2 + CD^2 = 2EF^2 + 2KL^2 = 2\{EF^2 + m^2\}$, so daß also in jedem Viereck die Summe der Quadrate zweier Gegenseiten der doppelten Summe der Quadrate der die Mittelpunkte der beiden Diagonalen

Digitized by Google

und der beiden andern Gegenseiten verbindenden geraden Linien gleich ist.

7. Setzt man $BD = d$, $AC = d'$ (Fig. 138.) und fällt die Perpendikel AE, CF; so ist $AE = AG.\sin\alpha$, $CF = CG.\sin\alpha$, $\Delta ABD = \frac{1}{2}AG.d\sin\alpha$, $\Delta BCD = \frac{1}{2}CG.d'\sin\alpha$, woraus durch Addition $ABCD = \frac{1}{2}dd'\sin\alpha$. Folglich verhalten sich Vierecke, deren Diagonalen gegen einander gleich geneigt sind, wie die Producte ihrer Diagonalen, oder, wenn sie in Kreise beschrieben sind, wie die Summen der Producte ihrer Gegenseiten (Kreis. 44.).

Da $\sin\alpha$ für $\alpha = 90^0$ ein Maximum wird; so ist unter allen Vierecken mit gleichen Diagonalen das am größten, in welchem die Diagonalen einen rechten Winkel einschließen. Sonst sind alle Vierecke mit gleichen und gleich geneigten Diagonalen einander gleich.

Will man ein Parallelogramm verzeichnen, das einem Vierecke gleich ist, und gleiche Diagonalen mit demselben hat; so lasse man sich die beiden Diagonalen unter demselben Winkel wie im Viereck so schneiden, daß sie sich gegenseitig halbiren.

Dieser Satz scheint von Robervall herzurühren.

8. Ist der Winkel A (Fig. 139.) ein rechter; so erhellet leicht, daß für $DB = \sqrt{a^2 + d^2} = n$, der Inhalt des Vierecks $=$

$$\tfrac{1}{4}ad + \tfrac{1}{4}\sqrt{(b+c+n)(c+n-b)(b+n-c)(b+c-n)}$$

ist (Dreieck. 34.). Ist A kein rechter Winkel; so muß man in dieser Formel $\frac{1}{2}ad\sin A$ statt $\frac{1}{2}ad$, und

$$n = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad\cos A},$$

wobei also noch A gegeben seyn muß, setzen.

9. Die Summe der Gegenwinkel jedes eingeschriebenen ebenen Vierecks beträgt zwei Rechte, und um ein ebenes Viereck, in welchem die Summen der Gegenwinkel zwei Rechte betragen, läßt sich immer ein Kreis beschreiben (Kreis. 22. 23.). Zum Beweise eines analogen sehr merkwürdigen Satzes über das sphärische einge-

Digitized by Google

schriebene Viereck sind folgende vorläufige Betrachtungen nöthig.

10. Im eingeschriebenen ebenen Viereck ABCD (Fig. 140.) ist $A + C = 180^0$, $\sin A = \sin C$, $\cos A = -\cos C$, $\Delta = \frac{1}{2} ad \sin A$, $\Delta' = \frac{1}{2} bc \sin A$. Also, wenn wir den Inhalt des Vierecks durch V bezeichnen, $V = \frac{1}{2}(ad + bc) \sin A$. Aber (Trigonometrie. 7.)

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - \delta^2}{2ad} = -\cos C = -\frac{b^2 + c^2 - \delta^2}{2bc},$$

woraus nach einigen leichten Reductionen:

$$\delta^2 = \frac{bc(a^2 + d^2) + ad(b^2 + c^2)}{ad + bc}$$

$$= \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc};$$

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2 + d^2}{2(ad + bc)};$$

$$2 \sin \tfrac{1}{2} A^2 = 1 - \cos A = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + b + c - d)(b + c + d - a)}{2(ad + bc)},$$

$$2 \cos \tfrac{1}{2} A^2 = 1 + \cos A = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)}$$

$$= \frac{(a + c + d - b)(a + b + d - c)}{2(ad + bc)};$$

$$\sin A = 2 \sin \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} A =$$

$$= \frac{\sqrt{(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d)}}{2(ad + bc)}.$$

Setzt man nun $a + b + c + d = 2s$; so erhält man mittelst des Obigen leicht

$$V = \sqrt{(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)},$$

woraus sich sogleich die Formel für den Inhalt des Dreiecks aus seinen drei Seiten (Trigonometrie. 19.) ergiebt, wenn man $d = o$ setzt.

Der Radius r das um das Viereck beschriebenen Kreises ist zugleich der Radius des um das Dreieck ABD beschriebenen Kreises. Also $r = \frac{\delta}{2 \sin A}$ (Trigonometrie. 21.). Folglich $r = \frac{\delta(ad + bc)}{4V}$

$$= \frac{1}{4V} \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}$$

Digitized by Google

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

$$V = \frac{1}{4r}\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\,.$$

Entwickelt man das Product

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\,,$$

und setzt

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \Sigma a^2\,,$$
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{1}{d^2} = \Sigma\frac{1}{a^2}\,;$$

so erhält man leicht:

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\frac{abcd\,\Sigma a^2 + (abcd)^2 . \Sigma\frac{1}{a^2}}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}\,.$$

Ist das Viereck zugleich centrisch nach den Seiten, so daß sich nämlich auch ein Kreis in dasselbe beschreiben läßt; so wird leicht erhellen, daß die Summen der Gegenseiten gleich sind, d. h. $a + c = b + d$ ist. Dies giebt

$$V = \sqrt{abcd}\,,$$

$$r = \tfrac{1}{4}\sqrt{\Sigma a^2 + abcd\,\Sigma\tfrac{1}{a^2}}\,.$$

11. Sey nun ABCD (Fig. 140.) ein sphärisches, in einen kleinern Kreis beschriebenes, Viereck; so sind, den Halbmesser der Kugel $= 1$ gesetzt, die Seiten und eine Diagonale des entsprechenden Sehnenvierecks $= 2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$, $2\sin\frac{1}{2}d$, $2\sin\frac{1}{2}\delta$. Also für

$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b + \sin\tfrac{1}{2}c\sin\tfrac{1}{2}d = P\,,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}c + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}d = Q\,,$$
$$\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c = R\,,$$

nach (9.)

$$\sin\tfrac{1}{2}\delta^2 = \frac{PQ}{R}\,.$$

Aber (Trigonometrie. 58.)

$$\cos A = \frac{\cos\delta - \cos a\cos d}{\sin a\sin d}\,.$$

Folglich nach einigen leichten Reductionen, da $2\sin\frac{1}{2}A^2 = 1 - \cos A$, $2\cos\frac{1}{2}A^2 = 1 + \cos A$ ist:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}\delta^2 - \sin\frac{1}{2}(a-d)^2}{\sin a\sin d}\,,$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+d)^2 - \sin\frac{1}{2}\delta^2}{\sin a\sin d}\,.$$

Digitized by Google

Nach dem Vorigen wird der Zähler von $\sin\frac{1}{2}A^2$ also

$$= \frac{PQ}{R} - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}d\,.\,X + \sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}c\,.\,Y}{R}$$

für

$$X = \sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2,$$
$$Y = \sin\tfrac{1}{2}a^2 + \sin\tfrac{1}{2}d^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2.$$

Entwickelt man nun $\sin\frac{1}{2}(a-d)^2$; so erhält man leicht

$$Y = \sin\tfrac{1}{2}a^2\,\sin\tfrac{1}{2}d^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2\,\sin\tfrac{1}{2}d^2$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}d\,\cos\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}d$$
$$= 2\sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}d\,\cos\tfrac{1}{2}(a-d).$$

Setzt man aber $\sin a\,\sin d$

$$= 4\sin\tfrac{1}{2}a\,\sin\tfrac{1}{2}d\,\cos\tfrac{1}{2}a\,\cos\tfrac{1}{2}d;$$

so erhält man $\sin\frac{1}{2}A^2$

$$= \frac{X + 2\sin\frac{1}{2}b\,\sin\frac{1}{2}c\,\cos\frac{1}{2}(a-d)}{4R\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}d}.$$

Der Zähler dieses Bruchs ist =

$$\sin\tfrac{1}{2}b^2 + \sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}(a-d)^2$$
$$+ 2\sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}c\,\cos\tfrac{1}{2}(a-d)$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}(a-d)^2 + 2\sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}c\,\cos\tfrac{1}{2}(a-d)$$
$$- (1 - \sin\tfrac{1}{2}b^2 - \sin\tfrac{1}{2}c^2).$$

Aber $1 - \sin\frac{1}{2}b^2 - \sin\frac{1}{2}c^2$

$$= 1 - \sin\tfrac{1}{2}b^2 - \sin\tfrac{1}{2}c^2$$
$$+ \sin\tfrac{1}{2}b^2\,\sin\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2\,\sin\tfrac{1}{2}c^2$$
$$= (1 - \sin\tfrac{1}{2}b^2)(1 - \sin\tfrac{1}{2}c^2)$$
$$- \sin\tfrac{1}{2}b^2\,\sin\tfrac{1}{2}c^2$$
$$= \cos\tfrac{1}{2}b^2\,\cos\tfrac{1}{2}c^2 - \sin\tfrac{1}{2}b^2\,\sin\tfrac{1}{2}c^2.$$

Folglich obiger Zähler

$$= \{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \sin\tfrac{1}{2}b\,\sin\tfrac{1}{2}c\}^2$$
$$- \cos\tfrac{1}{2}b^2\,\cos\tfrac{1}{2}c^2$$
$$= \{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\}$$
$$.\{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)\}$$
$$= 4\cos\tfrac{1}{2}(a+b-c-d)\,\cos\tfrac{1}{2}(a-b+c-d)$$
$$.\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c-d)\,\sin\tfrac{1}{2}(-a+b+c+d).$$

Folglich, wenn man dieses Product durch 4S bezeichnet:

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{S}{R\cos\frac{1}{2}a\,\cos\frac{1}{2}d}.$$

Durch eine ganz ähnliche Rechnung erhält man, wenn man das Product

Digitized by Google

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(-a+b+c-d)\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)$$

$= T$ setzt:

$$\cos\tfrac{1}{2}A^2 = \frac{T}{R\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}.$$

Setzt man nun respective c, d, a, b für a, b, c, d, und bezeichnet die Producte

$$\cos\tfrac{1}{4}(-a-b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)$$

und

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b-c+d)\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)$$

durch S', T'; so wird

$$\sin\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{S'}{R\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},\quad \cos\tfrac{1}{2}C^2 = \frac{T'}{R\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Bezeichnet man nun ferner die Producte

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cdot\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)\cos\tfrac{1}{4}(-a+b+c-d)$$

und

$$\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\cdot\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d)$$

durch Σ, Σ'; die Summe

$$\sin\tfrac{1}{4}(-a+b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c-d) + \sin\tfrac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c+d)$$

durch Δ, so wie die Differenz

$$\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c+d)\cos\tfrac{1}{4}(-a+b+c-d) - \cos\tfrac{1}{4}(a+b-c-d)\cos\tfrac{1}{4}(a-b+c-d)$$

durch Δ', und das Product

$$\cos\tfrac{1}{4}a\cos\tfrac{1}{4}b\cos\tfrac{1}{4}c\cos\tfrac{1}{4}d$$

durch L; so erhält man nach sehr bekannten goniometrischen Formeln:

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta}{R}\sqrt{\frac{\Sigma}{L}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \frac{\Delta'}{R}\sqrt{\frac{\Sigma}{L}}.$$

Es ist aber (Goniometrie. 27.):

$$\Delta = \tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(a-d) - \cos\tfrac{1}{2}(b+c)| + \tfrac{1}{2}|\cos\tfrac{1}{2}(b-c) - \cos\tfrac{1}{2}(a+d)| = \sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}d + \sin\tfrac{1}{2}b\sin\tfrac{1}{2}c = R,$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(b+c) + \cos\tfrac{1}{2}(a+d)\} \\ & - \tfrac{1}{2}\{\cos\tfrac{1}{2}(a-d) + \cos\tfrac{1}{2}(b-c)\} \\ = & -\sin\tfrac{1}{2}a \sin\tfrac{1}{2}d - \sin\tfrac{1}{2}b \sin\tfrac{1}{2}c = -R. \end{aligned}$$

Folglich

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\ \cos\tfrac{1}{2}(A+C) = -\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}}.$$

Σ, Σ', L sind aber offenbar symmetrische Functionen von a, b, c, d, wobei zu bemerken, daß der Cosinus sich nicht ändert, wenn man den Winkel negativ nimmt. Daher ist auch

$$\sin\tfrac{1}{2}(B+D) = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}},\ \cos\tfrac{1}{2}(B+D) = -\sqrt{\frac{\Sigma'}{L}}.$$

Also hat man

$$\sin\tfrac{1}{2}(A+C) = \sin\tfrac{1}{2}(B+D),$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A+C) = \cos\tfrac{1}{2}(B+D).$$

Demnach auch

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+C) = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(B+D),$$

woraus, da offenbar kein Winkel des Vierecks $> 180^0$, also weder $A + C$, noch $B + D > 360^0$, oder weder $\frac{1}{2}(A + C)$, noch $\frac{1}{2}(B + D) > 180^0$ ist, sogleich folgt, daß $A + C = B + D$. Also sind in jedem sphärischen, in einen kleinern Kugelkreis beschriebenen, Vierecke die Summen der Gegenwinkel einander gleich. M. s. eine Abhandlung von Lexell, welchem der Satz anzugehören scheint, in den Act. Petrop. 1782., und von Guénau d'Aumont in den Annales de Math. T. XII. 1822. über diesen Gegenstand. Letzterer erwähnt Lexells mit keinem Worte.

12. Setzt man $a + b + c + d = 2s$ und $s - d = s'$; so erhält man nach dem Vorhergehenden für $\sin\frac{1}{2}A$, $\cos\frac{1}{2}A$, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}A$ leicht folgende Ausdrücke:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)}{(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c)\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}d}},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(s'-b)\cos\frac{1}{2}(s'-c)\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-d)}{\cos\frac{1}{2}(s'-a)\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}},$$

mittelst welcher sich also jeder Winkel des eingeschriebenen sphärischen Vierecks durch die vier Seiten finden läßt.

Digitized by Google

13. Nimmt man den sphärischen Octanten als Flächen-, den rechten Winkel als Winkel-Einheit; so folgt, wenn man die Fläche des Vierecks durch F bezeichnet, aus Trigonometrie (91.) leicht, daß

$$F = A + B + C + D - 4,$$

wobei man sich nur das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt denken muß. Da aber (11.) $A + C = B + D$ ist; so ist $A + B + C + D = 2(A + C)$, also

$$F = 2(A + C) - 4, \quad \tfrac{1}{4}F = \tfrac{1}{2}(A + C) - 1.$$

Folglich $\sin \frac{1}{4}F = -\cos \frac{1}{2}(A + C)$, $\cos \frac{1}{4}F = \sin \frac{1}{2}(A + C)$, woraus

$$\sin \tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c) \sin \frac{1}{2}(s-d)}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}}$$

$$\cos \tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{L}} =$$

$$\sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s'-a) \cos \frac{1}{2}(s'-b) \cos \frac{1}{2}(s'-c)}{\cos \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}b \cos \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}d}}$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{4}F = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Sigma}} =$$

$$\sqrt{\frac{\sin \frac{1}{2}(s-a) \sin \frac{1}{2}(s-b) \sin \frac{1}{2}(s-c) \sin \frac{1}{2}(s-d)}{\cos \frac{1}{2}s \cos \frac{1}{2}(s'-a) \cos \frac{1}{2}(s'-b) \cos \frac{1}{2}(s'-c)}}.$$

Für $d = o$ wird $s' = s$, und die Formel geht offenbar in die Trigonometrie (99.) gefundene Formel für den Inhalt des sphärischen Dreiecks über, so daß also diese, von L. Huilier gefundene, Formel sich auch schon aus der Abhandlung-Lexells (11.) ergiebt, und also eigentlich Letzterem angehört. M. vergl. auch Buzengeiger in der Zeitschrift für Astronomie. Th. VI. 1818. S. 327.

14. Das eingeschriebene ebene Viereck hat außer der Gleichheit der Summen der Gegenwinkel noch mehrere andere merkwürdige Eigenschaften, worüber wir noch Einiges mittheilen.

Wenn man die äußern oder innern Winkel irgend eines Vierecks halbirt; so schließen die halbirenden Linien ein Viereck ein, um welches sich ein Kreis beschreiben läßt. Da die Summe der äußern Winkel 4R beträgt (Vieleck.

Digitized by Google

4.); so ist (Fig. 141.) $x + y + x' + y' = 2R$. Aber $x + y + x' + y' + B' + D' = 4R$. Also $B' + D' = 2R$, und folglich auch $A' + C' = 2R$. Die Summe der innern Winkel eines Vierecks beträgt ebenfalls 4R. Also ist (Fig. 142.) $x'' + y'' + x''' + y''' = 2R$. Aber $x'' + y'' + x''' + y''' + A'' + C'' = 4R$. Also $A'' + C'' = 2R = B'' + D''$. Die Seiten der Vierecke A'B'C'D' und A''B''C''D'' (Fig. 142.) stehen auf einander senkrecht. Denn es ist offenbar $x' + y''$ (Fig. 142.) $= \frac{1}{2}.2R = R$. Auch ist augenblicklich klar, daß jede Spitze der Vierecke A'B'C'D', A''B''C''D'' von je drei Seiten des Vierecks ABCD gleich weit entfernt ist.

15. Daß in einem nach den Seiten centrischen Vierecke die Summen der Gegenseiten gleich sind, fällt sogleich in die Augen. Umgekehrt kann man aber auch behaupten, daß sich in jedes Viereck ABCD (Fig. 143.), in welchem die Summen der Gegenseiten gleich sind, ein Kreis beschreiben läßt. Halbirt man die Winkel bei C, D; so ist klar, daß die von dem Durchschnittspunkte H der halbirenden Linien auf die Seiten gefällten Perpendikel HE, HF, HG einander gleich sind, und daß $CE = CF$, $GD = FD$, $CE + GD = CD$. Also nach der Voraussetzung auch $BC + AD - CE - GD = BE + AG = AB + CD - CD = AB$. Sey nun HK senkrecht auf AB, und $HK \gtrless HE$, $HK \gtrless HG$, wobei zu bemerken, daß $HE = HG$. Also auch $HK^2 \gtrless HE^2$, $BH^2 - HK^2 \lesseqgtr BH^2 - HE^2$, $BK^2 \lesseqgtr BE^2$, $BK \lesseqgtr BE$, und eben so $AK \lesseqgtr AG$. Also $BK + AK \lesseqgtr BE + AG$, $AB \lesseqgtr BE + AG$, da doch $AB = BE + AG$. Also muß $HK = HE = HG = HF$ seyn.

16. Noch einen der merkwürdigsten Sätze vom Viereck wollen wir nach einer Methode beweisen, welche Poncelet mit ausgezeichnetem Erfolg in seinem trefflichen Werke: Traité des propriétés projectives des figures. Paris. 1822. auf viele geometrische Untersuchungen angewandt hat, um zugleich bei dieser Gelegenheit von dieser Methode einen Begriff zu geben.

Digitized by Google

17. Für eine gewisse Ebene als Projectionsebene und einen Punkt als Centrum der Projection versteht man unter der Projection einer Figur die von den Durchschnittspunkten der von dem Centrum der Projection nach allen Punkten in dem Umfange der gegebenen Figur gezogenen geraden Linien mit der Projectionsebene auf derselben gebildete Figur.

18. Wenn zwei oder mehrere gerade Linien AB, A′B′, u. s. f. sich in einem Punkte P schneiden; so läßt sich immer eine Ebene und ein Centrum der Projection finden, für welche die Projectionen aller gegebenen Linien einander parallel sind. Nimmt man nämlich irgend einen Punkt P, welcher in keiner der Ebenen liegt, in welchen je zwei der gegebenen Linien liegen, zieht PP, und nimmt die Projectionsebene mit dieser Linie parallel; so sind die Durchschnitte der Ebenen PABP, PA′B′P, u. s. f. mit der Projectionsebene, d. i. die Projectionen der gegebenen Linien, offenbar alle mit PP, folglich unter einander parallel.

19. Sind umgekehrt in irgend einem Falle die Projectionen einiger geraden Linien unter einander parallel; so müssen diese geraden Linien sich in einem Punkte schneiden, oder einander parallel seyn, d. i. in unendlicher Entfernung zusammenlaufen. Die gegebenen Linien seyen AB, A′B′, A″B″, A‴B‴, u. s. f., und ab, a′b′, a″b″, a‴b‴, u. s. f. ihre Projectionen. Das Centrum der Projection sey P. Irgend zwei der gegebenen Linien, z. B. AB und A′B′, mögen sich in K schneiden; so liegen ab, a′b′ in den Ebenen PABK, PA′B′K, deren gemeinschaftlicher Durchschnitt PK ist, und ab, a′b′ liegen selbst in einer Ebene, der Projectionsebene. Schnitte nun diese Ebene die PK in einem gewissen Punkte; so müßten offenbar auch ab, a′b′ in diesem Punkte zusammenlaufen, da sie doch parallel seyn sollen. Also muß die Ebene der Linien ab, a′b′, und folglich diese Linien selbst, mit PK parallel seyn. K kann hierbei auch unendlich weit entfernt gedacht werden. Wäre nun K′ der Durchschnitt von A′B′, A″B″; so sind wie vorher a′b′, a″b″ der Linie

Digitized by Google

PK' parallel. Aber a'b' kann nur den beiden Linien PK, PK' parallel seyn, wenn entweder K und K' zusammenfallen, oder beide unendlich weit entfernt sind, d. i. wenn AB, A'B', A''B'' sich in einem Punkte schneiden, oder unter einander parallel sind. Wie man weiter gehen kann, erhellet leicht.

20. Sind die Projectionen der Linien AB, A'B' und CD, C'D' (Fig. 144.) einander parallel; so zeigt der vorhergehende Beweis, daß die Projectionsebene den Linien CD und KL, also der Ebene PKL parallel ist. Nimmt man nun in KL noch irgend einen Punkt M; so ist die Projectionsebene also auch der Linie PM parallel, und folglich sind auch die Projectionen jeder zwei in M, d. i. in irgend einem Punkte von KL, sich schneidenden geraden Linien einander parallel (18.).

21. Umgekehrt folgt hieraus, daß, wenn die Projectionen der Linien AB, A'B'; CD, C'D'; EF, E'F' einander parallel sind, die Punkte K, L, M in einer geraden Linie liegen. Schneide nämlich KL die Ebene EFE' in irgend einem Punkte M'. In dieser Ebene ziehe man ME, M'E', und willkührlich im Raume die Linie M'E''; so sind die Projectionen f'e', f''e'' einander parallel (20.). Die Projectionen von FE und F''E'' fallen aber offenbar zusammen. Also sind auch fe, f''e'' einander parallel, so wie nach der Voraussetzung auch fe, f'e'. Folglich sind fe, f'e', f''e'' einander parallel, und FE, F'E', F''E'' schneiden sich demnach in einem Punkte (19.), d. i. M und M' müssen zusammenfallen.

22. Sind demnach die Projectionen der Linien AB, A'B'; AB, A''B''; A''B'', A'''B'''; u. s. f. einander parallel; so müssen je drei ihrer Durchschnittspunkte, also alle Durchschnittspunkte, in einer geraden Linie liegen.

23. Ist nun irgend ein Viereck ABCD (Fig. 145.) [illegible] E, F schneiden; so kann [illegible] bene gefunden werden, auf [illegible] iereck ein Parallelogramm [illegible] rojection P nehme man will- [illegible] sebene parallel mit PEF; so [illegible]

Digitized by Google

sind die Projectionen ab, cd und ac, bd, wenn wir die Projectionen immer durch die entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen, einander parallel (18.), also abcd ein Parallelogramm.

24. Wenn die in B willkührlich getheilte Linie AC (Fig. 146.) gegeben ist; so läßt sich immer ein Punkt P finden, für welchen die Winkel PAC, BPC einander gleich sind. Man errichte (Fig. 147.) auf AC durch A das Perpendikel AD, halbire BC in E, errichte durch E auf AC ein Perpendikel, und schneide dasselbe aus B mit dem Radius AE in F, welches offenbar immer möglich ist. Beschreibt man nun aus F mit AE als Radius einen Kreis; so wird dieser AD in G berühren, und durch B, C gehen; auch wird der über BC liegende Abschnitt immer der größere, und folglich der in ihm enthaltene Winkel x ein spitzer seyn. Trägt man diesen Winkel an AC an; so muß AP den Kreis immer in P schneiden, da $x < 90^\circ$ ist, und es ist $x = PAC = BPC$.

25. Sey nun ein in einen Kreis beschriebenes Viereck gegeben; so läßt sich immer eine Ebene finden, auf welcher die Projection der Figur ein Kreis und ein eingeschriebenes Rechteck ist. Von O (Fig. 148.) fälle man auf FE das Perpendikel M'MN, und bestimme P so, daß $PM'N = NPM$ ist (24.). Denkt man sich nun die Ebene des Dreiecks PM'M auf der Ebene des gegebenen Kreises über MM' senkrecht, nimmt P als Mittelpunkt der Projection an, beschreibt mit P als Spitze und dem gegebenen Kreise als Grundfläche einen Kegel, und schneidet denselben durch eine mit PFE parallele Ebene; so ist das Verlangte geschehen. Da nämlich, wenn mm' der Durchschnitt der Projectionsebene mit der Ebene des Dreiecks PM'M ist, $x = y = z$ ist; so ist der Kegelschnitt ein Wechselschnitt. Also ein Kreis (Kegel. 8.). Die Projection des Vierecks ist ein in diesen Kreis beschriebenes Parallelogramm (23.). Folglich ein Rechteck.

26. Sehr leicht erhellet nun, daß, wenn abcd (Fig. 149.) ein Rechteck ist, das umschriebene Viereck a'b'c'd' ein Parallelogramm ist, und die Diagonalen beider Pa-

Digitized by Google

PK′ parallel. Aber a′b′ kann nur den beiden Linien PK, PK′ parallel seyn, wenn entweder K und K′ zusammenfallen, oder beide unendlich weit entfernt sind, d. i. wenn AB, A′B′, A″B″ sich in einem Punkte schneiden, oder unter einander parallel sind. Wie man weiter gehen kann, erhellet leicht.

20. Sind die Projectionen der Linien AB, A′B′ und CD, C′D′ (Fig. 144.) einander parallel; so zeigt der vorhergehende Beweis, daß die Projectionsebene den Linien PK und PL, also der Ebene PKL parallel ist. Nimmt man nun in KL noch irgend einen Punkt M; so ist die Projectionsebene also auch der Linie PM parallel, und folglich sind auch die Projectionen jeder zwei in M, d. i. in irgend einem Punkte von KL, sich schneidenden geraden Linien einander parallel (18.).

21. Umgekehrt folgt hieraus, daß, wenn die Projectionen der Linien AB, A′B′; CD, C′D′; EF, E′F′ einander parallel sind, die Punkte K, L, M in einer geraden Linie liegen. Schneide nämlich KL die Ebene FEP in irgend einem Punkte M′. In dieser Ebene ziehe man MM′E″, und willkührlich im Raume die Linie M′E‴; so sind die Projectionen f″e″, f‴e‴ einander parallel (20.). Die Projectionen von FE und F″E″ fallen aber offenbar zusammen. Also sind auch fe, f‴e‴ einander parallel, so wie nach der Voraussetzung auch fe, f′e′. Folglich sind fe, f′e′, f‴e‴ einander parallel, und FE, F′E′, F‴E‴ schneiden sich demnach in einem Punkte (19.), d. i. M und M′ müssen zusammenfallen.

22. Sind demnach die Projectionen der Linien AB, AB; A′B′, A′B′; A″B″, A″B″; u. s. f. einander parallel; so müssen je drei ihrer Durchschnittspunkte, also alle Durchschnittspunkte, in einer geraden Linie liegen.

23. Hat man nun irgend ein Viereck ABCD (Fig. 145.), dessen Seiten sich in E, F schneiden; so kann leicht ein Centrum und eine Ebene gefunden werden, auf welcher die Projection des Vierecks ein Parallelogramm ist. Den Mittelpunkt der Projection P nehme man willkührlich, und die Projectionsebene parallel mit PEF; so

Digitized by Google

sind die Projectionen ab, cd und ac, bd, wenn wir die Projectionen immer durch die entsprechenden kleinen Buchstaben bezeichnen, einander parallel (18.), also abcd ein Parallelogramm.

24. Wenn die in B willkührlich getheilte Linie AC (Fig. 146.) gegeben ist; so läßt sich immer ein Punkt P finden, für welchen die Winkel PAC, BPC einander gleich sind. Man errichte (Fig. 147.) auf AC durch A das Perpendikel AD, halbire BC in E, errichte durch E auf AC ein Perpendikel, und schneide dasselbe aus B mit dem Radius AE in F, welches offenbar immer möglich ist. Beschreibt man nun aus F mit AE als Radius einen Kreis; so wird dieser AD in G berühren, und durch B, C gehen; auch wird der über BC liegende Abschnitt immer der größere, und folglich der in ihm enthaltene Winkel x ein spitzer seyn. Trägt man diesen Winkel an AC an; so muß AP den Kreis immer in P schneiden, da $x < 90^\circ$ ist, und es ist $x = PAC = BPC$.

25. Sey nun ein in einen Kreis beschriebenes Viereck gegeben; so läßt sich immer eine Ebene finden, auf welcher die Projection der Figur ein Kreis und ein eingeschriebenes Rechteck ist. Von O (Fig. 148.) fälle man auf FE das Perpendikel M'MN, und bestimme P so, daß $PM'N = NPM$ ist (24.). Denkt man sich nun die Ebene des Dreiecks PM'M auf der Ebene des gegebenen Kreises über MM' senkrecht, nimmt P als Mittelpunkt der Projection an, beschreibt mit P als Spitze und dem gegebenen Kreise als Grundfläche einen Kegel, und schneidet denselben durch eine mit PFE parallele Ebene; so ist das Verlangte geschehen. Da nämlich, wenn mm' der Durchschnitt der Projectionsebene mit der Ebene des Dreiecks PM'M ist, $x = y = z$ ist; so ist der Kegelschnitt ein Wechselschnitt. Also ein Kreis (Kegel. 8.). Die Projection des Vierecks ist ein in diesen Kreis beschriebenes Parallelogramm (23.). Folglich ein Rechteck.

26. Sehr leicht erhellet nun, daß, wenn abcd (Fig. 149.) ein Rechteck ist, das umschriebene Viereck a'b'c'd' ein Parallelogramm ist, und die Diagonalen beider Pa-

Digitized by Google

rallelogramme sich im Mittelpunkte des Kreises durchschneiden. Denn es ist $x = x'$, $y = y'$, $p = p'$, $q = q'$ (Kreis. 30.). Aber, wie leicht aus der Congruenz der Dreiecke und der Natur des Rechtecks folgt, $x' = y' = p' = q'$. Also $x = y = p = q$. Folglich sind b'cd, d'ab zwei congruente und gleichschenklige Dreiecke. Also $ad' = bd' = cb' = db'$, so wie auf ähnliche Art $aa' = bc' = cc' = da'$. Folglich $a'b' = c'd'$, $b'c' = a'd'$, und demnach a'b'c'd' ein Parallelogramm. Ist o der Durchschnittspunkt der Diagonalen des Rechtecks abcd; so erhellet leicht, daß $oa = ob = oc = od$, also o der Mittelpunkt des Kreises ist. Zieht man b'o, d'o; so sind, wegen $b'd = b'c$, $od = oc$ und $ad' = bd'$, $oa = ob$, die Linien b'o, d'o auf cd, ab senkrecht, also beide mit bc parallel, und fallen folglich in eine gerade Linie zusammen. Eben so a'o und c'o.

27. Sey nun ABCD (Fig. 150.) ein eingeschriebenes, und A'B'C'D' das entsprechende umgeschriebene Viereck. Man denke sich einen Kegel, dessen Spitze P ist, und eine Projectionsebene von der Beschaffenheit, daß die Projection des gegebenen Kreises ein Kreis, die Projection von ABCD ein Rechteck abcd (Fig. 149.) (25.), also die Projection von A'B'C'D' ein Parallelogramm a'b'c'd' ist. Da ac, bd, a'c', b'd sich in einem Punkte schneiden (26.); so schneiden sich die Ebenen PAC, PBD, PA'C', PB'D', welche alle die Punkte o, P mit einander gemein haben, in einer geraden Linie Po, folglich die Diagonalen AC, BD, A'C', B'D' offenbar in einem Punkte O. Die vier Diagonalen eines eingeschriebenen Vierecks, und eines um den Kreis beschriebenen, dessen Berührungspunkte die Spitzen jenes sind, schneiden sich also immer in einem Punkte. Da die Projectionen ad, bc, b'd'; ab, cd, a'c' parallel sind; so schneiden sich AD, BC, B'D'; AB, CD, A'C' in einem Punkte (19.). Da ferner ab, cd; bc, ad; a'b', c'd'; b'c', a'd' einander parallel sind; so müssen die vier Durchschnittspunkte der Gegenseiten der beiden Vierecke in einer geraden Linie liegen (22.) (Transversale. 34.). Zöge man durch

Digitized by Google

β, δ; α, γ Berührende; so würden diese auch den Linien ab, cd, a'c'; ad, bc, b'd' parallel seyn. Folglich laufen die durch die Durchschnittspunkte der Diagonalen des umgeschriebenen Vierecks (Fig. 150.) mit dem Kreise gezogenen Berührenden mit der andern Diagonale des umgeschriebenen Vierecks und den gleichliegenden Gegenseiten des eingeschriebenen Vierecks in einem Punkte zusammen (19.).

Da man, wie aus der Entstehung der Kegelschnitte sogleich folgt, jeden Kegelschnitt als Projection eines Kreises betrachten kann; so gilt alles Vorhergehende auch für jeden Kegelschnitt, in und um welchen auf die obige Art Vierecke beschrieben sind.

28. Poncelet hat diese Methode zu großer Allgemeinheit erhoben. Wie fruchtbar sie ist, mögen noch folgende Sätze zeigen. Man habe z. B. das eingeschriebene Sechseck ABCDEF (Fig. 39.), dessen Gegenseiten sich in c, a, b schneiden. Man nehme P so an, daß, wenn man die Projectionsebene mit Pca parallel legt, die Projection des gegebenen Kreises ein Kreis, und in der Projection a'b'c'd'e'f' (Fig. 151.) des Sechsecks die Seiten f'e', b'c' und e'd', a'b' einander parallel werden (18. 25.). Daher ist $x = y$, Bog. b'c' + Bog. c'd' = Bog. e'f' + Bog. a'f'. Aber auch $v = w$, Bog. a'f' + Bog. a'b' = Bog. e'd' + Bog. c'd'. Addirt man nun auf beiden Seiten, und hebt auf; so wird Bog. b'c' + Bog. a'b' = Bog. e'f' + Bog. e'd', $p = q$, c'd' parallel a'f'. Folglich sind auch die Projectionen von CD, AF (Fig. 39.) einander parallel. Also liegen c, a, b (Fig. 39.) in einer geraden Linie (22.). Ein anderer einfacher Beweis des merkwürdigen Hexagrammum mysticum (Transversale. 35.).

29. Sind (Fig. 152.) von drei in gerader Linie liegenden Punkten A, B, C sechs Berührende an einen Kreis gezogen; so schneiden sich m'm'', n'n'', p'p'' in einem Punkte. Man denke sich, welches nach dem Obigen immer zulässig ist, einen Kegel mit der Spitze P und eine der PABC parallele Ebene, so daß die Projection unserer

Digitized by Google

Figur ein Kreis wird; so sind die Projectionen der Linien Am′, Am″; Bn′, Bn″; Cp′, Cp″ einander parallel (18.), und berühren die Projection des gegebenen Kreises. Also gehen die Projectionen der Linien m′m″, n′n″, p′p″ alle durch den Mittelpunkt der Projection des gegebenen Kreises, und schneiden sich folglich, so wie demnach auch die Linien m′m″, n′n″, p′p″ selbst in einem Punkte. Uebrigens erhellet, daß dieser Satz für jede Anzahl in gerader Linie liegender Punkte A, B, C, u. s. f. gilt. Der Beweis bleibt immer derselbe.

30. Beschreibt man nun durch die Spitzen eines eingeschriebenen Sechsecks ABCDEF (Fig. 153.) ein Sechseck abcdef um den Kreis; so läßt sich leicht zeigen, daß die Diagonalen des letztern sich immer in einem Punkte schneiden. Betrachtet man nämlich die Vierecke BCEF, begh; so folgt aus (27.) unmittelbar umgekehrt, daß nn′, nn″ Berührende sind. Eben so sind mm′, mm″, pp′, pp″ Berührende, wo m′, m″, p′, p″ ähnlich liegende Punkte wie n′, n″, in der Figur aber nicht verzeichnet sind. Da nun m, n, p in einer geraden Linie liegen (28.); so schneiden n′n″, m′m″, p′p″, d. i. be, ad, cf, die drei Diagonalen des umschriebenen Sechsecks, sich in einem Punkte. Der Erfinder dieses Satzes ist Brianchon (Journal de l'école polytech. T. VI. Cahier 13. Corresp. sur l'école pol. T. II. p. 387., wo auch noch manche Folgerungen vorkommen.)

31. Wenn AC, A′C′; BC, B′C′ (Fig. 154.) parallel sind, und eine solche Lage haben, daß AA′, BB′, CC′ in einem Punkte S zusammenlaufen; so sind auch AB, A′B′ parallel. Denn SA:SA′ = SC:SC′, SB:SB′ = SC:SC′. Also SA:SA′ = SB:SB′, und folglich AB, A′B′ parallel. Sind nun überhaupt zwei Dreiecke ABC, A′B′C′ (Fig. 155.) so gelegt, daß die durch ihre gleichnamigen Spitzen gezogenen Linien in einem Punkte zusammenlaufen; so liegen die drei Durchschnittspunkte m, n, p von je zwei gleichnamigen Winkeln gegenüberliegenden Seiten in einer geraden Linie. Man nehme irgend einen Mittelpunkt P der Projection an, ziehe Pm, Pn,

Digitized by Google

nehme die Projectionsebene mit Pmn parallel an; so sind die Projectionen ac, a'c'; bc, b'c' der entsprechenden Linien einander parallel (18.). Folglich nach dem Vorhergehenden auch ab, a'b'. Demnach liegen m, n, p in einer geraden Linie (22.). M. s. Desargues Traité de perspective. Paris. 1648. Servois Solutions peu connues de différens problèmes de Géom. Metz. 1804. Andere vielfache Anwendungen der Theorie der Projectionen s. m. bei Poncelet a. a. O.

Mehrere Eigenschaften des Vierecks s. m. noch in dem Art. Transversale.

Vieltheilige Größe, s. Polynomium.

Virginum regula, s. Regel. Thl. IV. S. 264.

Vierung wird bei ältern deutschen Schriftstellern zuweilen statt des jetzt gewöhnlichen Ausdrucks Quadratur gebraucht. Die Ueberschrift von Archimedes Schrift über die Quadratur der Parabel übersetzt z. B. J. C. Sturm in seiner deutschen Uebersetzung der Werke des griechischen Geometers (Archimedis Kunstbücher. Nürnberg. 1670.): „Von der Parabelvierung." Zuweilen bedeutet dieses Kunstwort aber auch überhaupt ein Viereck, wie z. B. ungleiche oder ungeschickte Vierung statt Trapezium. S. Trapezium.

Vivianische Aufgabe, s. Florentinische Aufgabe.

Vollkommene oder vollständige Zahl (n. perfectus) ist eine Zahl, welche der Summe ihrer aliquoten Theile gleich ist, wie z. B. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Jenachdem eine Zahl größer oderkleiner ist, als die Summe ihrer aliquoten Theile, heißt sie eine mangelhafte (n. deficiens) oder überschießende Zahl (n. abundans); erstere auch eine unvollkommene.

Vollständige Zahlen zu finden, lehrt schon Euclides

Digitized by Google

(IX. 36.). „Nimmt man so viele von der Einheit an „stetig verdoppelte Zahlen, bis deren Summe eine Prim„zahl ist; so ist das Product aus dieser Summe in die „letzte jener Zahlen eine vollkommene Zahl," oder in unserer arithmetischen Sprache: Ist die Summe der geometrischen Progression $1, 2, 4, 8, \ldots 2^n$, welche $= 2^{n+1} - 1$, eine Primzahl; so ist $(2^{n+1} - 1).2^n$ eine vollkommene Zahl. Da nämlich nach der Annahme $2^{n+1} - 1$ und auch 2 eine Primzahl ist; so ist (Theiler einer Zahl. 15.) die Summe der Theiler des Productes $(2^{n+1} - 1).2^n$, die Einheit und diese Zahl selbst mit eingeschlossen,

$$= \frac{(2^{n+1}-1)^2 - 1}{2^{n+1} - 1 - 1} \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$

$$= \frac{(2^{n+1} - 1 - 1)(2^{n+1} - 1 + 1)}{2^{n+1} - 1 - 1} \cdot \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^{n+1}.(2^{n+1} - 1).$$

Folglich die Summe der aliquoten Theile, wobei die Zahl selbst ausgeschlossen werden muß,

$$= 2^{n+1}.(2^{n+1} - 1) - 2^n.(2^{n+1} - 1) = 2^n.(2^{n+1} - 1),$$

der Zahl selbst gleich, wie es seyn muß. Vielleicht giebt es noch andere Formen vollkommener Zahlen. Aus der Euclidischen Form ergeben sich folgende;

$(2^2 - 1).2 = 6$
$(2^3 - 1).2^2 = 28$
$(2^5 - 1).2^4 = 496$
$(2^7 - 1).2^6 = 8128$
$(2^{13} - 1).2^{12} = 33550336$
$(2^{17} - 1).2^{16} = 8589869056$
$(2^{19} - 1).2^{18} = 137438691328$
$(2^{31} - 1).2^{30} = 2305843008139952128$.

Der Pater Mersenne, welcher zur Entdeckung der Eigenschaften der Zahlen vielen Scharfsinn besaß, giebt (Cogitata phys. mathem. Praef. §. XIX.) noch $(2^{67} - 1).2^{66}$, $(2^{127} - 1).2^{126}$, $(2^{257} - 1).2^{256}$ als vollkommene Zahlen an. Ist $2^{41} - 1$ eine Primzahl, wie sie es nach Eulers und W. Krafts Rechnungen seyn soll; so ist auch $(2^{41} - 1).2^{40}$ eine vollkommene Zahl. Oft sind von Schriftstellern Zahlen für vollkom-

Digitized by Google

mene gehalten worden, die es nicht sind. Heilbronner (Hist. Mathes. p. 755.) giebt 130816 und 2096128 als vollkommene Zahlen an. Die erste ist $=(2^9-1).2^8 = 256.511$, die andere $=(2^{11}-1).2^{10} = 1024.2047$. Aber weder $511=7.73$, noch $2047 = 23.89$ ist eine Primzahl. Auch schon W. Kraft (Comm. Petrop. T. VII. p. 7.) hat diese, und mehrere andere, Zahlen als falsch bezeichnet. M. s. auch Grüsons enthüllte Zaubereien und Geheimnisse der Arithm. Berlin. 1796. Thl. I. S. 86. M. G. Hansch (Theoria Arithmetices novis a se inventis aucta. Vindob. 1739.) macht den Fehlschluß, daß alle Zahlen von der Form $2^{n+1}-1$ Primzahlen seyen, wenn nur $n+1$ eine Primzahl ist, welches schon für $n=10$ nicht mehr eintrifft, da $2^{11}-1 = 2047 = 23.89$ ist, ein Irrthum, den schon Winsheim (De num. perf. Nov. Comm. Petrop. T. II. p. 68.) widerlegt hat. Auch der Herausgeber der zweiten Ausgabe von Wolfs mathem. Lexicon und Petrus Bunge (Numerorum mysteria. Lut. Paris. 1618.) haben falsche vollkommene Zahlen. Noch gehören hierher: Joan. Boroscii Apologia pro Aristotele et Euclide contra Petrum Ramum et alios de numeris perfectis. Dantisci. 1652. 4., wovon eine andere Ausgabe unter etwas anderm Titel (Arnst. 1699.) Kästner in den geom. Samml. II. S. 416. anführt. Auch in Lucas de Burgo Sancti Sepulchri summa de Arithmetica Geometria Proportioni e Proportionalita finden sich gleich zu Anfange Vorschriften, die vollkommenen Zahlen zu finden.

Volumen ist das Maaß des Raumes, welchen ein Körper einnimmt.

Voluta delumbata heißt zuweilen die Quadratrix. S. u. A. Heilbronner Historia Mathes. p. 154.

Voraussetzung oder Hypothesis, s. Thesis.

Digitized by Google

W.

Wahlsatz oder **willkührlicher Satz** ist ein Satz, in welchem von willkührlichen Einrichtungen, Bezeichnungen und dergl., wie z. B. von den bei dem Längen- und Winkelmaaße üblichen Eintheilungen und Bezeichnungen, Nachricht gegeben wird. Die Benennung ist übrigens nicht sehr in Gebrauch gekommen.

Wahre Wurzeln einer Gleichung, s. Gleichung (15.).

Wahrscheinlicher Fehler, s. Wahrscheinlichkeitsrechnung (89.).

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi. Calcul des probabilités.) ist die Wissenschaft von der Berechnung der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

1. Die **mathematische Wahrscheinlichkeit** oder **Probabilität** eines Ereignisses wird bestimmt durch das Verhältniß der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle, d. i. **der** Fälle, welche dasselbe wirklich herbeiführen, zu der Anzahl aller möglichen Fälle, vorausgesetzt, daß alle Fälle gleich möglich sind; oder, was dasselbe ist, die mathematische Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird, unter derselben Voraussetzung, dargestellt durch einen Bruch, dessen Zähler die Anzahl der dem Ereignisse günstigen Fälle, und dessen Nenner die Anzahl aller möglichen Fälle ist. So ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen sechsseitigen Würfel eine bestimmte Anzahl von Augen zu werfen, $= \frac{1}{6}$, da die Anzahl der diesem Ereignisse günstigen Fälle $= 1$, die Anzahl aller möglichen Fälle $= 6$ ist. Mit zwei Würfeln, die wir durch A, B bezeichnen wollen, sind offenbar folgende verschiedene Würfe möglich:

Digitized by Google

A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.	A.	B.
1	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6	1
1	2	2	2	3	2	4	2	5	2	6	2
1	3	2	3	3	3	4	3	5	3	6	3
1	4	2	4	3	4	4	4	5	4	6	4
1	5	2	5	3	5	4	5	5	5	6	5
1	6	2	6	3	6	4	6	5	6	6	6

Also ist die Anzahl aller möglichen Würfe $= 36$. Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 1 und 2 zu werfen, ist $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$; die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; die Wahrscheinlichkeit aber, mit zwei Würfeln einen bestimmten Pasch zu werfen, $= \frac{1}{36}$.

2. Bezeichnen wir also überhaupt die Anzahl der einem Ereignisse günstigen Fälle durch n, die Anzahl aller möglichen Fälle durch N, und die mathematische Wahrscheinlichkeit des Ereignisses durch w; so ist

$$w = \frac{n}{N},$$

wobei aber, wie sich von selbst versteht, vorausgesetzt werden muß, daß alle Fälle an sich gleich möglich sind. Je größer die Anzahl der günstigen Fälle im Verhältniß zu der Anzahl aller Fälle ist, desto größer ist w, und desto größer ist in der That auch die Wahrscheinlichkeit, daß das in Rede stehende Ereigniß wirklich eintreffen wird. Die mathematische Wahrscheinlichkeit ist das bestimmte Maaß dessen, was man im gemeinen Leben Wahrscheinlichkeit nennt.

3. Die ganze Schwierigkeit in der Lehre von der Berechnung der Wahrscheinlichkeit kommt, wie man aus der so eben gegebenen Definition sieht, auf die Bestimmung der Anzahl aller einem gewissen Ereignisse günstigen, und der Anzahl aller möglichen Fälle, welche bei diesem Ereignisse überhaupt eintreten können, zurück, eine Bestimmung, die in der That häufig beträchtlichen Schwierigkeiten unterworfen ist. Die combinatorische Analysis leistet dabei vortreffliche Dienste, und wir sind berechtigt, die-

Digitized by Google

selbe hier aus den ihr gewidmeten Artikeln dieses Wörterbuchs als bekannt vorauszusetzen. Eigentlich unterscheidet man aber zwei Arten der Wahrscheinlichkeit. Läßt sich nämlich die Anzahl aller möglichen sowohl, als auch der günstigen Fälle auf rein wissenschaftlichem Wege, aus Gründen mittelst demonstrirter Sätze bestimmen; so nennt man die entsprechende Wahrscheinlichkeit Wahrscheinlichkeit aus Gründen oder Wahrscheinlichkeit a priori, und nur diese Art der Wahrscheinlichkeit gehört in den Kreis dieser ersten Abtheilung unsers Wörterbuchs. Fehlt es aber bei der erwähnten Bestimmung an sichern Regeln, statt deren man Erfahrungen zu Hülfe nehmen muß, so erhält man eine Wahrscheinlichkeit aus Beobachtung oder Wahrscheinlichkeit a posteriori, wovon nur in den folgenden Abtheilungen dieses Werkes ausführlich gehandelt werden kann, obgleich auch schon, der Uebersicht wegen, in diesem Artikel Einiges über diesen wichtigen Gegenstand beigebracht werden soll. Die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit a posteriori ist desto sicherer, je größer die Anzahl der zum Grunde gelegten Beobachtungen ist, vorausgesetzt, daß alle mit möglichst größter Genauigkeit angestellt sind. Hätte z. B. die Erfahrung gelehrt, daß von 100 gleich gut gebauten, gleich gut ausgerüsteten Schiffen, welche zu einer gewissen Jahreszeit von Amsterdam nach Petersburg seegelten, 5 Schiffbruch gelitten haben; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein ähnliches Schiff, welches um dieselbe Jahreszeit nach Petersburg seegeln soll, verunglücken werde, $= \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$, und diese Probabilität muß so lange beibehalten werden, bis neuere wiederholte Erfahrungen eine andere bestimmen. Dies ist ein einfaches Beispiel einer Wahrscheinlichkeit a posteriori.

4. Ist $n = N$ (2.), so wird $w = 1$, und in diesem Falle sagt man, es sey Gewißheit vorhanden. Die Einheit ist also das Symbol der Gewißheit. Die Anzahl der günstigen Fälle ist hier der Anzahl aller möglichen Fälle gleich, und das in Rede stehende Ereigniß muß also nothwendig eintreffen, immer unter der Voraussetzung, daß

Digitized by Google

alle Fälle gleich möglich sind. Ist $w = \frac{1}{2}$, so nennt man das Ereigniß zweifelhaft; ist $w > \frac{1}{2}$, so heißt es schlechthin im gemeinen Leben wahrscheinlich, und unwahrscheinlich, wenn $w < \frac{1}{2}$ ist.

5. Was der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zur Gewißheit fehlt, heißt die Ergänzung der Wahrscheinlichkeit oder die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, welche in der Folge immer durch w_1 bezeichnet werden soll, so daß also

$$w + w_1 = 1,$$

$$w_1 = 1 - w = 1 - \frac{n}{N} = \frac{N - n}{N};$$

und es ist folglich, da $N - n$ offenbar die Anzahl der dem Ereignisse ungünstigen Fälle ist, w_1 die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreffen desselben. Setzen wir $N - n = m$; so ist immer

$$n + m = N, \; w = \frac{n}{N}, \; w_1 = \frac{m}{N};$$

$$w + w_1 = \frac{n}{N} + \frac{m}{N} = 1;$$

$$w = \frac{n}{n+m}, \; w_1 = \frac{m}{n+m}.$$

Zuweilen ist es leichter, statt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses unmittelbar zu bestimmen, seine entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit aufzusuchen.

6. Von der bisher betrachteten, oder der absoluten, Wahrscheinlichkeit ist verschieden die relative. Spielen z. B. zwei Personen mit zwei Würfeln unter der Bedingung mit einander, daß, indem alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, der erste gewinnen soll, wenn er 7, der zweite, wenn er 4 wirft; so kann man fragen, welche Wahrscheinlichkeit jeder Spieler zu gewinnen habe. Nach der Tabelle in (1.) kann mit zwei Würfeln 7 auf 6, 4 auf 3 verschiedene Arten geworfen werden. Daher ist, weil alle übrigen Fälle unbeachtet bleiben, die Anzahl aller möglichen Fälle $= 9$, die Wahrscheinlichkeit des ersten Spielers also $= \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, die des zweiten $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, und ihre Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen verhalten sich $= 2:1$. Ist überhaupt die Anzahl aller möglichen Fälle,

Digitized by Google

wie immer, $= N$, die Anzahl der einen Art von Fällen unter diesen $= n'$, die Anzahl der andern Art $= n''$; so ist, indem alle übrigen Fälle unberücksichtigt bleiben, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falls der ersten Art

$$= \frac{n'}{n'+n''},$$

und die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falles der zweiten Art unter derselben Bedingung

$$= \frac{n''}{n'+n''}.$$

Dies sind die relativen Wahrscheinlichkeiten. Die absoluten Wahrscheinlichkeiten in Bezug auf die beiden Arten von Fällen sind:

$$w' = \frac{n'}{N} \text{ und } w'' = \frac{n''}{N}.$$

Also

$$\frac{n'}{n'+n''} = \frac{n':N}{(n':N)+(n'':N)} = \frac{w'}{w'+w''},$$
$$\frac{n''}{n'+n''} = \frac{n'':N}{(n':N)+(n'':N)} = \frac{w''}{w'+w''},$$

so daß folglich die relative Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falles der einen oder andern Art erhalten wird, wenn man die entsprechende absolute Wahrscheinlichkeit durch die Summe der absoluten Wahrscheinlichkeiten beider Arten dividirt.

7. Vorzüglich ist zwischen einfacher und zusammengesetzter Wahrscheinlichkeit zu unterscheiden, jenachdem nur ein Ereigniß, oder mehrere in Betracht kommen. In letzterer Beziehung sind wieder mehrere Fälle zu unterscheiden, die wir nach der Reihe durchgehen wollen.

8. Sey zunächst die Probabilität zu bestimmen, daß unter mehrern Ereignissen irgend ein unbestimmtes derselben eintreffe.

Die Anzahl aller möglichen Fälle sey $= N$, die Mengen der den einzelnen Ereignissen günstigen Fälle seyen

Digitized by Google

n', n'', n''', n'''', ..., und ihre einzelnen Probabilitäten w', w'', w''', w'''', ...; so ist

$$w' = \frac{n'}{N},\ w'' = \frac{n''}{N},\ w''' = \frac{n'''}{N},\ w'''' = \frac{n''''}{N}, \ldots.$$

Die Anzahl aller günstigen Fälle, in Bezug auf die vorgelegte Aufgabe, ist =

$$n = n' + n'' + n''' + n'''' + \ldots.,$$

und demnach die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der gegebenen Ereignisse =

$$w = \frac{n}{N} = \frac{n' + n'' + n''' + n'''' + \ldots.}{N}$$

$$= \frac{n'}{N} + \frac{n''}{N} + \frac{n'''}{N} + \frac{n''''}{N} + \ldots.$$

Also $w = w' + w'' + w''' + w'''' + \ldots.$, d. i. die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen irgend eines der gegebenen Ereignisse ist der Summe der Probabilitäten der einzelnen Ereignisse gleich.

Mit einem Würfel eine bestimmte Anzahl von Augen auf den ersten Wurf zu werfen ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6}$. Also die Wahrscheinlichkeit, irgend eine unbestimmte Anzahl von Augen auf den ersten Wurf zu werfen, $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$, d. i. Gewißheit, wie es auch seyn muß.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln 7 zu werfen, ist $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und die Wahrscheinlichkeit, 8 zu werfen, $= \frac{5}{36}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, 7 oder 8 zu werfen, $= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$. Die Wahrscheinlichkeit, 9 zu werfen, ist $= \frac{4}{36}$. Also die Wahrscheinlichkeit, 7, 8 oder 9 zu werfen, $= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Die Wahrscheinlichkeit, 8 oder 9 zu werfen, dagegen $= \frac{5}{36} + \frac{4}{36} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

Seyen w, w', w'', w''', ... wieder die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen verschiedener Ereignisse, w_1 aber sey die Wahrscheinlichkeit, daß keines dieser Ereignisse eintrifft; so ist immer

$$w' + w' + w'' + w''' + \ldots. + w_1 = 1.$$

Denn die Wahrscheinlichkeit, daß irgend eines der gegebenen Ereignisse eintrifft, ist nach dem Obigen

Digitized by Google

$$= w + w' + w'' + w''' + \ldots,$$

und die Wahrscheinlichkeit, daß keines eintrifft, nach der Voraussetzung $= w_1$. Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß entweder eines oder keines eintrifft, nach dem Obigen

$$= w + w' + w'' + w''' + \ldots + w_1.$$

In diesem Falle findet aber offenbar Gewißheit statt; und es ist also (4.)

$$w + w' + w'' + w''' + \ldots + w_1 = 1.$$

Dies ist eine Erweiterung des Princips von den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten (5.).

9. Sind wieder w', w'', w''', w'''', ... die Wahrscheinlichkeiten mehrerer einzelnen Ereignisse; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß alle diese Ereignisse zusammentreffen. Werfen z. B. zwei Personen zugleich aus einem Becher jede zwei Würfel auf den Tisch; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß die eine 8, die andere 9 Augen werfe.

Man habe zuerst bloß zwei Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten

$$w' = \frac{n'}{N'}, \quad w'' = \frac{n''}{N''}$$

sehen. Die Anzahl aller möglichen Fälle in Bezug auf das erste Ereigniß ist $= N'$, in Bezug auf das zweite $= N''$. Jeder der ersten Fälle kann mit jedem der zweiten Fälle zusammentreffen, und in Bezug auf das Zusammentreffen beider Ereignisse ist also die Anzahl aller möglichen Fälle offenbar $= N'N''$, und auf dieselbe Art in derselben Beziehung die Anzahl der günstigen Fälle $= n'n''$, die Wahrscheinlichkeit also, daß beide Ereignisse zusammentreffen werden, $=$

$$w = \frac{n'n''}{N'N''} = \frac{n'}{N'} \cdot \frac{n''}{N''} = w'w''.$$

Kommt noch ein drittes Ereigniß hinzu, dessen Probabilität $= w'''$ ist; so kann man das Zusammentreffen der beiden ersten Ereignisse als ein einzelnes Ereigniß, dessen Probabilität $= w'w''$ ist, ansehen, und die Probabilität,

Digitized by Google

daß alle drei Ereignisse zusammen eintreffen werden, ist also, wie vorher, =

$$w = w'w''.w''' = w'w''w'''.$$

So weiter gehend schließt man leicht, daß die Probabilität für das Zusammentreffen aller in Rede stehenden Ereignisse =

$$w = w'w''w'''w''''w''''' \ldots,$$

d. i. dem Producte der Probabilitäten aller einzelnen Ereignisse gleich ist.

In Bezug auf obiges Beispiel sind die beiden Probabilitäten $= \frac{5}{36}$, und $= \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; also die Probabilität für das zusammengesetzte Ereigniß, d. i. das Zusammentreffen beider Ereignisse, $= \frac{5}{36} \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{324}$.

Wenn A, B jeder zwei, C einen Würfel auf den Tisch wirft; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß A einen Pasch, B keinen Pasch, und C sechs Augen wirft, $= \frac{6}{36} \cdot \frac{30}{36} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{216}$.

10. Wird eine und dieselbe Handlung mehrere Male wiederholt; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß die Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten w', w'', w''', w'''', ... sind, hinter einander eintreten.

Die Anzahl aller möglichen Fälle sey $= N$, und

$$w' = \frac{n'}{N}, w'' = \frac{n''}{N}, w''' = \frac{n'''}{N}, w'''' = \frac{n''''}{N}, \ldots.$$

Man habe zuerst nur zwei Ereignisse, die hinter einander eintreten sollen; so ist die Anzahl aller möglichen Fälle, das zweite Ereigniß mag vor oder nach dem ersten eintreten, offenbar $= NN = N^2$, nach der Lehre von den Variationen. (S. diesen Artikel.) Da nun ferner jeder dem zweiten Ereignisse günstige Fall hinter jedem einzelnen, dem ersten günstigen, Falle eintreten kann; so ist die Anzahl der für das auf einander folgende Eintreffen beider Ereignisse günstigen Fälle $= n'n''$, und folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$w = \frac{n'n''}{N^2}.$$

Kommt noch ein drittes Ereigniß hinzu; so ist nach der

Digitized by Google

Lehre von den Variationen die Anzahl aller möglichen Fälle $= N^3$, und, da jeder der dem dritten Ereignisse günstigen Fälle hinter jedem einzelnen der Fälle, in welchen das erste und zweite Ereigniß auf einander folgen, eintreten kann, die Anzahl der günstigen Fälle $= n'n''n'''$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=$

$$w = \frac{n'n''n'''}{N^3}.$$

Ist die Anzahl der gegebenen Ereignisse $= x$; so schließt man hieraus leicht, daß überhaupt

$$w = \frac{n'n''n'''n'''' \ldots}{N^x},$$

oder $w = w'w''w'''w'''' \ldots$. Ist einer oder der andere der Brüche, durch welche die einzelnen Wahrscheinlichkeiten dargestellt werden, vielleicht aufgehoben; so erhellet leicht, daß letztere Gleichung dennoch richtig bleibt.

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= w' = \frac{n'}{N}$ ist, xmal hinter einander eintrifft, ist $=$

$$w = w'^x = \left(\frac{n'}{N}\right)^x.$$

Mit einem Würfel ein As zu werfen, ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel xmal hinter einander ein As zu werfen, ist $= (\frac{1}{6})^x$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln zwei Mal hinter einander zwei Augen zu werfen, ist $= (\frac{1}{36})^2 = \frac{1}{1296}$.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, ist $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Viermal hinter einander mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, ist also die Wahrscheinlichkeit $= (\frac{1}{6})^4 = \frac{1}{1296}$, und viermal hinter einander einen bestimmten Pasch, z. B. zwei Sechsen, zu werfen, $= (\frac{1}{36})^4 = \frac{1}{1679616}$.

11. Wird ein und dieselbe Handlung zwei Mal verrichtet, und

$$w' = \frac{n'}{N}, \quad w'' = \frac{n''}{N}$$

Digitized by Google

sind, indem N die Anzahl aller möglichen Fälle bezeichnet, die Wahrscheinlichkeiten zweier Ereignisse; so könnte man auch nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder, wenn dies nicht der Fall wäre, dann doch das zweite eintrifft.

Die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß eintrifft, ist $= w'$; also die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Ereigniß nicht eintrifft, $= 1 - w'$ (5.). Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß das erste Ereigniß nicht, aber dann das zweite eintrifft, $= (1 - w')w''$ (10.). Demnach die Wahrscheinlichkeit, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder dieses Ereigniß nicht, dann aber das zweite erfolgt, $= w' + (1 - w')w''$ (8.). Ist also w die gesuchte Probabilität; so ist

$$\begin{aligned} w &= w' + w'' - w'w'' \\ &= 1 - 1 + w'' + w' - w'w'' \\ &= 1 - (1 - w'') + w'(1 - w'') \\ &= 1 - (1 - w')(1 - w'') , \end{aligned}$$

d. i. die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist der Ergänzung der aus den entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich.

Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln auf den ersten Wurf 9 Augen, oder, wenn dies nicht geschieht, auf den zweiten Wurf 8 Augen zu werfen, ist

$$\begin{aligned} &= 1 - (1 - \tfrac{4}{36})(1 - \tfrac{5}{36}) , \\ &= 1 - \tfrac{32}{36} \cdot \tfrac{31}{36} = 1 - \tfrac{8}{9} \cdot \tfrac{31}{36} = 1 - \tfrac{62}{81} \\ &= \tfrac{19}{81} . \end{aligned}$$

12. Hat man drei Ereignisse, deren Probabilitäten

$$w' = \frac{n'}{N} , \quad w'' = \frac{n''}{N} , \quad w''' = \frac{n'''}{N}$$

sind; so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß entweder das erste Ereigniß eintrifft, oder, wenn dies nicht der Fall wäre, das zweite erfolgt, oder, wenn auch dies nicht der Fall wäre, doch das dritte eintrifft. Setzt man

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w'') ;$$

so erhellet leicht, wie vorher, daß

$$w = 1 - (1 - v)(1 - w''') ,$$

Für die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln im ersten

Digitized by Google

Wurfe 7, oder, wenn dies nicht eintrifft, im zweiten Wurfe 7, oder, wenn auch dies nicht eintreffen sollte, doch im dritten Wurfe 7 zu werfen, ist

$$v = 1 - (1 - \tfrac{6}{36})(1 - \tfrac{6}{36}) = \tfrac{11}{36};$$
$$w = 1 - (1 - \tfrac{11}{36})(1 - \tfrac{6}{36}) = \tfrac{91}{216}.$$

Eben so setze man bei vier Ereignissen auf ähnliche Art wie vorher

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w''),$$
$$v' = 1 - (1 - v)(1 - w'''),$$
$$w = 1 - (1 - v')(1 - w''''),$$

und bei fünfen:

$$v = 1 - (1 - w')(1 - w''),$$
$$v' = 1 - (1 - v)(1 - w'''),$$
$$v'' = 1 - (1 - v')(1 - w''''),$$
$$w = 1 - (1 - v'')(1 - w'''''),$$

u. s. f. u. s. f.

13. Frägt man, um noch ein Beispiel zu dem Vorhergehenden zu geben, nach der Wahrscheinlichkeit, mit einem Thaler in zwei Würfen wenigstens einmal Münz (Schrift oder croix) zu werfen; so wirft man entweder das erste Mal Münz, oder das erste Mal nicht Münz und dann das zweite Mal Münz, oder endlich das erste Mal nicht Münz und dann auch das zweite Mal Unmünz (Wapen; pile.). Die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal Münz zu werfen, ist $= \frac{1}{2}$; die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht Münz zu werfen, ist ebenfalls $= \frac{1}{2}$, und eben so ist die Wahrscheinlichkeit, das zweite Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2}$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht Münz, aber das zweite Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.), und demnach die Wahrscheinlichkeit, daß überhaupt eins dieser beiden Ereignisse eintreffe, d. h. die Wahrscheinlichkeit, in einem der beiden Würfe Münz zu werfen, $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (8.). Unmittelbar giebt dies auch die Formel in (11.):

$$w = 1 - (1 - w')(1 - w'') = 1 - (1 - \tfrac{1}{2})(1 - \tfrac{1}{2})$$
$$= 1 - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

Eben dieses erhält man auch durch Aufzählung aller Fälle. Die verschiedenen Fälle sind nämlich: das erste Mal Münz,

Digitized by Google

das zweite Mal Münz; das erste Mal Münz, das zweite Mal Unmünz; das erste Mal Unmünz, das zweite Mal Münz; das erste Mal Unmünz, das zweite Mal Unmünz. Also sind überhaupt 4 Fälle möglich, und 3 derselben sind günstig, die Wahrscheinlichkeit also $= \frac{3}{4}$.

D'Alembert (Opuscules mathématiques. T. II. p. 20.) hat sich bei dieser an sich ganz leichten Aufgabe geirrt, indem er die gesuchte Wahrscheinlichkeit nur $= \frac{2}{3}$ findet. Denn, sagt er, trifft man das erste Mal Münz, so ist das Spiel geendet, trifft man aber das erste Mal Unmünz, so muß noch zum zweiten Male geworfen werden, in welchem entweder Münz oder Unmünz fällt, so daß also nur 3 Fälle möglich, 2 günstig sind, die Wahrscheinlichkeit also $= \frac{2}{3}$ ist. Man übersieht leicht, mit dem Obigen verglichen, das Irrige dieser Schlußart. Vorzüglich liegt der Irrthum darin, daß d'Alembert allen drei Fällen gleiche Möglichkeit beilegt (S. Laplace Théorie des probabilités. Trois. édit. p. VII.). Man sieht aber hieraus, wie behutsam man bei Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung seyn muß. Ueber das Spiel: Münz und Unmünz (Schrift und Wapen; croix ou pile) s. m. auch einen Aufsatz von Lambert in dem Archiv der Mathematik von Hindenburg. Heft 10. S. 216.

14. Ein zu erwartender ungewisser Gewinn ist offenbar desto größer, oder hat vielmehr desto mehr Werth, je größer die zu gewinnende Summe, und je größer die Wahrscheinlichkeit ist, ihn zu erhalten. Sind die Wahrscheinlichkeiten gleich, so stehen die zu erwartenden Gewinne offenbar in geradem Verhältniß der zu gewinnenden Summen, und eben so stehen bei gleichen Summen die zu erwartenden Gewinne in geradem Verhältniß der Wahrscheinlichkeiten, sie zu erhalten. Sind also für die Summen und Wahrscheinlichkeiten

$$s, s', s; w, w', w'$$

die zu erwartenden Gewinne g, g', g''; so ist

$$g : g'' = w : w', \quad g'' : g' = s : s',$$

Digitized by Google

woraus durch Zusammensetzung:

$$g : g' = sw : s'w' .$$

Setzt man nun für $s' = 1$ und $w' = 1$ auch $g' = 1$; so erhält man

$$g = sw ,$$

d. h. die Größe des zu erwartenden Gewinnes ist dem Producte aus der zu gewinnenden Summe in die Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten, gleich, den bei einer Summe $= 1$ mit der Gewißheit, sie zu erhalten, zu erwartenden Gewinn als Einheit angenommen.

Das Product sw nennt man in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die mathematische Hoffnung oder die Erwartung (sors, lucrum). Die eigentliche Bedeutung dieses Ausdrucks erhellet aus dem Vorhergehenden.

15. Hängt der zu erwartende Gewinn von mehrern Ereignissen ab; so erhält man ihn, wenn die zu erwartende Summe mit der Wahrscheinlichkeit, sie zu erhalten, bei jedem einzelnen Ereignisse multiplicirt wird, und die einzelnen Producte zusammenaddirt werden. Sind die zu erwartenden Summen und die entsprechenden Probabilitäten s, w; s', w'; s'', w''; s''', w'''; u. s. f.; so ist die mathematische Hoffnung

$$= sw + s'w' + s''w'' + s'''w''' + \ldots .$$

Spielen z. B. A und B Münz und Unmünz unter der Bedingung, daß A zwei Thaler erhält, wenn er auf den ersten Wurf Münz trifft, und fünf Thaler, wenn er nur erst das zweite Mal Münz wirft, so daß aber das Spiel als geendigt angesehen würde, wenn A schon das erste Mal gewönne; so ist die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2}$, und die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht, aber das zweite Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.). Folglich ist die Erwartung des A $= 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Soll aber das Spiel nur erst beim zweiten Wurfe geendigt seyn, so daß nämlich A sowohl beim ersten als auch beim zweiten Wurfe den festgesetzten Gewinn erhält, wenn er Münz trifft; so sind beide Würfe offenbar als zwei ganz

Digitized by Google

verschiedene Spiele zu betrachten, da der erste gar keinen Einfluß auf den zweiten hat, und die Wahrscheinlichkeit ist folglich in beiden Fällen $= \frac{1}{2}$, die Erwartung also $= 2.\frac{1}{2} + 5.\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$.

16. Verlust wird als negativer Gewinn betrachtet, und als solcher in die Rechnung eingeführt. Soll A 2 Thlr. gewinnen, wenn er das erste Mal Münz wirft, und 11 Thlr. verlieren, wenn er das zweite Mal Unmünz wirft, so daß aber das Spiel als beendigt angesehen wird, wenn A beim ersten Male gewinnt; so ist die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal Münz zu werfen, $= \frac{1}{2}$, und, es nicht zu werfen, ebenfalls $= \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit, das zweite Mal Unmünz zu werfen, ist $= \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, das erste Mal nicht Münz, und das zweite Mal Unmünz zu werfen, $= \frac{1}{4}$ (10.). Folglich die Erwartung des A $= 2.\frac{1}{2} - 11.\frac{1}{4} = -1\frac{3}{4}$, die sich aber hier in die Furcht verwandelt, $1\frac{3}{4}$ Thlr. zu verlieren. Wird nur einmal geworfen, und unter der Bedingung gespielt, daß A 2 Thlr. gewinnt, wenn er Münz, 2 Thlr. verliert, wenn er Unmünz wirft; so ist seine Erwartung $= 2.\frac{1}{2} - 2.\frac{1}{2} = 0$, d. h., er hat eben so viele Hoffnung, 2 Thlr. zu gewinnen, als 2 Thlr. zu verlieren, wie sich auch von selbst versteht.

17. Die sich aus den eben erläuterten Regeln zur Bestimmung der mathematischen Hoffnung ergebenden Resultate scheinen zuweilen dem, was der gesunde Menschenverstand lehrt, zu widersprechen, welches zuerst an einem Probleme beobachtet worden ist, welches im Jahre 1713 dem Herrn von Montmort von Nicolas Bernoulli vorgelegt wurde (Essay d'Analyse sur les jeux de hazard. 2. éd. Paris. 1713. p. 402.), und nachher vorzüglich durch Daniel Bernoulli's Behandlung unter dem Namen Petersburger Problem in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung berühmt geworden ist. Wir wollen dasselbe hier unter folgender Form betrachten:

A und B spielen Münz und Unmünz (Schrift und Wapen) unter der Bedingung, daß A dem B zwei Du-

Digitized by Google

caten giebt, wenn der erste Wurf Münz ist, vier Ducaten, wenn erst der zweite Wurf Münz ist, acht Ducaten, wenn erst der dritte Wurf Münz ist, und so fort bis zum nten Wurfe. Wie groß ist die Erwartung von B, und was kann also B am Anfange des Spiels setzen?

Bestimmt man die Wahrscheinlichkeiten nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit in (10.), und die Erwartung des B nach (15.); so erhält man sehr leicht für letztere folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 8 + \frac{1}{16}\cdot 16 + \ldots + \frac{1}{2^n}\cdot 2^n$$

d. i. $= n$. Die Wahrscheinlichkeit, daß in keinem der n Würfe Münz fällt, ist $= \frac{1}{2^n}$, und es scheint also, daß obige Reihe eigentlich noch um ein Glied zu vermehren sey. Da aber dann B auch Nichts erhält; so ist das noch beizufügende Glied $= \frac{1}{2^n}\cdot 0 = 0$. Wir erwähnen dies, wenn es sich auch schon von selbst versteht, wegen des Folgenden. Ist also die Anzahl der einzelnen Spiele sehr groß oder gar unendlich; so könnte B auch eine sehr große oder eine unendliche Summe wagen. Wird dies aber wohl ein auch nur einigermaßen verständiger Spieler thun, und stimmt obiges Resultat auch nur im Entferntesten mit dem, was der gesunde Verstand augenblicklich lehrt, überein? Gewiß Niemand wird bei einem solchen Spiele auch nur eine kleine Summe wagen.

18. Mehrere Mathematiker, z. B. Buffon, Cramer, Fontaine, Beguelin (Mém. de Berlin. 1767.), Lichtenberg (Betrachtungen über einige Methoden, eine gewisse Schwierigkeit in der Berechnung der Wahrscheinlichkeit beim Spiele zu heben. Göttingen 1770.), vorzüglich aber Daniel Bernoulli in der Abhandlung: Specimen theoriae novae de mensura sortis (Comm. Petrop. T. V. p. 175.), von welcher sich auch ein kurzer Auszug in dem Hamburgischen Magazin. Bd. I. 5. 1747. S. 73. befindet, haben die Beseitigung der erwähnten Schwierigkeit versucht. Wir wollen hier möglichst kurz Bernoulli's Theorie vorzüglich nach Laplace (a. a. O. p. 432.) erläutern.

Digitized by Google

19. Der Werth einer Summe Geldes kann in der Mathematik bloß nach ihrer absoluten Größe beurtheilt werden, ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche jene Summe besitzt, oder nicht besitzt. Daß aber z. B. ein Thaler für Jemanden, dessen Vermögen sich auf hundert Thaler beläuft, einen weit größern Werth haben muß, als für einen Millionair, wird von Niemand bezweifelt. Dies hat darauf geführt, zwischen dem physischen und moralischen Werthe einer Summe Geldes zu unterscheiden, indem man unter jenem den absoluten Werth derselben ohne Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, unter diesem aber ihren Werth in Bezug auf ihren absoluten Werth und zugleich mit Rücksicht auf das besondere Interesse der Person, welche diese Summe besitzt oder nicht besitzt, versteht. Sogleich bietet sich aber hier die Frage dar, wie man den von tausenderlei Dingen abhängenden moralischen Werth einer Summe Geldes beurtheilen könne, und es fällt leicht in die Augen, daß, allgemeine Regeln hierzu zu geben, unmöglich ist, da die Interessen der einzelnen Personen so unendlich verschieden sind. Indeß hat folgende Hypothese Daniel Bernoulli's den meisten Beifall gefunden, und scheint sich in der That auch der Erfahrung am besten anzuschließen:

„Der moralische oder relative Werth einer unendlich „kleinen Summe steht in geradem Verhältnisse ihres abso„luten Werthes, und in umgekehrtem Verhältnisse des „ganzen Vermögens der dabei interessirten Person."

Bernoulli bemerkt zugleich, daß jeder Mensch, auch der ärmste, nach den gemeinen Begriffen, ein gewisses Vermögen besitze, welches bei den meisten allerdings in ihrem Fleiße bestehe. Wer durch Betteln sein Leben fristet, und dadurch jährlich 10 Ducaten erwirbt, sagt Bernoulli, wird nicht 50 Ducaten annehmen, unter der Bedingung, auf jene Art, und auf jede andere, sein Leben zu fristen, Verzicht zu leisten. Also jeder Mensch hat ein gewisses Vermögen; nur der so eben vor Hunger Sterbende hat absolut nichts.

Digitized by Google

20. Bezeichnet nun x den absoluten Werth, y den relativen oder moralischen Werth einer Summe Geldes, und x erleidet eine unendlich kleine Veränderung, die durch ∂x ausgedrückt wird, so drückt Laplace, dem obigen Principe gemäß, den relativen Werth von ∂x allgemein durch $\frac{k\partial x}{x}$, wo k eine Constante bezeichnet, aus. Dies ist folglich die Veränderung des moralischen Werthes, so daß also $\partial y = \frac{k\partial x}{x}$, woraus durch Integration:

$$y = k \log n x + \log n h,$$

wenn wir die willkührliche Constante durch $\log n h$ ausdrücken. Diese Constante müßte durch einen Werth von y, welcher einem gegebenen Werthe von x entspricht, bestimmt werden.

Aus dem in (19.) Bemerkten erhellet, daß man x und y nie $= 0$, auch nie negativ, setzen kann, da jeder Mensch, selbst der Bettler und Schuldner, so lange er sein Leben fristet, ein gewisses Vermögen hat, oder wenigstens als ein solches habend zu betrachten ist.

21. Sey nun a das physische oder absolute (19.) Vermögen einer Person A, mit der Hoffnung, daß dasselbe eine der Veränderungen α, α', α'', α''', ..., welche auch null oder negativ seyn können, erleiden werde, und die Wahrscheinlichkeiten, daß diese Veränderungen statt finden, seyen respective w, w', w'', w''', ..., wo $w + w' + w'' + w''' + \ldots = 1$ zu setzen ist, wie aus der in (17.) wegen des der Reihe eigentlich noch beizufügenden Gliedes beigebrachten Bemerkung, da obige Veränderungen auch $= 0$ seyn können, und aus dem in (8.) am Ende Bewiesenen erhellet.

Das moralische Vermögen des A kann also, da das physische $a + \alpha$, $a + \alpha'$, $a + \alpha''$, ..., werden kann, nach (20.) übergehen in:

$k \log n (a+\alpha) + \log n h$, $k \log n (a+\alpha') + \log n h$, $k \log n (a+\alpha'') + \log n h$, ...,

und daß das moralische Vermögen einen dieser Werthe erhalten werde, dazu sind die Wahrscheinlichkeiten w, w', w'', ... vorhanden.

Digitized by Google

Die Summe

$$\begin{aligned} Y = {} & w\,\{k\log n(a+\alpha) + \log n\,h\} \\ & + w'\,\{k\log n(a+\alpha') + \log n\,h\} \\ & + w''\,\{k\log n(a+\alpha'') + \log n\,h\} \\ & + w'''\,\{k\log n(a+\alpha''') + \log n\,h\} \\ & + \ldots\ldots \\ = {} & kw.\log n(a+\alpha) + kw'.\log n(a+\alpha') + kw''.\log n(a+\alpha'') + \ldots \\ & + (w+w'+w''+w'''+\ldots)\log n\,h \\ = {} & kw.\log n(a+\alpha) + kw'.\log n(a+\alpha') + kw''.\log n(a+\alpha'') + \ldots + \log n\,h \end{aligned}$$

nennt Bernoulli mensura sortis, und Laplace (a. a. O. p. 433.) schlechthin fortune morale. Am schicklichsten scheint uns der Ausdruck: erwartetes moralisches Vermögen, den wir im Folgenden beibehalten wollen, da moralisches Vermögen, ohne Beisatz, nach dem Vorhergehenden eigentlich schon etwas anderes bedeutet. Bezeichnen wir nun das dem physischen Vermögen a, oder dem erwarteten moralischen Vermögen Y, entsprechende erwartete physische Vermögen durch X; so ist nach (20.)

$$Y = k\log n X + \log n\,h\,,$$

und folglich, wenn man beide Ausdrücke von Y einander gleich setzt, nach leichter Reduction;

$$\log n X = w\log n(a+\alpha) + w'\log n(a+\alpha') + w''\log n(a+\alpha'') + \ldots\,,$$
$$X = (a+\alpha)^w.(a+\alpha')^{w'}.(a+\alpha'')^{w''}.(a+\alpha''')^{w'''}\ldots.$$

ein Ausdruck für das dem physischen Vermögen a entsprechende erwartete physische Vermögen. Die Differenz X — a nennt Laplace espérance morale, d. i. moralische Hoffnung, deren Ausdruck also

$$(a+\alpha)^w.(a+\alpha')^{w'}.(a+\alpha'')^{w''}.(a+\alpha''')^{w'''}\ldots. - a$$

ist. Der Ausdruck der mathematischen Hoffnung ist (15.)

$$\alpha w + \alpha' w' + \alpha'' w'' + \alpha''' w''' + \ldots.$$

Die beständige Größe k, welche Laplace beifügt, verschwindet, wie zu erwarten war.

22. Entwickelt man X — a nach Potenzen von α, α', α'', α''', ... und behält bloß die ersten Potenzen dieser Größen bei; so erhält man

$$\begin{aligned} X - a = {} & a^{w+w'+w''+w'''+\ldots} \\ & + a^{w+w'+w''+w'''+\ldots-1}(w\alpha + w'\alpha' + w''\alpha'' + w'''\alpha''' + \ldots) \\ & + \ldots\ldots - a\,. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Aber

$w+w'+w''+w'''+\ldots = 1$, $w+w'+w''+w'''+\ldots - 1 = 0$,

Also

$$x - a = \alpha w + \alpha' w' + \alpha'' w'' + \alpha''' w''' + \ldots,$$
$$+ \ldots\ldots$$

wo alle folgenden Glieder α, α', α'', ... in höhern Dimensionen als die ersten enthalten. Die moralische Hoffnung nähert sich also der mathematischen desto mehr, je kleiner α, α', α'', ... sind, und beide sind einander gleich zu setzen, wenn diese Größen als unendlich klein angenommen werden.

23. Bernoulli bringt noch verschiedene Anwendungen seiner Sätze bei, und Laplace betrachtet dieselben unter allgemeinern Gesichtspunkten. Hier begnügen wir uns mit nachstehenden Bemerkungen.

Aus den obigen Formeln erhellet z. B., daß jedes auch noch so gleiche Spiel doch immer im Allgemeinen mit Nachtheil verknüpft ist. Das physische Vermögen eines jeden von zwei Spielern sey 100 Ducaten, jeder setze 50 Ducaten, und für jeden sey die Wahrscheinlichkeit, zu gewinnen, $= \frac{1}{2}$. In diesem Falle ist $a = 100$, $\alpha = 50$, $\alpha' = -50$, $\alpha'' = \alpha''' = \ldots = 0$, $w = \frac{1}{2}$, $w' = \frac{1}{2}$, $w'' = w''' = \ldots = 0$. Folglich die moralische Hoffnung eines jeden Spielers

$$= (100+50)^{\frac{1}{2}}(100-50)^{\frac{1}{2}} - 100$$
$$= \sqrt{50.150} - 100 = 86{,}60 - 100 = -13{,}4$$

d. h. jeder muß fürchten, 13,4 Ducaten zu verlieren. Laplace zeigt dies in allgemeinen Formeln.

24. Das physische Vermögen eines Kaufmanns sey $= a$. Er erwartet eine gewisse Summe ε über Meer, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Schiff von gleicher Beschaffenheit im Hafen seines Wohnorts einläuft, ist nach den Beobachtungen $= w$. Welches ist die moralische Hoffnung des Kaufmanns?

Die Wahrscheinlichkeit, daß das Schiff nicht im Hafen einläuft, ist $= 1 - w$, und folglich, da in die-

Digitized by Google

sem Falle das physische Vermögen keine Veränderung erleidet, die moralische Hoffnung

$$= (a+\varepsilon)^w \cdot a^{1-w} - a .$$

Das erwartete moralische Vermögen selbst ist

$$= kw\log n(a+\varepsilon) + k(1-w)\log n a + \log n h .$$

Setzt man, ohne der Allgemeinheit zu schaden, das physische Vermögen $a = 1$; so wird die moralische Hoffnung

$$= (1+\varepsilon)^w - 1 ,$$

und das erwartete moralische Vermögen

$$= kw\log n(1+\varepsilon) + \log n h .$$

Assecurirt der Kaufmann das Schiff; so kann er, da die Wahrscheinlichkeit, daß das Schiff untergehen wird, $= 1 - w$ ist, an die Assecuranz-Gesellschaft nur $(1-w)\varepsilon$ bezahlen. Assecurirt er nicht, so ist das erwartete moralische Vermögen, wie wir schon gesehen haben,

$$= kw\log n(1+\varepsilon) + \log n h ;$$

assecurirt er aber, so ist das erwartete moralische Vermögen

$$= k\log n\{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon\} + \log n h$$
$$= k\log n(1+\varepsilon w) + \log n h .$$

Da nun w ein echter Bruch ist, so ist

$$\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon} ,$$

$$\int\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon w} > \int\frac{w\partial\varepsilon}{1+\varepsilon} ,$$

$$\text{d. i. } \log n(1+\varepsilon w) > w\log n(1+\varepsilon) .$$

Folglich ist das erwartete moralische Vermögen des Kaufmanns in dem Falle, wo er assecurirt, größer als in dem Falle, wo er nicht assecurirt, vorausgesetzt, daß er nicht mehr als $(1-w)\varepsilon$ an die Assecuranz-Gesellschaft bezahlt. Er wird also in einem solchen Falle mit Vortheil für sich assecuriren.

Soll der Kaufmann überhaupt $(1-w)\varepsilon + v$ zahlen; so ist sein erwartetes moralisches Vermögen, wenn er assecurirt,

$$= k\log n\{1+\varepsilon-(1-w)\varepsilon-v\} + \log n h$$
$$= k\log n(1-v+\varepsilon w) + \log n h .$$

In dem Falle, wo der Kaufmann weder Vortheil noch

Digitized by Google

Nachtheil aus der Assecuranz zöge, müßte, wie sogleich erhellet,

$$\begin{aligned} kw\log n(1+\varepsilon) + \log n\, h &= k\log n(1-v+\varepsilon w) + \log n\, h, \\ w\log n(1+\varepsilon) &= \log n(1-v+\varepsilon w), \\ 1-v+\varepsilon w &= (1+\varepsilon)^w, \\ v &= 1+\varepsilon w-(1+\varepsilon)^w \end{aligned}$$

seyn, und was der Kaufmann also höchstens an die Assecuranz-Gesellschaft zahlen könnte, wäre

$$\begin{aligned} &= (1-w)\varepsilon + 1 + \varepsilon w - (1+\varepsilon)^w \\ &= 1+\varepsilon-(1+\varepsilon)^w \\ &= (1+\varepsilon)\{1-(1+\varepsilon)^{w-1}\}. \end{aligned}$$

Soll er mehr zahlen, so zieht er moralischen Nachtheil, soll er weniger zahlen, moralischen Vortheil aus der Assecuranz.

Ist z. B. $\varepsilon = 10000$, $w = \frac{19}{20}$, und das Vermögen des Kaufmanns $= a$; so ist das, was er höchstens an die Gesellschaft zahlen kann,

$$\begin{aligned} &= \left\{1+\frac{\varepsilon}{a}-\left(1+\frac{\varepsilon}{a}\right)^w\right\}.a \\ &= a+\varepsilon-(a+\varepsilon)^w.a^{1-w} \\ &= a+10000-(a+10000)^{\frac{19}{20}}.a^{\frac{1}{20}}. \end{aligned}$$

Da der, welcher weniger im Vermögen hat, offenbar mehr Ursach hat, zu assecuriren, so kann man nun auch fragen, wie viel der Kaufmann mindestens im Vermögen haben muß, wenn er die Assecuranz mit Vortheil unterlassen soll, indem die Gesellschaft einen bestimmten Preis, z. B. 800 Thlr., von ihm fordert. Dies giebt die Gleichung:

$$\begin{aligned} a+10000-(a+10000)^{\frac{19}{20}}.a^{\frac{1}{20}} &= 800, \\ \sqrt[20]{(a+10000)^{19}.a} &= a+9200, \\ (a+10000)^{19}.a &= (a+9200)^{20}, \end{aligned}$$

aus welcher Bernoulli nahe $a = 5043$ findet. Hat der Kaufmann mehr im Vermögen, so kann er die Assecuranz unterlassen, hat er weniger, so muß er assecuriren.

Eben so kann man auch fragen, wieviel die Assecuranz-Gesellschaft mindestens im Vermögen haben muß, wofern sie die obige Assecuranz mit 800 Thlr anbieten soll. Sey x das gesuchte Vermögen. Bietet sie die Assecuranz an,

Digitized by Google

so hat sie, wenn das Schiff nicht verunglückt, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{19}{20}$ ist, das Vermögen $x + 800$; verunglückt aber das Schiff, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{20}$ ist, so ist ihr Vermögen $x + 800 - 10000 = x - 9200$. Also ist, wenn die Assecuranz zu Stande kommt, das erwartete moralische Vermögen der Gesellschaft

$$(x + 800)^{\frac{19}{20}} \cdot (x - 9200)^{\frac{1}{20}}.$$

Kommt die Assecuranz nicht zu Stande, so ist das Vermögen $= x$. Setzt man beides gleich; so erhält man die Gleichung

$$(x + 800)^{19} \cdot (x - 9200) = x^{20},$$

woraus Bernoulli x nahe $= 14243$ findet. Dieses Vermögen muß die Gesellschaft mindestens haben, wenn sie die obige Assecuranz mit 800 Thlr. eingehen soll. Hat sie weniger, so ist es Unrecht, sich in diese Speculation einzulassen.

25. Kehren wir nun wieder zu dem Petersburger Problem zurück. Sey a das Vermögen von B, und x das, was er am Anfange des Spiels setzt, so besitzt er, wenn Münz beim ersten Wurf fällt, $a - x + 2$; wenn es beim zweiten fällt, $a - x + 2^2$; wenn es beim dritten fällt, $a - x + 2^3$; und endlich, wenn es beim $n$ten fällt, $a - x + 2^n$. Fällt aber Münz in keinem der n Würfe, wofür die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2^n}$ ist (9.), so besitzt B nur $a - x$. Das erwartete moralische Vermögen des B ist also nach dem Vorhergehenden, da $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, ... $\frac{1}{2^n}$, $\frac{1}{2^n}$ die einzelnen Wahrscheinlichkeiten sind,

$$= \tfrac{1}{2} k \log n (a - x + 2) + \tfrac{1}{2^2} k \log n (a - x + 2^2) + \tfrac{1}{2^3} k \log n (a - x + 2^3) + \ldots$$

$$\ldots + \tfrac{1}{2^n} k \log n (a - x + 2^n) + \tfrac{1}{2^n} k \log n (a - x) + \log n h.$$

Das moralische Vermögen vor dem Spiel ist

$$= k \log n a + \log n h.$$

Sollen sich nun die Umstände des Spielers nicht ändern, so muß Beides einander gleich gesetzt werden, woraus man leicht die Gleichung

Digitized by Google

$$(a-x+2)^{\frac{1}{2}}.(a-x+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\ldots(a-x+2^n)^{\frac{1}{2^n}}.(a-x)^{\frac{1}{2^n}}=a$$

erhält. Setzt man mit Laplace $a-x=a'$, $\frac{1}{a}=\alpha$; so wird

$$(a'+2)^{\frac{1}{2}}.(a'+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\ldots(a'+2^n)^{\frac{1}{2^n}}.a'^{\frac{1}{2^n}}=a,$$

$$\left(1+\frac{2}{a'}\right)^{\frac{1}{2}}.\left(1+\frac{2^2}{a'}\right)^{\frac{1}{2^2}}\ldots\left(1+\frac{2^n}{a'}\right)^{\frac{1}{2^n}}.a'^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}=a.$$

Aber

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}+\frac{1}{2^n}=1,$$

und

$$\frac{a}{a'}=\frac{a'+x}{a'}=1+\frac{x}{a'}=1+\alpha x.$$

Also

$$(1+2.\alpha)^{\frac{1}{2}}.(1+2^2.\alpha)^{\frac{1}{2^2}}\ldots(1+2^n.\alpha)^{\frac{1}{2^n}}=1+\alpha x.$$

Die Factoren auf der linken Seite nehmen immer ab, und nähern sich also der Einheit fortwährend als Gränze; denn, um sich zu überzeugen, daß

$$(1+2^i.\alpha)^{\frac{1}{2^i}}>(1+2^{i+1}.\alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}}$$

ist, erhebe man auf beiden Seiten auf die Potenz 2^{i+1}, wodurch man erhält:

$$(1+2^i.\alpha)^2>1+2^{i+1}.\alpha,$$

$$1+2^{i+1}.\alpha+2^{2i}.\alpha^2>1+2^{i+1}.\alpha,$$

zwei Ausdrücke, deren Ungleichheit sogleich in die Augen fällt. Also werden die Factoren immer kleiner, und nähern sich, da α offenbar immer als positiv anzusehen ist, der Einheit immer mehr und mehr, je größer n ist. Nimmt man also an, daß das Spiel in's Unendliche fortgesetzt werde, so kann man für ein gegebenes α das gesuchte x immer durch Logarithmen ohne große Schwierigkeit berechnen, wenn man nur eine hinlängliche Anzahl von Factoren zu Hülfe nimmt. Für $a'=100$, $\alpha=0{,}01$ findet Laplace $a=107{,}89$, $x=7{,}89$, so daß

Digitized by Google

also Jemand, der nur 107,89 am Anfange des Spiels im Vermögen hat, bloß 7,89 setzen darf. Für $a' = 200$, $\alpha = 0{,}005$ findet Laplace $a = 208{,}78$, $x = 8{,}78$, so daß also B, wenn er am Anfange des Spiels nur 208,78 im Vermögen hat, bloß 8,78 wagen darf.

Dies mag an diesem Orte genug seyn über die Lehre von der moralischen Hoffnung. In der Folge werden wir immer bloß die mathematische Hoffnung berücksichtigen, bei den Beispielen, die wir aus der Berechnung der Wahrscheinlichkeit bei einigen Spielen hernehmen werden. Vorzüglich s. m. über die moralische Hoffnung Laplace's öfters angeführtes Werk a. a. O.

26. Eine Wette kann im Allgemeinen angesehen werden als ein Vertrag zweier Partheien, deren eine das Geschehen einer, die andere das Geschehen einer andern bestimmt möglichen Begebenheit behauptet, und darauf eine gewisse Geldsumme, oder etwas derselben Aequivalentes, die Mise, verpfändet, so daß diejenige Parthei, deren Behauptung zutrifft, die von der andern ausgesetzte Geldsumme erhält. In den meisten Fällen behauptet jedoch die eine Parthei das Geschehen, die andere das Nichtgeschehen ein und derselben Begebenheit, welches wir eine Wette im engern Sinne nennen wollen.

Soll eine Wette rechtmäßig und auf vernünftige Art angestellt seyn, so müssen sich die Misen wie die Wahrscheinlichkeiten derjenigen Ereignisse verhalten, auf welche sie verpfändet werden. Bezeichnen wir also die Misen durch m und m', die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse durch w und w', so muß seyn $m : m' = w : w'$ oder $mw' = m'w$. Da nun die erste Parthei die Wahrscheinlichkeit w, die Mise m', die zweite Parthei dagegen die Wahrscheinlichkeit w' hat, die Mise m zu gewinnen; so kann man auch sagen, daß bei einer rechtmäßigen Wette die mathematischen Hoffnungen der beiden Wettenden einander gleich seyn müssen (14.).

Bei einer Wette im engern Sinne ist immer $w' = 1 - w$, und folglich $m(1-w) = m'w$, also

Digitized by Google

$$m' = \frac{m(1-w)}{w} = m\left(\frac{1}{w} - 1\right),$$

wodurch die Mise der zweiten Parthei gefunden wird, wenn die der ersten festgesetzt worden ist. Bei einer Wette im weitern Sinne ist überhaupt $m' = m \cdot \frac{w'}{w}$. Ist bei einer Wette im engern Sinne die Anzahl der der ersten Parthei günstigen Fälle $= \mu$, die Anzahl der der zweiten günstigen $= \nu$; so ist $w = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, $w' = \frac{\nu}{\mu+\nu}$, und folglich

$$m : m' = w : w' = \mu : \nu,$$

d. h. die Misen müssen sich wie die Mengen der den entsprechenden Ereignissen günstigen Fälle verhalten.

27. Noch haben wir den Sinn einer Regel beim Spiel zu erläutern, welche man die Theilungsregel nennt. Die Sache wird an folgendem Beispiele sich völlig deutlich machen lassen.

Zwei Spieler legen einen Einsatz unter der Bedingung zusammen, daß derselbe dem gehören solle, welcher zuerst drei Parthien gewonnen haben wird. Die Wahrscheinlichkeit eines jeden Spielers, eine Parthie zu gewinnen, sey $= \frac{1}{2}$. Nachdem der erste zwei, der andere eine Parthie gewonnen hat, trennen sich die beiden Spieler. Es fragt sich nun, wie viel einem jeden von dem Einsatze gebühre.

Das Princip, welches man bei Theilungen dieser Art offenbar mit dem meisten Rechte zum Grunde der Theilung anzunehmen pflegt, ist, daß sich die Theile der einzelnen Spieler wie die Wahrscheinlichkeiten verhalten müssen, welche jeder Spieler bei Trennung des Spiels hat, dasselbe zu gewinnen. Seyen nun die beiden Spieler in obiger Aufgabe A und B; so läßt sich die Wahrscheinlichkeit eines jeden bei der Trennung, das Spiel zu gewinnen, in diesem Falle auf folgende Weise bestimmen. Hätten sie noch eine Parthie gespielt, und A dieselbe gewonnen, so würde der ganze Einsatz ihm gehört haben. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ist nach der Voraussetzung $= \frac{1}{2}$. Hätte A diese Parthie nicht gewonnen, so hätte jeder zwei Parthien gewonnen, und die folgende müßte das Spiel

Digitized by Google

entscheiden. Die Wahrscheinlichkeit des A, die vierte Parthie nicht zu gewinnen, ist $= \frac{1}{2}$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, die fünfte zu gewinnen, $= \frac{1}{2}$; also die Wahrscheinlichkeit, die vierte nicht, aber die fünfte, folglich das Spiel, zu gewinnen, $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ (10.). Folglich die ganze Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, indem er dasselbe gewinnt, sowohl, wenn der erste, als auch, wenn der zweite Fall eintritt, $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (8.). Die Wahrscheinlichkeit des B, das Spiel zu gewinnen, ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von der vorhergehenden; folglich $= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. War also der Einsatz $= 64$ Thlr., so erhält A davon $\frac{3}{4}$, d. i. 48 Thlr., B aber nur $\frac{1}{4}$, d. i. 16 Thlr. Eben so verfährt man, wenn mehr als zwei Spieler sind. Die Aufgabe reducirt sich dann auf eine bloße Gesellschaftsrechnung.

D.

38. Um noch ein Beispiel zu dieser Regel zu haben, so setze man, A und B wetten mit einander, daß ersterer mit einem gewöhnlichen Würfel zwei Mal hinter einander ein und dieselbe bestimmte Zahl werfen oder nicht werfen werde; so fragt sich, wenn schon nach dem ersten Wurfe das Spiel geendigt wird, wie viel jedem von der stehenden Summe gebühre. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem gewöhnlichen Würfel ein und dieselbe bestimmte Zahl zwei Mal hinter einander zu werfen, ist $= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ (10.). Dies ist die Wahrscheinlichkeit des A, das Spiel zu gewinnen, und die des B folglich $= \frac{35}{36}$. Ist also m die Mise des A, so ist, wenn die Wette rechtmäßig seyn soll, 35m die Mise des B (26.), und die ganze stehende Summe ist folglich $=$ 36m. Wird nun das Spiel beim ersten Wurfe getrennt, so sind in Bezug auf den ersten Spieler folgende Fälle möglich. Hat er im ersten Wurfe die bestimmte Zahl nicht getroffen, so hat er offenbar das Spiel verloren, und B erhält 36m. Hat aber A im ersten Wurfe die bestimmte Zahl getroffen; so ist seine Wahrscheinlichkeit, daß dies auch im zweiten Wurfe geschehen werde, $= \frac{1}{6}$, und dies ist seine Wahrscheinlichkeit, das Spiel zu gewinnen, bevor noch der zweite Wurf geschieht. Die Wahrscheinlichkeit

Digitized by Google

des B in demselben Zeitpunkte, das Spiel zu gewinnen, ist folglich $= \frac{5}{6}$. Also muß nach der Theilungsregel bei der Trennung des Spiels A von der stehenden Summe $\frac{1}{6}$, d. i. $\frac{36m}{6} = 6m$, und der zweite Spieler $\frac{5}{6}$, d. i. $5.6m = 30m$ erhalten.

Anwendung der vorhergehenden Sätze auf die Auflösung einiger schwereren Aufgaben.

29. Wir beginnen mit einigen allgemeinen Betrachtungen über das Würfelspiel, wobei wir aber den Ausdruck Würfel in einem allgemeinern Sinne, als gewöhnlich geschieht, nehmen werden, indem wir unter einem Würfel mit q Seiten ein gerades qseitiges Prisma mit regulären Polygonen als Grundflächen, welche, damit alle Würfe gleich möglich seyen, nicht mit zu den Seiten des Würfels gerechnet werden, verstehen wollen. Man hat sich nämlich nur einen Körper zu denken, mit welchem q Würfe in Bezug auf eben so viele Seitenflächen desselben völlig gleich möglich sind.

Unter dieser Voraussetzung sey jetzt die Anzahl der Würfe mit n Würfeln, deren jeder q Seiten hat, zu bestimmen, in denen eine bestimmte Anzahl p von Augen geworfen werden können.

Es fällt sogleich in die Augen, daß die gesuchte Größe der Anzahl der Variationen (nicht Combinationen, indem bei jedem einzelnen Wurfe jeder der gegebenen Würfel jede einzelne, in dem ganzen Wurfe enthaltene, Anzahl von Augen werfen kann) zur Summe p für die nte Klasse und die Elementenreihe 1, 2, 3, 4, ... q gleich ist.

Nun ist aber nach dem polynomischen Lehrsatze (s. diesen Artikel. 8.)

$$(\overset{1}{a} + \overset{2}{ax} + \overset{3}{ax^2} + \overset{4}{ax^3} + \ldots + \overset{q}{ax^{q-1}})^n$$
$$= {}^nN + {}^{n+1}Nx + {}^{n+2}Nx^2 + {}^{n+3}Nx^3 + {}^{n+4}Nx^4 + \ldots.$$

für den Zeiger:

Digitized by Google

$$(a, a, a, a, \ldots\ldots a)^{1\ 2\ 3\ 4\ \ q},$$

wo nämlich die Coefficienten der Potenzen von x in der zweiten Reihe die Variationsklassen zur Summe n, n + 1, n + 2, n + 3, ... für obigen Zeiger bezeichnen (s. Variationen gegebener Dinge.). Setzt man

$$a = a = a = a = \ldots\ldots = a = 1;$$

so wird jede einzelne Complexion in diesen Coefficienten (als Product betrachtet) = 1, und die Coefficienten selbst (als Summen der einzelnen Complexionen betrachtet) bestimmen die Anzahl der Variationen in den gegebenen Klassen. Setzen wir nun $p = n + \alpha$, da offenbar p nur $\geq n$ seyn kann; so wird

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1})^n$$
$$= {}^{a}N + {}^{n+1}Nx + {}^{n+2}Nx^2 + \ldots\ldots + {}^{p}Nx^{\alpha} + {}^{p+1}Nx^{\alpha+1} + \ldots$$

für den aus q Gliedern bestehenden Zeiger

$$(1, 1, 1, 1, \ldots\ldots),$$

und die gesuchte Größe ist folglich nach dem Obigen = ${}^{p}N$ für den vorhergehenden Zeiger, d. h. = dem Coefficienten von x^{α} in der Entwickelung von

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1})^n.$$

Zu der Bestimmung dieses Coefficienten gelangt man aber am leichtesten auf folgende Art. Es ist

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{q-1} = \frac{1 - x^q}{1 - x},$$

und folglich, wenn wir in diesem Artikel der Kürze oder vielmehr der Leichtigkeit des Drucks wegen überhaupt Eulers Bezeichnung der Binomialcoefficienten gebrauchen, wonach der nte Binomialcoefficient der mten Potenz durch $\left[\frac{m}{n}\right]$ bezeichnet wird, nach dem binomischen Lehrsatze:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots x^{q-1})^n$$
$$= \left\{1 - \left[\frac{n}{1}\right]x^q + \left[\frac{n}{2}\right]x^{2q} - \left[\frac{n}{3}\right]x^{3q} + \left[\frac{n}{4}\right]x^{4q} - \ldots\right\}$$
$$\times \left\{1 - \left[\frac{-n}{1}\right]x + \left[\frac{-n}{2}\right]x^2 - \left[\frac{-n}{3}\right]x^3 + \left[\frac{-n}{4}\right]x^4 - \ldots\right\}$$

Digitized by Google

$$= \left\{1 - \left[\frac{n}{1}\right]x^q + \left[\frac{n}{2}\right]x^{2q} - \left[\frac{n}{3}\right]x^{3q} + \left[\frac{n}{4}\right]x^{4q} - \ldots\right\}$$

$$\asymp \left\{1 + \left[\frac{n}{1}\right]x + \left[\frac{n+1}{2}\right]x^2 + \left[\frac{n+2}{3}\right]x^3 + \left[\frac{n+3}{4}\right]x^4 + \ldots\right\}.$$

Um nun den Coefficienten von x^α in der Entwickelung dieses Products zu finden, hebe man aus der zweiten Reihe alle Glieder aus, welche die Potenzen

$$x^\alpha,\ x^{\alpha-q},\ x^{\alpha-2q},\ x^{\alpha-3q},\ x^{\alpha-4q},\ \ldots,$$

enthalten, schreibe sie nach der Ordnung unter die Glieder der ersten Reihe, und multiplicire die über einander stehenden Glieder in einander. Dadurch erhält man für das x^α enthaltende Glied:

$$\left[\frac{n+\alpha-1}{\alpha}\right]x^\alpha - \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{n+\alpha-q-1}{\alpha-q}\right]x^\alpha + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+\alpha-2q-1}{\alpha-2q}\right]x^\alpha - \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{n+\alpha-3q-1}{\alpha-3q}\right]x^\alpha + \ldots\ldots\ldots,$$

Aber allgemein, da $n+\alpha = p$ ist:

$$\left[\frac{n+\alpha-\mu q-1}{\alpha-\mu q}\right] = \frac{(n+\alpha-\mu q-1)\ldots.(n+1)n}{1.2.3.4\ldots.(\alpha-\mu q)}$$

$$= \frac{(p-\mu q-1)\ldots(p-\mu q-n+1)(p-\mu q-n)\ldots n}{1.2.3\ldots.(n-1)n(n+1)\ldots(p-\mu q-n)}$$

$$= \frac{(p-\mu q-1)\ldots.(n+1)n(n-1)\ldots(p-\mu q-n+1)}{1.2.3\ldots(p-\mu q-n)(p-\mu q-n+1)\ldots(n-1)}$$

jenachdem nämlich

$$p-\mu q-n \gtrless n$$

ist. Folglich immer

$$\left[\frac{n+\alpha-\mu q-1}{\alpha-\mu q}\right] = \left[\frac{p-\mu q-1}{n-1}\right],$$

und demnach die gesuchte Größe

$$= \left[\frac{p-1}{n-1}\right] - \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{p-q-1}{n-1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{p-2q-1}{n-1}\right] - \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{p-3q-1}{n-1}\right] + \ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

Um zu bestimmen, wann diese Reihe abbricht, überlege man, daß, wie aus dem Obigen unmittelbar folgt, $\alpha - \mu q$ nie negativ werden darf. Würde aber

$$n + \alpha - \mu q - 1 = n - 1 + (\alpha - \mu q)$$

negativ, so müßte, da n offenbar nicht < 1 seyn kann, offenbar auch $\alpha - \mu q$ negativ werden, also darf

$$n + \alpha - \mu q - 1 = p - \mu q - 1$$

nie negativ werden, und die Reihe bricht also ab, wenn dies eintritt.

30. Die Anzahl Würfe, welche sich überhaupt mit n Würfeln, deren jeder q Seiten hat, machen läßt, ist offenbar = der Anzahl der Variationen mit Wiederholungen der nten Klasse für q Elemente, d. i. $= q^n$ (Variationen gegebener Dinge. 3.); folglich die Wahrscheinlichkeit mit n solchen Würfeln p Augen zu werfen,

$$= \frac{1}{q^n}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{p-1}{n-1}\right] - \left[\frac{n}{1}\right]\left[\frac{p-q-1}{n-1}\right] \\ \quad + \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{p-2q-1}{n-1}\right] \\ \quad - \left[\frac{n}{3}\right]\left[\frac{p-3q-1}{n-1}\right] \\ \quad + \ldots\ldots\end{array}\right.$$

oder, für

$$p-1=p',\ p-q-1=p'',\ p-2q-1=p''',\ \ldots:$$

$$= \frac{1}{q^n}\left\{\begin{array}{l}\frac{p'(p'-1)\ldots(p'-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ \quad - \frac{p''(p''-1)\ldots(p''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{n}{1} \\ \quad + \frac{p'''(p'''-1)\ldots(p'''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{1.2} \\ \quad - \frac{p''''(p''''-1)\ldots(p''''-n+2)}{1.2.3\ldots(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \\ \quad + \ldots\ldots\end{array}\right.$$

Die hier entwickelten Formeln hat Maivre in den Miscellan. analyt. p. 196. und in seiner Doctrine of chances auf ähnliche Weise gefunden.

Sucht man z. B. die Wahrscheinlichkeit, mit 4 gewöhnlichen Würfeln 16 zu werfen; so ist $n = 4$, $q = 6$,

Digitized by Google

$p = 16$, $p' = 15$, $p'' = 9$, $p''' = 3$. Also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{15.14.13}{1.2.3} - \frac{9.8.7}{1.2.3}.\frac{4}{1} + \frac{3.2.1}{1.2.3}.\frac{4.3}{1.2}$$

durch $6^4 = 1296$ dividirt, d. i. $= \frac{126}{1296} = 0{,}096\ldots$, d. i. nahe $= \frac{1}{10}$.

Sucht man nach der gefundenen Formel die Mengen der möglichen Arten, mit drei sechsseitigen Würfeln die Zahlen 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 zu werfen, und addirt die gefundenen Zahlen, so findet man 108. Also ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei sechsseitigen Würfeln eine der obigen Zahlen zu werfen, $= \frac{108}{6^3} = \frac{108}{216}$ (8.) $= \frac{1}{2}$. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, d. h. mehr als 10 zu werfen, ist $= 1 - \frac{1}{2}$, d. i. auch $= \frac{1}{2}$. Es ist also gleiche Wahrscheinlichkeit vorhanden, mit drei Würfeln weniger als 11, und mehr als 10, zu werfen. Dieser Satz, sagt Lacroix (Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung. A. d. Franz. v. Unger. Erfurt. 1818. S. 106.) ist die Grundlage des unter dem Namen Knöchel n (passe dix) bekannten Spiels.

In einem Programm: Ueber eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Brandenburg. 1829. habe ich eine schwerere Aufgabe über das Würfelspiel, welche auch Trembley im 10. Hefte des Archivs der Mathematik von Hindenburg. S. 123. auf eine sehr indirecte Art mittelst der wiederkehrenden Reihen behandelt hatte, auf einem völlig directen Wege aufgelöst, und mit der Combinationslehre in unmittelbare Verbindung gesetzt.

31. Bezeichnen wir die Menge der möglichen Arten, mit n Würfeln von q Seiten p Augen zu werfen, überhaupt durch (p), die Menge der möglichen Arten dagegen, mit $n+1$ Würfeln von q Seiten p Augen zu werfen, durch $(p)'$; so folgt aus dem Vorhergehenden unmittelbar, daß

$$x^n(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{q-1})^n$$
$$= (0) + (1).x + (2).x^2 + (3).x^3 + \ldots$$
$$\ldots + (q-1).x^{q-1} + (q).x^q + (q+1).x^{q+1} + \ldots$$

und folglich

Digitized by Google

$$x^n(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots x^{q-1})^{n+1}$$

$$\begin{aligned}
&= (0)\\
&+ |(1) + (0)|x\\
&+ |(2) + (1) + (0)|x^2\\
&+ |(3) + (2) + (1) + (0)|x^3\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\\
&+ |(q-1) + (q-2) + (q-3) + (q-4) + \ldots + (0)|x^{q-1}\\
&+ |(q) + (q-1) + (q-2) + (q-3) + \ldots + (1)|x^q\\
&+ |(q+1) + (q) + (q-1) + (q-2) + \ldots + (2)|x^{q+1}\\
&+ |(q+2) + (q+1) + (q) + (q-1) + \ldots + (3)|x^{q+2}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Also

$$x^{n+1}(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{q-1})^{n+1}$$

$$= (0)' + (1)'.x + (2)'.x^2 + (3)'.x^3 + \ldots$$

$$\ldots + (q-1)'.x^{q-1} + (q)'.x^q + (q+1)'.x^{q+1} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
&= (0).x\\
&+ |(1) + (0)|x^2\\
&+ |(2) + (1) + (0)|x^3\\
&+ |(3) + (2) + (1) + (0)|x^4\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\\
&+ |(q-1) + (q-2) + (q-3) + (q-4) + \ldots + (0)|x^q\\
&+ |(q) + (q-1) + (q-2) + (q-3) + \ldots + (1)|x^{q+1}\\
&+ |(q+1) + (q) + (q-1) + (q-2) + \ldots + (2)|x^{q+2}\\
&+ |(q+2) + (q+1) + (q) + (q-1) + \ldots + (3)|x^{q+3}\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(0)' &= 0\\
(1)' &= (0)\\
(2)' &= (0) + (1)\\
(3)' &= (0) + (1) + (2)\\
(4)' &= (0) + (1) + (2) + (3)\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\\
(q)' &= (0) + (1) + (2) + (3) + \ldots + (q-1)\\
(q+1)' &= (1) + (2) + (3) + (4) + \ldots + (q)\\
(q+2)' &= (2) + (3) + (4) + (5) + \ldots + (q+1)\\
(q+3)' &= (3) + (4) + (5) + (6) + \ldots + (q+2)
\end{aligned}$$

&c. &c.

Unter der Voraussetzung, daß man immer

$$(-1) = (-2) = (-3) = (-4) = \ldots = 0$$

setzt, kann man diese Relationen durch folgende allgemeine Formel darstellen:

$$(p)' = (p-q) + (p-q+1) + (p-q+2) + \ldots + (p-2) + (p-1)$$

Digitized by Google

mittelst welcher die Construction einer Tafel der durch (p) bezeichneten Größen für irgend einen bestimmten Werth von q und verschiedene Werthe von n keiner Schwierigkeit unterworfen ist. Nachfolgende Tafel ist für die gemeinen Würfel, wo $q = 6$ ist, berechnet, und erstreckt sich von $n = 1$ bis $n = 8$, und $p = 0$ bis $p = 36$. Es würde mit Hülfe obiger recurrirenden Formel leicht seyn, sie weiter fortzusetzen. Da $q = 6$; so wird diese Tafel nach

$$(p)' = (p-6) + (p-5) + (p-4) + (p-3) + (p-2) + (p-1)$$

berechnet, und man findet also jedes Glied einer Vertikalreihe, wenn die sechs vorhergehenden Glieder der vorhergehenden Vertikalreihe zu einander addirt werden. Mit Hülfe dieser Tabelle lassen sich die meisten Aufgaben über das Würfelspiel leicht auflösen. Sie ist entlehnt aus Eulers Abhandlung de partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas. Nov. Comm. Petrop. T. XIV. 1759., und findet sich auch in der deutschen Uebersetzung der Introductio in Analysin infinitorum. Thl. I. S. 620. Der Anfang einer solchen Tabelle findet sich auch schon in Jacobi Bernoulli Ars conjectandi, Basileae. 1713. p. 24. Mehr Aufgaben über das Würfelspiel findet man in eben diesem Werke, welchem Huygens Tractatus de ratiociniis in ludo aleae beigefügt ist (p. 1—71.), mit Anmerkungen von Bernoulli.

Digitized by Google

Tafel,

welche anzeigt, wie oft die Zahl p mit n gemeinen Würfeln geworfen werden kann.

p	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

Digitized by Google

32. Mittelst vorstehender Tafel ist die Anordnung eines Würfelspiels leicht. Im Allgemeinen ist zu bemerken, daß, wenn das Spiel für den Spielhalter vortheilhaft seyn soll, die höchsten Gewinne auf die am seltensten, die Nieten auf die am häufigsten vorkommenden Würfe zu setzen sind, und daß die Gewinne im umgekehrten Verhältnisse der Zahlen stehen müssen, welche anzeigen, wie oft die entsprechenden Würfe vorkommen können, oder daß man diesem Verhältnisse wenigstens möglichst nahe zu kommen suchen muß. Bei einem für den Spieler vortheilhaften Spiele ist auf umgekehrte Art zu verfahren. Man findet dies weiter ausgeführt in E. G. Fischers Rechenbuche für das gemeine Leben. Berlin. 1799. Th. 1. S. 292. ff. Daraus entlehne ich folgende kleine Tabelle für ein Spiel mit drei Würfeln, wo das Spiel A. für den Spielhalter, das Spiel B. für der Spieler vortheilhaft eingerichtet ist, obgleich beim ersten mehr und größere Gewinne vorkommen.

Spiel A.			Spiel B.		
Summe der Augen.	Anzahl der Würfe nach (31.)	Gewinn.	Summe der Augen.	Anzahl der Würfe nach (31.)	Gewinn.
3	1	10	3	1	0
4	3	4	4	3	0
5	6	3	5	6	0
6	10	2	6	10	0
7	15	1	7	15	0
8	21	0	8	21	0
9	25	0	9	25	2
10	27	0	10	27	3
11	27	0	11	27	3
12	25	0	12	25	2
13	21	0	13	21	0
14	15	1	14	15	0
15	10	2	15	10	0
16	6	3	16	6	0
17	3	4	17	3	0
18	1	10	18	1	0
	216			216	

Digitized by Google

Nimmt man an, daß in 216 Würfen alle 216 möglichen Würfe auch wirklich vorkommen, welches offenbar mit desto mehr Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, je öfter und je länger gespielt wird, und setzt jeder Spieler z. B. 1 gr.; so beträgt beim ersten Spiele die ganze Einnahme des Spielhalters in 216 Würfen 216 gr., seine Ausgabe 150 gr., sein Gewinn also 66 gr., d. i., mit 216 verglichen, etwa $3\frac{1}{4}$ pC. Im zweiten Spiele ist die Einnahme des Spielhalters bei 216 Würfen 216 gr., seine Ausgabe 262 gr., also 46 gr., d. i., mit 216 verglichen, beinahe $21\frac{3}{10}$ pC. Verlust.

33. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen über das Würfelspiel wählen wir, um die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei einem zusammengesetztern Spiele zu zeigen, das Pharao, gewöhnlich bloß Pharo genannt. Es wird nöthig seyn, die Hauptregeln dieses Spiels kurz aus einander zu setzen.

1) Der Banquier hält das ganze wohlgemischte Spiel von 52 Karten verkehrt in der Hand.

2) Er zieht hierauf alle Karten nach der Reihe von dem Spiele ab, und legt sie aufgedeckt abwechselnd rechts und links auf den Tisch, indem er auf der rechten Seite anfängt.

3) Je zwei abgezogene Karten heißen eine Taille.

4) Sowohl vor Anfang des Spiels als auch nach jeder Taille hat jeder Spielende das Recht, auf eine oder einige bestimmte Karten eine namhafte Summe zu setzen.

5) Der Banquier gewinnt die Mise des Spielers, wenn die von demselben besetzte Karte beim Abziehen der Karten auf die rechte Seite, also, da auf dieser Seite angefangen wird, in einer ungeraden Zahl, fällt.

6) Dagegen muß der Banquier das Aequivalent der Mise an den Spieler bezahlen, wenn die besetzte Karte auf die linke Seite, also in einer geraden Zahl, fällt.

7) Fällt in einer Taille die besetzte Karte, z. B. der König oder der Bube, zweimal; so gewinnt der Banquier die Hälfte der Mise.

8) Die letzte Karte ist weder dem Banquier, noch dem

Digitized by Google

Spieler, zum Vortheil, und wird gar nicht gerechnet, so daß also, wenn die vorletzte Karte die des Spielers ist, der Banquier immer das Ganze gewinnt, sollte auch die letzte Karte wieder dieselbe seyn.

34. Man übersieht leicht, daß bei diesem Spiel der Vortheil des Banquiers bloß in den beiden letzten Bedingungen besteht, indem sonst für den Banquier und den Spieler die Bedingungen des Spiels völlig gleich sind. Bleibt das Spiel unentschieden, wenn auf beide Seiten die Karte des Spielers fällt, und wird auch die letzte Bedingung aufgehoben; so läßt sich leicht zeigen, daß dann der Banquier und der Spieler in gleich vielen Fällen gewinnen. Der Banquier habe $p+q$ Karten in Händen, und unter diesen komme die Karte des Spielers qmal vor; so wird die Anzahl aller möglichen Lagen dieser Karten unter einander, da die Karten des Spielers sowohl, als auch die Karten des Banquiers als unter einander identisch zu betrachten sind, indem es offenbar bloß auf die gegenseitige Lage der Karten des Spielers und des Banquiers ankommt, durch die Permutationszahl für $p+q$ Elemente, unter denen p einander gleiche, und q andere einander gleiche Elemente vorkommen ausgedrückt, so daß also (Versetzungen. 4.) diese Zahl

$$= \frac{1.2.3.4.5 \ldots (p+q)}{1.2.3 \ldots p.1.2.3 \ldots q}$$

ist. Denkt man sich, indem man die Karte des Spielers durch a, jede andere Karte durch b, bezeichnet, diese Permutationen wirklich aufgestellt; so ist klar, daß a in jeder Vertikalreihe so oft vorkommt, als die übrigen Elemente (ohne das eine a) sich unter einander permutiren lassen, d. i.

$$\frac{1.2.3.4.5 \ldots (p+q-1)}{1.2.3 \ldots p.1.2.3 \ldots (q-1)} \text{ mal},$$

so daß also a in jeder Vertikalreihe, also auch in den geraden und ungeraden Stellen, gleich oft vorkommt, und folglich offenbar der Banquier und der Spieler in gleich vielen Fällen gewinnen oder verlieren. Hat der Banquier

Digitized by Google

noch 6 Karten in Händen, unter denen die Karte des Spielers drei Mal vorkommt; so sind die möglichen Lagen der Karten:

a a a b b b
a a b a b b
a a b b a b
a a b b b a
a b a a b b
a b a b a b
a b a b b a
a b b a a b
a b b a b a
a b b b a a
b a a a b b
b a a b a b
b a a b b a
b a b a a b
b a b a b a
b a b b a a
b b a a a b
b b a a b a
b b a b a a
b b b a a a

Fälle, wo der Banquier gewinnt:

a a a b b b
a a b b a b
a b a a b b
a b a b a b
a b a b b a
a b b a a b
a b b a b a
a b b b a a
b b a a a b
b b a a b a
b b a b a a

Fälle, wo der Spieler gewinnt:

a a b a b b
a a b b b a
b a a a b b
b a a b a b
b a a b b a
b a b a a b
b a b a b a
b a b b a a
b b a a a b
b b a a b a
b b b a a a

Man vergesse hierbei nicht, daß Fälle wie aa oder bb das Spiel unentschieden lassen, wie oben angenommen worden ist. In gewissen Fällen kann unter dieser Voraussetzung freilich das Spiel gar nicht entschieden werden. Hätte z. B. der Banquier die Karten aabbbb in Händen; so wären alle möglichen Fälle:

Digitized by Google

a a b b b b
a b a b b b
a b b a b b
a b b b a b
a b b b b a
b a a b b b
b a b a b b
b a b b a b
b a b b b a
b b a a b b
b b a b a b
b b a b b a
b b b a a b
b b b a b a
b b b b a a

Fälle, wo der Banquier gewinnt:	Fälle, wo der Spieler gewinnt:
a b a b b b	b a a b b b
a b b a b b	b a b a b b
a b b b a b	b a b b a b
a b b b b a	b a b b b a
b b a b a b	b b b a a b
b b a b b a	b b b a a b

In folgenden Fällen würde das Spiel unentschieden bleiben:

a a b b b b
b b a a b b
b b b b a a

da nämlich angenommen worden ist, daß weder aa, noch bb, das Spiel entscheide. Die Anzahl der Fälle, wo der Banquier oder der Spieler gewinnen, ist aber immer dieselbe.

35. Will man nun, unter Voraussetzung der in (33.) aufgestellten Regeln des Spiels, den Vortheil des Banquiers beim Pharao bestimmen; so muß man, weil derselbe zunächst bloß davon abhängt, daß in einer Taille zwei Blätter des Spielers fallen, die Wahrscheinlichkeit suchen, daß dies, ohne daß in irgend einer der vorhergehenden Taillen ein Blatt des Spielers fällt, wodurch entweder diesem oder dem Banquier ein besonderer Vortheil erwächst, in irgend einer Taille der Fall seyn werde. Der Banquier habe noch p Karten in Händen, unter denen die Karte des Spielers qmal vorkommt.

α) Die Wahrscheinlichkeit, daß eine Karte des Spielers in der ersten Taille zuerst gezogen werde, ist $= \frac{q}{p}$.

Digitized by Google

β) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß kein Blatt des Spielers in der ersten Taille zuerst gezogen wird,

$$= 1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p}.$$

γ) Ist im ersten Zuge die Karte des Spielers wirklich gezogen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dies auch im zweiten Zuge geschehe $= \frac{q-1}{p-1}$, und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille zwei Karten des Spielers gezogen werden, nach (α) $= \frac{q(q-1)}{p(p-1)}$ (9.), die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des ersten dem Banquier günstigen Falls.

δ) Ist beim ersten Zuge die Karte des Spielers nicht gezogen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dies beim zweiten Zuge geschehe, $= \frac{q}{p-1}$, und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= 1 - \frac{q}{p-1} = \frac{p-q-1}{p-1}$.

ε) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille kein Blatt des Spielers falle, nach (β) und (δ)

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)} \quad (9.).$$

ζ) Ist nun in der ersten Taille kein Blatt des Spielers gefallen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der zweiten Taille zwei seiner Blätter fallen, nach (γ), wenn man $p-2$ für p setzt, $= \frac{q(q-1)}{(p-2)(p-3)}$.

η) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der ersten Taille kein Blatt, in der zweiten zwei Blätter des Spielers fallen, nach (ε) und (ζ)

$$= \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (9.).$$

ϑ) Die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn in der ersten Taille kein Blatt des Spielers gefallen, auch in der zweiten keines fällt, ist nach (ε), wenn man $p-2$ für p setzt, $= \frac{(p-q-2)(p-q-3)}{(p-2)(p-3)}$.

ι) Also die Wahrscheinlichkeit, daß weder in der ersten,

Digitized by Google

noch in der zweiten Taille ein Blatt des Spielers fällt, nach (ε) und (ϑ)

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (9.).$$

ϰ) Ist nun weder in der ersten, noch in der zweiten Taille ein Blatt des Spielers gefallen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der dritten zwei fallen, nach (γ), wenn man $p-4$ für p setzt, $= \frac{q(q-1)}{(p-4)(p-5)}$.

λ) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß weder in der ersten, noch in der zweiten Taille ein Blatt des Spielers, daß aber in der dritten zwei fallen, nach (ι) und (ϰ)

$$= \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)(p-q-2)(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)}.$$

μ) Die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn in der ersten und zweiten Taille kein Blatt des Spielers gefallen, auch in der dritten keins fällt, ist nach (ε), wenn man $p-4$ für p setzt, $= \frac{(p-q-4)(p-q-5)}{(p-4)(p-5)}$.

ν) Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in den drei ersten Taillen kein Blatt des Spielers fällt, nach (ι) und (μ) $= \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)\ldots(p-q-5)}{p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-5)}$.

ο) Ist in den drei ersten Taillen kein Blatt des Spielers gefallen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß in der vierten zwei fallen, nach (γ), wenn man $p-6$ für p setzt,

$$= \frac{q(q-1)}{(p-6)(p-7)}.$$

π) Also die Wahrscheinlichkeit, daß in den drei ersten Taillen kein Blatt des Spielers, daß aber in der vierten zwei fallen, nach (ν) und (ο)

$$= \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-5)}{p(p-1)(p-2)(p-3)\ldots(p-7)}.$$

ρ) Es erhellet, wie man auf diese Art weiter gehen kann, und nach (8.) ist folglich die Wahrscheinlichkeit, daß in der 1ten, oder 2ten, oder 3ten, oder 4ten, u. s. f. Taille zwei Blätter des Spielers fallen, ohne daß in den vorhergehenden Taillen eines fällt,

Digitized by Google

$$= \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \quad (\gamma)$$
$$+ \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} \quad (\eta)$$
$$+ \frac{q(q-1)(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)(p-5)} \quad (\lambda)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \frac{q(q-1)}{p(p-1)}\Big\{1 + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-7)} + \ldots\ldots\ldots\Big\}$$

36. Das allgemeine Glied dieser Reihe ist

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-2r+3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-2r+1)},$$

und es entsteht nun zunächst die Frage, wie weit obige Reihe in jedem Falle fortzusetzen ist.

Ist zuerst q gerade; so ist der größte Werth von r

$$= \frac{p-q}{2} + 1,$$

denn dann ist $r-1 = \frac{p-q}{2}$, und in den $r-1$ ersten Taillen sind $2(r-1) = p-q$ Blätter aufgelegt, so daß also noch $p-(p-q) = q$ Blätter bleiben. Da in den $r-1$ ersten Taillen kein Blatt des Spielers fiel, so sind dies alle Blätter desselben, und der Banquier muß folglich in der rten Taille nothwendig gewinnen, da nun 2 Blätter des Spielers fallen müssen, wodurch das Spiel beendigt wird.

Ist q ungerade, so ist der größte Werth von r

$$= \frac{p-q+1}{2},$$

denn dann ist $r-1 = \frac{p-q-1}{2}$, und in den $r-1$ ersten Taillen sind also $2(r-1) = p-q-1$ Blätter aufgelegt, so daß also noch $p-(p-q-1) = q+1$ Blätter bleiben, und sich folglich das Spiel offenbar wieder endigt, indem in der rten Taille entweder das noch vorhandene Blatt des Banquiers und ein Blatt des Spielers,

oder zwei Blätter des Spielers fallen müssen, also einer von beiden Theilen gewinnt.

Für ein gerades q ist das $(r+1)$te Glied

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots[p-q-(p-q+4)+3]}{(p-2)(p-3)\ldots[p-(p-q+4)+1]}$$
$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots.o.(-1)}{(p-2)(p-3)\ldots.(q-2)(q-3)},$$

und für ein ungerades q

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots[p-q-(p-q+3)+3]}{(p-2)(p-3)\ldots[p-(p-q+3)+1]}$$
$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots.1.0}{(p-2)(p-3)\ldots(q-1)(q-2)},$$

also, wenn $q > 2$, in beiden Fällen $= o$, so daß also für $q > 2$ die Reihe so weit fortzusetzen ist, bis sie abbricht.

Für $q = 2$ ist der größte Werth von r nach dem Obigen $= \frac{p-2}{2} + 1 = \frac{1}{2}p$, $2r = p$. Folglich die $(r+1)$te Taille unmöglich, eben so, wie für $q = 1$, da auch in diesem Falle der größte Werth von $r = \frac{p-1+1}{2} = \frac{1}{2}p$, $2r = p$. Die Unmöglichkeit der $(r+1)$ten Taille in diesen Fällen wird dadurch angezeigt, daß man für das $(r+1)$te Glied den Werth $\frac{0}{0}$ erhält. Die Reihe ist also so weit fortzusetzen, bis ein Glied $= o$ oder $= \frac{0}{0}$ wird.

37. Für $q > 2$ bleiben bei der rten Taille, mit welcher das Spiel endigt, q oder $q+1$ Karten übrig, und die Karten werden also in diesem Falle nie erschöpft, so daß also in demselben auf (33. No. 8.) keine Rücksicht zu nehmen ist. Setzen wir daher die Mise des Spielers $= 1$, so gewinnt der Banquier in den hierher gehörenden ihm günstigen Fällen $\frac{1}{2}$, so daß also für $q > 2$ seine mathematische Hoffnung

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{q(q-1)}{p(p-1)} \Big\{ 1 + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-3)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots(p-q-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-7)} + \ldots\ldots\ldots \Big\}$$

die Reihe so weit fortgesetzt, bis ein Glied $= o$ wird.

Digitized by Google

38. Für $q = 2$ muß man die Reihe so weit fortsetzen, bis ein Glied $= \frac{2}{3}$ wird. Dies giebt die mathematische Hoffnung des Banquiers

$$= \tfrac{1}{2} \cdot \frac{2.1}{p(p-1)} \left\{ 1 + \frac{(p-2)(p-3)}{(p-2)(p-3)} + \frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)}{(p-2)(p-3)\ldots(p-5)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(p-2)(p-3)\ldots(p-(p-1'))}{(p-2)(p-3)\ldots(p-(p-1))} \right\}$$

Da nun $p + 1 = 2 \cdot \frac{p}{2} - 1$, die $\left(\frac{p}{2}\right)^{te}$ ungerade Zahl, und 3 die zweite ist; so ist die Anzahl der Glieder dieser Reihe $= \frac{p}{2}$; also die mathematische Hoffnung des Banquiers $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2.1}{p(p-1)} \cdot \frac{p}{2} = \frac{1}{2(p-1)}$. Es ist aber in diesem Falle die mathematische Hoffnung wegen der Spielregel No. 8. größer, weil in diesem Falle mit der letzten $r^{ten} = \left(\frac{p}{2}\right)^{ten}$ Taille die Karten erschöpft werden, und die beiden Blätter des Spielers in die letzte Taille fallen können, wo der Banquier nicht $\frac{1}{2}$, sondern 1 gewinnt. Die Probabilität, daß die beiden Blätter des Spielers auf die $r^{te} = \left(\frac{p}{2}\right)^{te}$ Taille fallen, ist nach (35.)

$$= \frac{2.1.(p-2)(p-3)\ldots(p-2-p+3)}{p(p-1)(p-2)\ldots(p-p+1)}$$
$$= \frac{2.1.(p-2)\ldots 1}{p(p-1)(p-2)\ldots 1} = \frac{2.1}{p(p-1)}.$$

Die mathematische Hoffnung des Banquiers, 1 zu gewinnen, ist also $= 1 \cdot \frac{2.1}{p(p-1)}$. Die Hälfte hiervon ist aber schon in der vorigen Formel $\frac{1}{2(p-1)}$ begriffen; also ist die mathematische Hoffnung des Banquiers, wenn $q = 2$, überhaupt doch nur

$$= \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{p(p-1)} = \frac{p+2}{2p(p-1)}.$$

39. Ist endlich $q = 1$; so können nie zwei Blätter des Spielers in einer Taille fallen, und die mathematische Hoffnung des Banquiers reducirt sich also darauf, daß das eine Blatt des Spielers, welches in dem Spiele vorhanden, in die erste Ziehung der letzten Taille fällt. Da bei der ersten Ziehung der letzten Taille offenbar jedes Blatt

Digitized by Google

gezogen werden kann, die Anzahl aller Fälle also $= p$, die der günstigen $= 1$ ist; so ist die Wahrscheinlichkeit, daß Obiges geschehe, $= \frac{1}{p}$, und, weil der Banquier in diesem Falle die ganze Mise des Spielers gewinnt, seine mathematische Hoffnung $= 1 \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$.

40. Die gefundene Reihe für $q > 2$ läßt sich auf verschiedene Arten transformiren. Ist q eine gerade Zahl; so ist das letzte Glied

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1}{(p-2)(p-3)\ldots q(q-1)} \quad (36.).$$

Folglich wenn man die Reihe umgekehrt schreibt, die Erwartung des Banquiers, die wir durch S bezeichnen wollen;

$$S = \tfrac{1}{2}.\frac{q(q-1)}{p(p-1)}\left\{\begin{array}{l}\frac{(p-q)(p-q-1)..3.2.1}{(p-2)(p-3)..q(q-1)} \\ \quad + \frac{(p-q)(p-q-1)..4.3}{(p-2)(p-3)..(q+1)} \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-2)(p-3)} + 1\end{array}\right\}$$

$$= \frac{1..(p-q)}{2(q+1)(q+2)..p}\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{q(q-1)}{1.2} \\ \quad + \frac{(q+2)(q+1)q(q-1)}{1.2.3.4} \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad + \frac{(p-4)(p-5)..q(q-1)}{1.2.3..(p-q-2)} \\ \quad + \frac{(p-2)(p-3)..q(q-1)}{1.2.3..(p-q)}\end{array}\right\}$$

Ist q ungerade; so ist das letzte Glied

$$= \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2}{(p-2)(p-3)\ldots(q+1)q},$$

und man erhält auf ähnliche Art wie vorher

$$s = \frac{(q-1).1.2.3..(p-q)}{2.(q+1)(q+2)..p}\left\{\begin{array}{l}1 + \frac{(q+1)q}{1.2.3} \\ \quad + \frac{(q+3)(q+2)\ldots q}{1.2.3.4.5} \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \quad + \frac{(p-4)(p-5)\ldots q}{1.2.3..(p-q-2)} \\ \quad + \frac{(p-2)(p-3)\ldots q}{1.2.3..(p-q)}\end{array}\right\}$$

Digitized by Google

41. Aus der zuerst gefundenen Reihe folgt auch leicht

$$s = \frac{q}{2p}\left\{\frac{q-1}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)(q-1)}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)..(p-q-3)(q-1)}{(p-1)(p-2)...(p-5)} + \frac{(p-q)..(p-q-5)(q-1)}{(p-1)(p-2)..(p-7)} + ...\right\}$$

Aber

$$\frac{q-1}{p-1} = 1 - \frac{p-q}{p-1},$$

$$\frac{q-1}{p-3} = 1 - \frac{p-q-2}{p-3},$$

$$\frac{q-1}{p-5} = 1 - \frac{p-q-4}{p-5},$$

$$\frac{q-1}{p-7} = 1 - \frac{p-q-6}{p-7},$$

&c. &c.

Also auch

$$s = \frac{q}{2p}\left\{1 - \frac{p-q}{p-1} + \frac{(p-q)(p-q-1)}{(p-1)(p-2)} - \frac{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)}{(p-1)(p-2)(p-3)} + \frac{(p-q)(p-q-1)..(p-q-3)}{(p-1)(p-2)..(p-4)} - \frac{(p-q)(p-q-1)..(p-q-4)}{(p-1)(p-2)..(p-5)} + ...\right\}$$

Ist q gerade, so hat die ursprüngliche Reihe $\frac{p-q}{2} + 1$, die transformirte also $p - q + 2$ Glieder. Das letzte Glied ist aber

$$\frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1.(q-1)}{(p-1)(p-2)\ldots(q-1)} = \frac{(p-q)(p-q-1)\ldots 3.2.1}{(p-1)(p-2)\ldots q},$$

welches nicht mehr in zwei Glieder zerlegt werden kann. Also hat die transformirte Reihe nur $p - q + 1$ Glieder, eben so, wie in dem Falle, wenn q ungerade, wo die Gliederzahl der transformirten Reihe wirklich $= 2.\frac{p-q+1}{2}$ $= p - q + 1$ ist.

Digitized by Google

42. Nach dem Artikel Umformung der Reihen (22.) ist also

$$S = \frac{1}{2}\left\{\frac{q}{p} + \frac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{p(p-1)} + \frac{1}{4}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{p(p-1)(p-2)} + \frac{1}{8}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{q-1}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 1}{(p-1)\ldots(p-q+1)}[1+(-1)^{p-q}]\right\}$$

wenn man das dortige S′ mit $\frac{q}{2p}$ multiplicirt.

43. Endlich erhält man auch nach Umformung der Reihen (23.)

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{q}{p-q+1} - \frac{1}{8}\cdot\frac{q(q-1)}{(p-q+1)(p-q+2)} + \frac{1}{16}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)} \ldots\ldots\ldots + (-\tfrac{1}{2})^q\cdot\frac{q(q-1)\ldots 2}{(p-q+1)\ldots(p-1)},$$

da beim Pharao immer p gerade, $p-2q+1$ ungerade, also das dortige $1+(-1)^{p-2q+1} = 1-1 = 0$ ist, wodurch das dortige letzte Glied verschwindet.

Die hier entwickelten Reihen haben Montmort, Johann und Nicolas Bernoulli gefunden. M. s. Analyse sur les jeux de hazard. éd. 2. p. 77. p. 304. p. 287. p. 98. p. 299. Noch eine Formel giebt Euler in den Mém. de Berlin. 1764. p. 163. M. s. über diesen Gegenstand auch ein Programm von Mollweide: Multiplex et continuata serierum transformatio etc. Lips. 1820., wo die Formel für den Vortheil des Banquiers beim Pharao als Beispiel einer Umformung einer Reihe gebraucht ist.

Aus (38. 39.) und der vorhergehenden allgemeinen Formel erhält man in den vier Fällen, wo $q = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$ ist, leicht den Vortheil des Banquier respective

$$= \frac{1}{p}, = \frac{p+2}{2p(p-1)}, = \frac{3}{4(p-1)}, = \frac{2p-5}{2(p-1)(p-3)}.$$

Digitized by Google

Diese vier speciellen Formeln giebt auch Moivre in der Doctrine of Chances. London. 1718. p. 41—43.

44. Montmort hat nach diesen speciellen Formeln zwei Tabellen für den Vortheil des Banquier beim Pharao berechnet, welche ich hier mittheile. Sie werden keiner weitern Erklärung bedürfen. Die Tabelle B. giebt bloß Gränzen an, die aber in kleinern Brüchen ausgedrückt sind, als die Werthe in der Tabelle A. Die Ansicht dieser Tabellen lehrt augenblicklich, daß der Vortheil des Banquiers am kleinsten, der des Spielers also am größten ist, wenn $q = 2$ oder $q = 3$, und p nahe $= 52$ ist. Daraus ergeben sich folgende zwei Regeln für den Spieler:

a) Er muß nur in den ersten Taillen eine Karte besetzen, und desto weniger, je mehr Taillen schon gezogen sind.

b) Die Karten sind für ihn die schlechtesten, welche entweder schon drei Mal, oder noch gar nicht heraus sind. Die besten sind diejenigen, welche zwei Mal heraus sind, und eine solche Karte muß also der Spieler, so viel möglich, sogleich nach einer der ersten Taillen besetzen, wenn er mit dem größten Vortheile spielen will. Der Banquier wird dann den geringsten Vortheil haben. Die Beobachtung dieser Regeln ist allen Spielern zu empfehlen; aber immer wird doch der Banquier im Vortheil seyn.

In der Schrift: Exercitationes quaedam mathematicae. Venetiis. 1724. 4. hat Daniel Bernoulli bei Gelegenheit eines Streites mit Rizetti welcher Montmorts und Joh. Bernoulli's Formeln für den Vortheil des Banquiers für falsch hielt, dieselben kurz entwickelt, und ebenfalls eine Tabelle beigefügt.

Digitized by Google

42. Nach dem Artikel Umformung der Reihen (22.) ist also

$$S = \tfrac{1}{2}\Big\{\frac{q}{p} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{p(p-1)} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{p(p-1)(p-2)} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{p(p-1)(p-2)(p-3)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{q-1}}\cdot\frac{q(q-1)\ldots 1}{(p-1)\ldots(p-q+1)}[1+(-1)^{p-q}]\Big\}$$

wenn man das dortige S' mit $\frac{q}{2p}$ multiplicirt.

43. Endlich erhält man auch nach Umformung der Reihen (23.)

$$S = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q}{p-q+1} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{q(q-1)}{(p-q+1)(p-q+2)} + \tfrac{1}{2^2}\cdot\frac{q(q-1)(q-2)}{(p-q+1)(p-q+2)(p-q+3)} \ldots\ldots\ldots + (-\tfrac{1}{2})^q\cdot\frac{q(q-1)\ldots 2}{(p-q+1)\ldots(p-1)},$$

da beim Pharao immer p gerade, $p-2q+1$ ungerade, also das dortige $1+(-1)^{p-2q+1} = 1-1 = 0$ ist, wodurch das dortige letzte Glied verschwindet.

Die hier entwickelten Reihen haben Montmort, Johann und Nicolas Bernoulli gefunden. M. s. Analyse sur les jeux de hazard. éd. 2. p. 77. p. 304. p. 287. p. 98. p. 299. Noch eine Formel giebt Euler in den Mém. de Berlin. 1764. p. 163. M. s. über diesen Gegenstand auch ein Programm von Mollweide: Multiplex et continuata serierum transformatio etc. Lips. 1820., wo die Formel für den Vortheil des Banquiers beim Pharao als Beispiel einer Umformung einer Reihe gebraucht ist.

Aus (38. 39.) und der vorhergehenden allgemeinen Formel erhält man in den vier Fällen, wo $q = 1$, $= 2$, $= 3$, $= 4$ ist, leicht den Vortheil des Banquier respective

$$= \frac{1}{p},\ = \frac{p+2}{2p(p-1)},\ = \frac{3}{4(p-1)},\ = \frac{2p-5}{2(p-1)(p-3)}.$$

Digitized by Google

Diese vier speciellen Formeln giebt auch Moivre in der Doctrine of Chances. London. 1718. p. 41—43.

44. Montmort hat nach diesen speciellen Formeln zwei Tabellen für den Vortheil des Banquier beim Pharao berechnet, welche ich hier mittheile. Sie werden keiner weitern Erklärung bedürfen. Die Tabelle B. giebt bloß Gränzen an, die aber in kleinern Brüchen ausgedrückt sind, als die Werthe in der Tabelle A. Die Ansicht dieser Tabellen lehrt augenblicklich, daß der Vortheil des Banquiers am kleinsten, der des Spielers also am größten ist, wenn $q = 2$ oder $q = 3$, und p nahe $= 52$ ist. Daraus ergeben sich folgende zwei Regeln für den Spieler:

a) Er muß nur in den ersten Taillen eine Karte besetzen, und desto weniger, je mehr Taillen schon gezogen sind.

b) Die Karten sind für ihn die schlechtesten, welche entweder schon drei Mal, oder noch gar nicht heraus sind. Die besten sind diejenigen, welche zwei Mal heraus sind, und eine solche Karte muß also der Spieler, so viel möglich, sogleich nach einer der ersten Taillen besetzen, wenn er mit dem größten Vortheile spielen will. Der Banquier wird dann den geringsten Vortheil haben. Die Beobachtung dieser Regeln ist allen Spielern zu empfehlen; aber immer wird doch der Banquier im Vortheil seyn.

In der Schrift: Exercitationes quaedam mathematicae. Venetiis. 1724. 4. hat Daniel Bernoulli bei Gelegenheit eines Streites mit Rizetti welcher Montmorts und Joh. Bernoulli's Formeln für den Vortheil des Banquiers für falsch hielt, dieselben kurz entwickelt, und ebenfalls eine Tabelle beigefügt.

Digitized by Google

A.

Vortheil des Banquiers, wenn

p =	q = 1	q = 2	q = 3	q = 4
52	—	—	—	$\frac{2295086263}{1158908419\,50}$
50	—	$\frac{3147}{350350}$	$\frac{3}{196}$	$\frac{7208829}{3495953\,00}$
48	$\frac{1}{48}$	$\frac{1787}{161304}$	$\frac{3}{188}$	$\frac{276499}{1284228\,0}$
46	$\frac{1}{46}$	$\frac{3431}{296010}$	$\frac{3}{180}$	$\frac{11002}{489555}$
44	$\frac{1}{44}$	$\frac{822}{67639}$	$\frac{3}{172}$	$\frac{943}{38788}$
42	$\frac{1}{42}$	$\frac{3146}{246246}$	$\frac{3}{164}$	$\frac{79}{3198}$
40	$\frac{1}{40}$	$\frac{1501}{111540}$	$\frac{3}{156}$	$\frac{25}{962}$
38	$\frac{1}{38}$	$\frac{2849}{201068}$	$\frac{3}{148}$	$\frac{1349}{49210}$
36	$\frac{1}{36}$	$\frac{679}{45045}$	$\frac{3}{140}$	$\frac{1139}{39270}$
34	$\frac{1}{34}$	$\frac{2573}{160446}$	$\frac{3}{132}$	$\frac{367}{11594}$
32	$\frac{1}{32}$	$\frac{1216}{70928}$	$\frac{3}{124}$	$\frac{177}{5394}$
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{2287}{124410}$	$\frac{3}{116}$	$\frac{55}{1566}$
28	$\frac{1}{28}$	$\frac{636}{27027}$	$\frac{3}{108}$	$\frac{221}{5850}$
26	$\frac{1}{26}$	$\frac{2001}{82950}$	$\frac{3}{100}$	$\frac{641}{14950}$
24	$\frac{1}{24}$	$\frac{929}{39468}$	$\frac{3}{92}$	$\frac{473}{10626}$
22	$\frac{1}{22}$	$\frac{1715}{66066}$	$\frac{3}{84}$	$\frac{143}{2926}$
20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1572}{54340}$	$\frac{3}{76}$	$\frac{36}{646}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1429}{43758}$	$\frac{3}{68}$	$\frac{34}{510}$
16	$\frac{1}{16}$	$\frac{429}{11440}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{9}{130}$
14	$\frac{1}{14}$	$\frac{44}{1001}$	$\frac{3}{52}$	$\frac{23}{286}$
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{132}$	$\frac{3}{44}$	$\frac{19}{198}$
10	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{42}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{11}{70}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{30}$
4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{2}$

Digitized by Google

B.

Vortheil des Banquiers, wenn

p =	q = 1	q = 2		q = 3		q = 4	
	=	>	<	>	<	>	<
52	—	—	—	—	—	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$
50	—	$\frac{1}{95}$	$\frac{1}{94}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{48}$
48	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{91}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$
46	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{87}$	$\frac{1}{86}$	$= \frac{1}{60}$	—	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{44}$
44	$\frac{1}{44}$	$\frac{1}{83}$	$\frac{1}{82}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{57}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$
42	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{79}$	$\frac{1}{78}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{40}$
40	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{75}$	$\frac{1}{74}$	$= \frac{1}{52}$	—	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$
38	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{71}$	$\frac{1}{70}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{1}{36}$
36	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{67}$	$\frac{1}{66}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$
34	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{62}$	$= \frac{1}{44}$	—	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{32}$
32	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{59}$	$\frac{1}{58}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{41}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$
30	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{55}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	$\frac{1}{29}$	$\frac{1}{28}$
28	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{51}$	$\frac{1}{50}$	$= \frac{1}{36}$	—	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$
26	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{47}$	$\frac{1}{46}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{24}$
24	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{43}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$
22	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{39}$	$\frac{1}{38}$	$= \frac{1}{28}$	—	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{20}$
20	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{34}$	$\frac{1}{26}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$
18	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{16}$
16	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{26}$	$= \frac{1}{20}$	—	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$
14	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{12}$
12	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$
10	$\frac{1}{10}$	$= \frac{1}{15}$	—	$= \frac{1}{12}$	—	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$
8	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$
6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{4}$	$= \frac{1}{4}$	—	$= \frac{1}{6}$	—	$= \frac{1}{3}$	—

Die Nenner der größern Gränzen findet man auch bei Moivre a. a. O. p. 44. in einer Tabelle berechnet.

Digitized by Google

45. Bei den deutschen Zahlenlotterien, dem Lotto di Genova, und der Loterie de France liegen 90 Nummern im Glücksrade, von denen 5 gezogen werden. Jeder, wer auf eine der gezogenen Nummern gesetzt hat, erhält seinen Einsatz eine gewisse Anzahl mal wieder, bei der Loterie de France z. B. 15mal. Den Spielern steht es frei, entweder bloß die einzelnen von ihnen gewählten Zahlen zu besetzen, oder auch die in denselben enthaltenen Verbindungen zu zwei, drei, u. s. f., d. h. Amben, Ternen, u. s. f., welche bei allen Lotterien höher bezahlt werden, als die einzelnen Auszüge. Bei der Loterie de France z. B. eine Ambe 270, eine Terne 5200 mal. Bei den meisten Lotterien darf man nur bis Ternen gehen. Quinten sind überhaupt nur möglich, da bloß 5 Nummern gezogen werden. Größerer Allgemeinheit wegen wollen wir im Folgenden immer setzen, daß die Lotterie aus n Nummern bestehe, von denen r gezogen werden.

46. Hat man nun s Nummern besetzt, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von denselben t herauskommen werden; so muß man auf folgende Art schließen. Die besetzten s Nummern können zu t auf

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-t+1)}{1.2.3.4\ldots t}$$

Arten combinirt werden (Combination. 12.). Die übrigen $n-s$ Nummern lassen sich zu $r-t$ auf

$$\frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-s-r+t+1)}{1.2.3.4\ldots(r-t)}$$

Arten combiniren. Weil jede der erstern Arten mit jeder der letztern in Verbindung kommen kann; so ist die Anzahl der günstigen Fälle

$$= \frac{(n-s)\ldots(n-s-r+t+1)}{1.2.3.4\ldots(r-t)} \cdot \frac{s\ldots(s-t+1)}{1.2.3\ldots t}.$$

Die Anzahl aller Fälle ist die Anzahl der Combinationen der n Nummern zu r, d. i.

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

Folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

Digitized by Google

$$\frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s...(s-t+1).1.2.3...r}{1.2.3..(r-t).1.2.3..t.n(n-1)..(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-s)..(n-s-r+t+1).s..(s-t+1).r..(r-t+1)}{1.2.3...t.n(n-1)..(n-r+1)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, eine Terne zu gewinnen, ist also z. B. bei der gewöhnlichen Zahlenlotterie, da in diesem Falle $n = 90$, $r = 5$, $s = 3$, $t = 3$ ist,

$$= \frac{87.86.3.2.1.5.4.3}{1.2.3.90.89.88.87.86} = \frac{1}{11748}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen einfachen Auszug zu gewinnen, ist $= \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$, und die, eine Ambe zu gewinnen, $= \frac{2}{801}$, ungefähr $= \frac{1}{400}$.

47. Will man die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von den s besetzten Nummern wenigstens t herauskommen; so sollen entweder t, oder $t+1$, oder $t+2$, oder $t+3$, u. s. f. herauskommen. Ist $s \leqq r$, so erstreckt sich diese Reihe bis s; ist aber $s > r$, nur bis r, da überhaupt nur r Nummern gezogen werden. Nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) muß man die einzelnen, den obigen Ereignissen entsprechenden, Wahrscheinlichkeiten, nach (46.) berechnen, und die erhaltenen Brüche addiren. Hat z. B. Jemand 2 Nummern besetzt, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, daß von denselben wenigstens eine herauskommen werde; so ist $n = 90$, $r = 5$, $s = 2$, $t = 1$, $t + 1 = 2 = s$, da $s < r$. Also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{88.87.86.85.2.5}{1.90.89.88.87.86} + \frac{88.87.86.2.1.5.4}{1.2.90.89.88.87.86},$$
$$= \frac{85}{9.89} + \frac{2}{9.89} = \frac{87}{801}, < \frac{1}{9}, > \frac{1}{10}.$$

48. Soll man die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß von den n Nummern einer Lotterie in einer Ziehung von r Nummern s bestimmte Nummern herauskommen; so ist die Anzahl aller Fälle, wie oben,

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r}.$$

Die Anzahl der günstigen Fälle ist offenbar die Anzahl der Combinationen der übrigen $n-s$ Nummern zu $r-s$, nämlich

Digitized by Google

$$= \frac{(n-s)(n-s-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots(r-s)}.$$

Also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{(n-s)\ldots(n-r+1).1.2.3\ldots r}{1.2.3\ldots(r-s).n(n-1)..(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-s)..(n-r+1).1..(r-s).(r-s+1)..r}{1..(r-s).n\ldots(n-s+1).(n-s)..(n-r+1)}$$
$$= \frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{n(n-1)\ldots(n-s+1)}.$$

49. Will man die Wahrscheinlichkeit haben, daß im vorigen Falle die s bestimmten Nummern in einer bestimmten Ordnung herauskommen; so ist die Anzahl der günstigen Fälle, da es nach der Theorie der Permutationen $1.2.3\ldots s$ verschiedene Ordnungen giebt, in welchen die s Nummern herauskommen können, = der obigen, durch $1.2.3\ldots s$ dividirt, so daß man also auch die obige Probabilität durch dieses Product dividiren muß, wodurch man für die gesuchte Probabilität

$$\frac{r(r-1)\ldots(r-s+1)}{1.2.3\ldots s.n(n-1)..(n-s+1)}$$

erhält.

50. Ist $s = r$; so ist die Probabilität, daß die s bestimmten Nummern in einer Ziehung herauskommen,

$$= \frac{1.2.3\ldots r}{n(n-1)\ldots(n-r+1)},$$

und daß sie in einer bestimmten Ordnung herauskommen,

$$= \frac{1.2.3\ldots r}{1.2.3..r.n(n-1)..(n-r+1)} = \frac{1}{n(n-1)..(n-r+1)}.$$

51. Ist die Mise des Spielers $= m$, p seine Probabilität, zu gewinnen, x aber das, was die Lotterie an den Spieler bezahlen muß; so ist $x-m$ der Gewinn des Spielers, und folglich $p(x-m)$ seine mathematische Hoffnung. Die Probabilität des Spielers zu verlieren, also die Probabilität der Lotterie, zu gewinnen, ist $= 1-p$, und folglich die mathematische Hoffnung der Lotterie $= m(1-p)$. Der Gleichheit des Spiels wegen muß

$$p(x-m) = m(1-p)$$

seyn, woraus man

$$x = \frac{m}{p}$$

Digitized by Google

erhält. Was die Lotterie dem Spieler bezahlen muß, ist also dem Quotienten seiner Mise durch seine Probabilität, zu gewinnen, gleich. Nach (46.) muß die Lotterie also für einen einfachen Gewinn 18m, für eine Ambe $\frac{8\frac{1}{2}^1}{2}$m $= 400\frac{1}{4}$m, für eine Terne 11748m bezahlen. Gewöhnlich werden aber von den Lotterien nur 15m, 270m, 5200m bezahlt, und das Uebrige also für Risico und Kosten abgezogen. Die Wahrscheinlichkeit, eine Quinte zu gewinnen, wäre nach (46.) $= \frac{1}{43949268}$, und die Lotterie müßte also in diesem Falle 43949268m bezahlen. Man hat jedoch diese Art zu spielen allgemein abgeschafft, weil die Probabilität zu gewinnen so sehr klein ist.

Die ehemalige Berliner Zahlenlotterie bezahlte einen simplen Auszug 15, eine Ambe 270, eine Terne 5300, eine Quaterne 60000 Mal, in Bezug auf die Mise des Spielers. Die oben angegebenen Zahlen beziehen sich auf die Loterie de France.

52. Eine wichtige Aufgabe, mit deren Auflösung sich vorzüglich Euler (Opuscula analytica. T. II. p. 333.) und Laplace (Théorie analytique des probabilités. p. 191—201.) beschäftigt haben, ist folgende:

Eine Lotterie bestehe aus n Nummern; man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß in i Ziehungen, wenn jedes Mal r Nummern gezogen werden, alle Nummern herauskommen werden.

Eulers Auflösung.

Es liegt in der Natur der Aufgabe, daß $i \geqq \frac{n}{r}$ seyn muß, indem, für $i < \frac{n}{r}$, die gesuchte Probabilität $= o$ ist.

Die Anzahl aller möglichen Fälle bei einer Ziehung ist offenbar die Anzahl der Combinationen der n Nummern zu r, wie wir auch schon oben gesehen haben, also

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2.3\ldots r} = \left[\frac{n}{r}\right].$$

Für i Ziehungen kann sich jeder einzelne Fall bei jeder ein-

Digitized by Google

zelnen Ziehung mit jedem einzelnen Falle bei jeder andern Ziehung combiniren, so daß also die Anzahl aller möglichen Fälle bei i Ziehungen $= \left[\frac{n}{r}\right]^i$ ist.

Um nun die Anzahl der günstigen Fälle zu finden, bezeichne man die einzelnen Nummern der Lotterie durch a, b, c, d, e, ...; so erhellet leicht, daß unter obiger Anzahl aller Fälle auch die Fälle mit begriffen sind, in denen eine Nummer, z. B. a, fehlt, deren Anzahl offenbar die Anzahl aller Fälle bei einer Lotterie mit $n-1$ Nummern für i Ziehungen ist, d. i. nach dem Obigen $= \left[\frac{n-1}{r}\right]^i$. Folglich ist, da die Lotterie überhaupt n Nummern enthält, die Anzahl der Fälle, in denen keine Nummer fehlt, $= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i$. Man überzeugt sich aber leicht, daß hierbei ein Fehler begangen worden, indem man zu viel abgezogen hat. Jeder Fall nämlich, wo zwei Nummern, z. B. a, b, fehlen, ist doppelt, einmal in Bezug auf a, und einmal in Bezug auf b, abgezogen worden, da er doch offenbar nur einmal abgezogen, und daher wieder einmal addirt werden muß. Die Anzahl aller Fälle, in denen a und b fehlen, ist aber offenbar der Anzahl aller Fälle bei einer Lotterie mit $n-2$ Nummern für i Ziehungen gleich, d. i. $= \left[\frac{n-2}{r}\right]^i$, und man muß folglich, da die n Nummern zu zweien sich $\frac{n(n-1)}{1.2}$ mal combiniren lassen, zu obiger Differenz noch das Product der beiden letzten Größen addiren, wodurch man

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$

erhält.

Aber auch hier ist wieder ein Fehler begangen. Jeder Fall, wo drei Nummern, z. B. a, b, c, fehlen, ist nämlich drei Mal in Bezug auf a, b und c subtrahirt, und dann wieder drei Mal in Bezug auf ab, ac und bc addirt worden, welches sich gegenseitig aufhebt, so daß also diese Fälle eigentlich noch ganz unberücksichtigt geblieben sind, und demnach noch abgezogen werden müssen,

Digitized by Google

wodurch man, nach einer ähnlichen Betrachtung, wie vorher

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-1}{r}\right]^i$$

erhält.

Hierbei ist aber wieder jeder der Fälle, in denen vier Nummern, z. B. a, b, c, d, fehlen, vier Mal subtrahirt, in Bezug auf a, b, c, d; sechs Mal addirt, in Bezug auf ab, ac, ad, bc, bd, cd; vier Mal subtrahirt in Bezug auf abc, abd, acd, bcd; also überhaupt zwei Mal subtrahirt worden, und muß folglich wieder einmal addirt werden, wodurch man erhält:

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\left[\frac{n-4}{r}\right]^i,$$

mit gehöriger Rücksicht auf die Combinationszahl der n Nummern zu vieren.

Man könnte auf diese Art weiter gehen. Um aber der Untersuchung die nöthige Allgemeinheit zu geben, setze man, daß man bis zu α fehlenden Nummern gegangen sey, und für die Anzahl aller Fälle, in denen keine Nummer fehlt,

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]^i$$
$$\pm \text{ wenn } \alpha \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$$

erhalten habe. Jeder Fall, wo $\alpha + 1$ Nummern fehlen, ist hierbei

1) subtrahirt bei einer fehlenden Nummer
$(\alpha + 1)$mal;

2) addirt bei zwei fehlenden Nummern so oft, als sich $\alpha + 1$ Nummern zu zweien combiniren lassen, d. i.
$\frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2}$mal;

Digitized by Google

3) subtrahirt bei drei fehlenden Nummern so oft, als sich $\alpha+1$ Elemente zu dreien combiniren lassen, d. i.

$$\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}\text{mal};$$

4) endlich addirt oder subtrahirt, jenachdem α gerade oder ungerade ist, bei α fehlenden Elementen so oft, als sich $\alpha+1$ Elemente zu α combiniren lassen, d. i:

$$\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\ldots 3.2}{1.2.3.4\ldots\alpha}\text{mal}.$$

Gebraucht man, jenachdem addirt oder subtrahirt worden ist, das Zeichen + oder —; so ist die Zahl, wie oft jeder Fall, wo $\alpha+1$ Nummern fehlen, addirt oder subtrahirt worden ist,

$$= -\frac{\alpha+1}{1}+\frac{(\alpha+1)\alpha}{1.2}-\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)}{1.2.3}+\ldots$$

$$\ldots\pm\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\ldots 2}{1.2.3\ldots\alpha}$$

$$\pm \text{ wenn } \alpha \left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$$

$$= 1-\left[\frac{\alpha+1}{1}\right]+\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]-\left[\frac{\alpha+1}{3}\right]+\ldots.$$

$$\ldots.\pm\left[\frac{\alpha+1}{\alpha}\right]\mp 1-\left\{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$$

$$= (1-1)^{\alpha+1}-\left\{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right. = -\left\{\begin{matrix}0\\2\end{matrix}\right.$$

d. i. $= -0$, wenn α gerade, $= -2$, wenn α ungerade ist. Ist also α gerade, so ist jeder Fall, wo $\alpha+1$ Nummern fehlen, noch gar nicht, wenn α ungerade ist, zwei Mal subtrahirt worden, so daß also jeder solcher Fall im ersten Falle einmal subtrahirt, im zweiten einmal addirt werden muß, wodurch man, da die Anzahl der Combinationen der n Nummern zu $\alpha+1$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-\alpha)}{1.2.3\ldots(\alpha+1)}$$

ist, für die gesuchte Größe

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i-n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i+\frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i+\ldots.$$

$$\ldots\pm\frac{n(n-1)..(n-\alpha+1)}{1.2.3\ldots\alpha}\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]^i\mp\frac{n(n-1)..(n-\alpha)}{1.2.3..(\alpha+1)}\left[\frac{n-\alpha-1}{r}\right]^i$$

erhält.

Digitized by Google

Da nun höchstens $n-r$ Nummern fehlen können, so ist der höchste Werth von $\alpha+1 = n-r$, d. i. $\alpha = n-r-1$, welches, in obige Formel gesetzt, für die Anzahl aller möglichen Fälle, in denen keine Nummer fehlt, den Ausdruck

$$\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots \mp \frac{n(n-1)..(r+1)}{1.2\ldots(n-r)}\left[\frac{r}{r}\right]^i$$

giebt. Da nun $\left[\frac{r-1}{r}\right]$ an sich $= 0$ ist; so kann man obige Größe

$$= \left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots.$$

setzen, wenn nur die Reihe so weit fortgesetzt wird, bis sie von selbst abbricht. Unter derselben Voraussetzung ist also die gesuchte Probabilität

$$= \frac{1}{\left[\frac{n}{r}\right]^i}\left\{\left[\frac{n}{r}\right]^i - n\left[\frac{n-1}{r}\right]^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left[\frac{n-2}{r}\right]^i \right.$$
$$\left. - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left[\frac{n-3}{r}\right]^i + \ldots.\right\}$$

53. Aber allgemein

$$\frac{\left[\frac{n-\alpha}{r}\right]}{\left[\frac{n}{r}\right]} = \frac{(n-\alpha)(n-\alpha-1)..(n-\alpha-r+1)}{n(n-1)\ldots(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-\alpha)..(n-r+1)(n-r)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)\ldots(n-r+1)}$$
$$= \frac{(n-r)..(n-\alpha+1)(n-\alpha)..(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)..(n-r+1)(n-r)..(n-\alpha+1)}$$
$$= \frac{(n-r)(n-r-1)\ldots(n-r-\alpha+1)}{n(n-1)(n-2)..(n-\alpha+1)}$$

Also obige Probabilität, wenn man mit $\left[\frac{n}{r}\right]^i$ wirklich dividirt,

$$= 1 - \frac{\lfloor n-r\rfloor^i}{1.n^{i-1}} + \frac{\lfloor(n-r)(n-r-1)\rfloor^i}{1.2.\lfloor n(n-1)\rfloor^{i-1}}$$
$$- \frac{\lfloor(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\rfloor^i}{1.2.3.\lfloor n(n-1)(n-2)\rfloor^{i-1}}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots,$$

Digitized by Google

bis die Reihe abbricht. Bezeichnet man die Glieder dieser Reihe, vom zweiten an, durch A, B, C, D, E, ...; so wird die Probabilität

$$= 1 - \frac{1}{1}\cdot\frac{(n-r)^i}{n^{i-1}} + \frac{A}{2}\cdot\frac{(n-r-1)^i}{(n-1)^{i-1}}$$
$$- \frac{B}{3}\cdot\frac{(n-r-2)^i}{(n-2)^{i-1}} + \frac{C}{4}\cdot\frac{(n-r-3)^i}{(n-3)^{i-1}} - \ldots$$
$$= 1 - \frac{n}{1}\left\{\frac{n-r}{n}\right\}^i + \frac{(n-1)A}{2}\left\{\frac{n-r-1}{n-1}\right\}^i$$
$$- \frac{(n-2)B}{3}\left\{\frac{n-r-2}{n-2}\right\}^i + \frac{(n-3)C}{4}\left\{\frac{n-r-3}{n-3}\right\}^i - \ldots$$

Für $n = 90$, $r = 5$, $i = 100$ findet Euler obige Probabilität $= 0{,}7419$, Trembley (Mém. de Berlin. 1794. 95. p. 76.), der die Rechnung genauer geführt hat, $= 0{,}7410$, also $> \frac{7}{10}$, d. i. um $\frac{2}{10}$ größer als $\frac{1}{2}$.

Laplace's Auflösung.

54. Laplace hat diese Aufgabe nach einer Methode behandelt, welche in Fällen dieser Art häufig mit großem Nutzen angewandt wird, und daher hier einer Erläuterung bedarf.

Man bezeichne durch $Z_{n,q}$ die Anzahl der Fälle, in welchen in i Ziehungen die Nummern 1, 2, 3, ... q, durch $Z_{n,q-1}$ also die Anzahl der Fälle, in denen in i Ziehungen die Nummern 1, 2, 3, ... q — 1 alle herauskommen, u. s. f.; so ist klar, daß die Anzahl der Fälle, in welchen, 1, 2, 3, ... q in i Ziehungen herauskommen, gleich ist der Anzahl der Fälle, in welchen 1, 2, 3, ... q — 1 herauskommen, weniger der Anzahl der Fälle, in welchen, wenn man die Nummer q aus der Lotterie wegließe, so daß sie nur n — 1 Nummern enthielten, die Nummern 1, 2, 3, ... q — 1 in i Ziehungen herauskommen; d. i. nach obiger Bezeichnung

$$Z_{n,q} = Z_{n,q-1} - Z_{n-1,q-1}.$$

Damit dies völlig deutlich erhelle, überlege man zunächst, daß $Z_{n,q}$ kleiner als $Z_{n,q-1}$ seyn muß, weil $Z_{n,q-1}$ offenbar alle Fälle enthält, welche $Z_{n,q}$ enthält, in denen die Zahlen 1, 2, 3, ... q — 1 mit q verbunden vorkom-

Digitized by Google

men, und außerdem noch alle Fälle, in denen zwar 1, 2, 3, ... q — 1, aber nicht mit q verbunden, vorkommen. Die Anzahl der letztern ist aber offenbar der Anzahl der Fälle gleich, in welchen bei einer Lotterie von n — 1 Nummern, die q nicht enthält, die Nummern 1, 2, 3, ... q — 1 in i Ziehungen alle herauskommen; d. i. $= Z_{n-1,\,q-1}$. Es ist folglich

$$Z_{n,\,q-1} = Z_{n,\,q} + Z_{n-1,\,q-1},$$

woraus obige Gleichung augenblicklich folgt. Betrachtet man nun die Reihe

$$Z_{1,\,q-1},\ Z_{2,\,q-1},\ Z_{3,\,q-1},\ Z_{4,\,q-1},\ \ldots\ Z_{n,\,q-1},\ \ldots$$

so ist nach der in den Artikeln Arithmetische Reihen höherer Ordnungen und Differenzenrechnung angewandten Bezeichnung:

$$\begin{aligned}
Z_{2,\,q-1} - Z_{1,\,q-1} &= \Delta Z_{1,\,q-1},\\
Z_{3,\,q-1} - Z_{2,\,q-1} &= \Delta Z_{2,\,q-1},\\
Z_{4,\,q-1} - Z_{3,\,q-1} &= \Delta Z_{3,\,q-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
Z_{n,\,q-1} - Z_{n-1,\,q-1} &= \Delta Z_{n-1,\,q-1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Folglich

$$Z_{n,\,q} = \Delta Z_{n-1,\,q-1};$$

und, wenn man $q - 1 = 1, 2, 3, 4, \ldots$ setzt:

$$\begin{aligned}
Z_{n,\,2} &= \Delta Z_{n-1,\,1},\\
Z_{n,\,3} &= \Delta Z_{n-1,\,2} = \Delta^2 Z_{n-2,\,1},\\
Z_{n,\,4} &= \Delta Z_{n-1,\,3} = \Delta^3 Z_{n-3,\,1},\\
Z_{n,\,5} &= \Delta Z_{n-1,\,4} = \Delta^4 Z_{n-4,\,1},\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Also allgemein

$$Z_{n,\,q} = \Delta^{q-1} Z_{n-q+1,\,1}.$$

Im Allgemeinen bedeutet nun $Z_{n,\,1}$ die Anzahl aller Fälle, in welchen in i Ziehungen bei einer Lotterie von n Nummern die Nummer 1 herausgekommen ist. Die Anzahl dieser Fälle ist offenbar der Anzahl aller möglichen Fälle bei n Nummern und i Ziehungen gleich, weniger der Anzahl der Fälle, in welchen bei n Nummern und i Ziehungen die Nummer 1 fehlt, d. i. weniger der Anzahl aller möglichen Fälle bei n — 1 Nummern und i Ziehungen. Folglich, da jedes Mal r Nummern gezogen werden:

Digitized by Google

$$z_{n,\,1} = \left[\frac{n}{r}\right]^i - \left[\frac{n-1}{r}\right]^i,$$

da die Anzahl aller möglichen Fälle bei n Nummern $= \left[\frac{n}{r}\right]^i$ ist (52.). Also

$$z_{n,\,1} = \frac{\left|n(n-1)..(n-r+1)\right|^i - \left|(n-1)(n-2)..(n-r)\right|^i}{\left|1.2.3...r\right|^i},$$

d. i., in Bezug auf n als veränderlich (wie oben),

$$z_{n,\,1} = \frac{\Delta.\left|(n-1)(n-2)..(n-r)\right|^i}{\left|1.2.3...r\right|^i},$$

und demnach, $n-q+1$ für n gesetzt, nach dem Vorhergehenden:

$$z_{n,\,q} = \Delta^{q-1}\left\{\frac{\Delta.\left|(n-q)..(n-q-r+1)\right|^i}{\left|1.2.3\ldots r\right|^i}\right\}$$
$$= \frac{\Delta^q.\left|(n-q)(n-q-1)..(n-q-r+1)\right|^i}{\left|1.2.3\ldots.r\right|^i}.$$

Die Anzahl aller möglichen Fälle ist, bei n Nummern und i Ziehungen,

$$= \left[\frac{n}{r}\right]^i = \frac{\left|n(n-1)\ldots(n-r+1)\right|^i}{\left|1.2.3\ldots3\right|^i} \quad (52.).$$

Also die Probabilität, daß in i Ziehungen einer Lotterie von n Nummern die Nummern 1, 2, 3, ... q herauskommen werden, wenn man der Kürze wegen $n-q=s$ setzt,

$$= \frac{\Delta^q.\left|s(s-1)\ldots(s-r+1)\right|^i}{\left|n(n-1)\ldots(n-r+1)\right|^i}.$$

Will man nun die Probabilität haben, daß in i Ziehungen alle n Nummern herauskommen, so muß man obige Differenz, in Bezug auf s als veränderlich, entwickeln, und im Resultate $q=n$, $n-q=o$, d. i. $s=o$ setzen. Da nun hier

$$\left|s(s-1)\ldots(s-r+1)\right|^i,$$
$$\left|(s+1)s\ldots(s-r+2)\right|^i,$$
$$\left|(s+2)(s+1)..(s-r+3)\right|^i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left|(s+q-1)(s+q-2)..(s-r+q)\right|^i,$$
$$\left|(s+q)(s+q-1)..(s-r+q+1)\right|^i,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Digitized by Google

die Hauptreihe ist; so ist, wie aus dem Art. Arithmetische Reihen höherer Ordnungen (2.) leicht geschlossen wird, obige qte Differenz

$$
\begin{aligned}
= & \left\{(s+q)(s+q-1)..(s-r+q+1)\right\}^i \\
& - \frac{q}{1}\left\{(s+q-1)(s+q-2)..(s-r+q)\right\}^i \\
& + \frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(s+q-2)(s+q-3)..(s-r+q-1)\right\}^i \\
& - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{(s+q-3)(s+q-4)..(s-r+q-2)\right\}^i \\
& \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \pm \frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(s+2)(s+1)..(s-r+3)\right\}^i \\
& \mp \frac{q}{1}\left\{(s+1)s(s-1)..(s-r+2)\right\}^i \\
& \pm \left\{s(s-1)(s-2)..(s-r+1)\right\}^i ,
\end{aligned}
$$

wobei nur zu bemerken ist, daß die Reihe a. a. O. des angezogenen Artikels umgekehrt werden muß;

$$
\begin{aligned}
= & \left\{n(n-1)..(n-r+1)\right\}^i \\
& - \frac{q}{1}\left\{(n-1)(n-2)..(n-r)\right\}^i \\
& + \frac{q(q-1)}{1.2}\left\{(n-2)(n-3)..(n-r-1)\right\}^i \\
& - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{(n-3)(n-4)..(n-r-2)\right\}^i \\
& \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \mp \frac{q}{1}\left\{(n-q+1)(n-q)..(n-q-r+2)\right\}^i \\
& \pm \left\{(n-q)(n-q-1)..(n-q-r+1)\right\}^i
\end{aligned}
$$

welches noch durch

$$\left|n(n-1)..(n-r+1)\right|^i$$

dividirt werden muß, um die Probabilität zu erhalten. Dadurch erhält man leicht für die Probabilität, daß in i Ziehungen q Nummern herauskommen, folgenden Ausdruck:

Digitized by Google

$$1 - \frac{q}{1}\left\{\frac{n-r}{n}\right\}^i + \frac{q(q-1)}{1.2}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)}{n(n-1)}\right\}^i - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)}{n(n-1)(n-2)}\right\}^i$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mp \frac{q}{1}\left\{\frac{(n-r)(n-r-1)..(n-r-q+2)}{n(n-1)..(n-q+2)}\right\}^i \pm \left\{\frac{(n-r)(n-r-1)..(n-r-q+1)}{n(n-1)..(n-q+1)}\right\}^i.$$

Setzt man hierin $q = n$; so erhält man leicht die schon oben (52. 53.) gefundenen Ausdrücke für die Probabilität, daß in i Ziehungen alle n Nummern herauskommen. Man sieht, daß Laplace's scharfsinnige Auflösung allgemeiner ist, als die von Euler gegebene.

55. Laplace's großes Werk über die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist nicht bloß wichtig wegen der vielen schwierigen und merkwürdigen Aufgaben, deren Auflösung es enthält, sondern auch wegen der vielen neuen analytischen Methoden, vorzüglich der schönen Approximationsmethoden, die in demselben angewandt werden, größtentheils aber dem Verfasser so eigenthümlich sind, daß sich hier nur einzelne Beispiele beibringen lassen, wozu wir hier folgendes wählen.

Wird in jeder Ziehung nur eine Nummer gezogen, so ist die Probabilität, daß in i Ziehungen alle n Nummern herauskommen, nach dem Vorhergehenden =

$$\frac{\Delta^n . s^i}{n^i} = 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-2}{n}\right)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{n-3}{n}\right)^i + \cdots;$$

die Reihe fortgesetzt, bis sie abbricht. Laplace vergleicht diese Reihe mit der Reihe

$$1 - n\left(\frac{n-1}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2i} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{3i} + \cdots = \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right\}^n$$

deren erste beiden Glieder mit den beiden ersten Gliedern

Digitized by Google

jener Reihe übereinstimmen. Vergleicht man überhaupt die Factoren

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^i \text{ und } \left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$$

zweier gleichstelligen Glieder mit einander, und nimmt die Logarithmen; so erhält man

$$\log n \left(\frac{n-m}{n}\right)^i = i \log n \left(1 - \frac{m}{n}\right)$$

$$= -\frac{mi}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{m^2 i}{n^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{m^3 i}{n^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{m^4 i}{n^4} - \ldots,$$

$$\log n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi} = mi \log n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$= -\frac{mi}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{mi}{n^2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{mi}{n^3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{mi}{n^4} - \ldots.$$

Die ersten Glieder dieser beiden Reihen stimmen mit einander überein. Ist also n eine sehr große Zahl, und man vernachlässigt die Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$ an; so ist

$$\log\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = \log n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi},$$

und folglich auch

$$\left(\frac{n-m}{n}\right)^i = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{mi}$$

näherungsweise. Der Unterschied wächst desto mehr, je größer m wird, wie aus dem Obigen erhellet. Wollte man nun z. B. die Anzahl von Ziehungen bestimmen, bei welchen für ein sehr großes n die obige Probabilität

$$\frac{A^n \cdot s^i}{n^i} = \frac{1}{k}$$

wird; so setze man nach der so eben gedachten Näherungsmethode

$$\frac{1}{k} = \left\{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^i\right\}^n;$$

woraus man leicht erhält:

$$i = \frac{\log\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right)}{\log(n-1) - \log n}.$$

Man nehme natürliche Logarithmen, und es sey

$$\sqrt[n]{\frac{1}{k}} = 1 - z$$

Digitized by Google

so erhält man leicht

$$\frac{1}{n}\log_n k = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \ldots\ldots,$$

oder, für $\frac{1}{n}\log_n k = y$:

$$y = z + \tfrac{1}{2}z^2 + \ldots\ldots$$

Nun sey $z = Ay + By^2 + \ldots$; so erhält man durch Substitution

$$y = Ay + (B + \tfrac{1}{2}A^2)y^2 + \ldots;$$
$$A = 1,\ B + \tfrac{1}{2}A^2 = 0,\ B = -\tfrac{1}{2};$$
$$z = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \ldots = \frac{\log_n k}{n} - \frac{(\log_n k)^2}{2n^2} + \ldots.$$

Geht man nun bloß bis zu Gliedern von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$; so erhält man

$$z = \frac{\log_n k}{n}\left\{1 - \frac{\log_n k}{2n}\right\},$$

und folglich auch

$$1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}} = \frac{\log_n k}{n}\left\{1 - \frac{\log_n k}{2n}\right\},$$

$$\log_n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{1}{k}}\right) = \log_n(\log_n k) - \log_n n + \log_n\left\{1 - \frac{\log_n k}{2n}\right\}$$
$$= \log_n(\log_n k) - \log_n n - \frac{\log_n k}{2n} - \frac{(\log_n k)^2}{8n^2} - \ldots$$
$$= \log_n(\log_n k) - \log_n n - \frac{\log_n k}{2n}.$$

Ferner

$$\log_n\left(\frac{n-1}{n}\right) = \log_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} - \ldots.$$

Also nach dem Obigen

$$i = \frac{\log_n(\log_n k) - \log_n n - \frac{1}{2n}\log_n k}{-\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} - \ldots.}$$
$$= \frac{\log_n n - \log_n(\log_n k) + \frac{1}{2n}\log_n k}{\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \ldots.}$$

Digitized by Google

$$= \frac{n\left\{\log n - \log(\log k)\right\} + \frac{1}{2}\log k}{1 + \frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{n\left\{\log n - \log(\log k)\right\}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\log k}{1 - \frac{1}{4n^2}}$$

$$= n\left\{\log n - \log(\log k)\right\}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\log k,$$

oder auch, wenn $\log k$ klein, und n sehr groß ist,

$$i = n\left\{\log n - \log(\log k)\right\}\left(1 - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\log k.$$

Für $n = 10000$, $k = 2$ findet Laplace nach einer andern annähernden Formel, die sich hier nicht entwickeln läßt, die Anzahl der Ziehungen $= 95767{,}4$.

Für $r = 5$ ist die Probabilität nach dem Obigen

$$= 1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left\{\frac{(n-5)(n-6)}{n(n-1)}\right\}^i - \ldots.$$

Diese Reihe vergleicht Laplace mit

$$1 - \frac{n}{1}\left(\frac{n-5}{n}\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{n-5}{n}\right)^{2i} - \ldots = \left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n.$$

Die ersten Glieder beider Reihen stimmen überein. Man kann daher näherungsweise die gesuchte Probabilität

$$= \left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n$$

setzen. Soll dieselbe $= \frac{1}{2}$ werden; so findet man aus der Gleichung

$$\left\{1 - \left(\frac{n-5}{n}\right)^i\right\}^n = \frac{1}{2}$$

durch bekannte arithmetische Methoden

$$i = \frac{\log\left(\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}\right)}{\log\left(\frac{n}{n-5}\right)}.$$

Für $n = 90$ findet Laplace aus einer andern genauern Formel $i = 85{,}53$, und nach der hier entwickelten Formel $i = 85{,}204$, wo der Unterschied also $= 0{,}326$ beträgt. Werden also in jeder Ziehung 5 Nummern gezogen, so kann man, da die Probabilität, daß alle 90 Num-

Digitized by Google

mern herauskommen, $= \frac{1}{2}$ seyn soll, etwas weniger als Eins gegen Eins wetten, daß dies in 85, und etwas mehr als Eins gegen Eins, daß dies in 86 Ziehungen geschehe, in Bezug auf den erstern genauern Werth von $i = 85{,}53$.

56. Eine Urne enthalte x Kugeln; man soll die Wahrscheinlichkeit finden, daß man, indem man in die Urne hineingreift, eine gerade oder eine ungerade Anzahl Kugeln ergreifen werde.

Die Anzahl der Verbindungen der gegebenen Kugeln zu zwei, vier, sechs, u. s. f. ist (Combination 12.)

$$\frac{x(x-1)}{1.2}, \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}, \frac{x(x-1)\ldots(x-5)}{1.2.3\ldots6}, \ldots;$$

die Anzahl der Verbindungen zu eins, drei, fünf u. s. f. dagegen

$$\frac{x}{1}, \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}, \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-4)}{1.2.3.4.5}, \ldots$$

Folglich die Anzahl aller möglichen Verbindungen der gegebenen Kugeln

$$= \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$= 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots - 1$$
$$= (1+1)^x - 1 = 2^x - 1.$$

Also nach der Lehre von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) die Probabilität, eine gerade Anzahl Kugeln zu ergreifen

$$= \frac{1}{2^x - 1}\left\{\frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x(x-1)..(x-3)}{1.2.3.4} + \frac{x....(x-5)}{1...6} + \ldots\right\},$$

und die Probabilität, eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{1}{2^x - 1}\left\{\frac{x}{1} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \frac{x(x-1)\ldots(x-4)}{1.2...5} + \ldots\right\}.$$

Aber

$$(1+1)^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x..(x-2)}{1.2.3} + \frac{x..(x-3)}{1...4} + \ldots,$$
$$(1-1)^x = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1.2} - \frac{x..(x-2)}{1.2.3} + \frac{x..(x-3)}{1..4} + \ldots.$$

Folglich durch Addition und Subtraction:

Digitized by Google

$$2^x = 2\left\{1 + \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{x..(x-3)}{1...4} + \frac{x..(x-5)}{1...6} + \ldots\right\},$$

$$2^x = 2\left\{\frac{x}{1} + \frac{x..(x-2)}{1.2.3} + \frac{x..(x-4)}{1.2..5} + \ldots\right\}.$$

Also die Probabilität, eine gerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1},$$

und die Probabilität, eine ungerade Anzahl zu ergreifen,

$$= \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}.$$

Die Summe beider Probabilitäten ist, wie es seyn muß, $= 1$. Auch ist klar, daß es wahrscheinlicher ist, eine ungerade, als eine gerade, Anzahl der Kugeln zu ergreifen. Es ist

$$2^{x-1} > 2^{x-1} - \tfrac{1}{2},\ 2^{x-1} > \tfrac{1}{2}\left|2^x - 1\right|;$$

$$\frac{2^{x-1}}{2^x - 1} > \tfrac{1}{2},\ \text{also}\ \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1} < \tfrac{1}{2}.$$

Sey also $\frac{2^{x-1}}{2^x-1} = \frac{1}{2} + y$; so findet man leicht, wenn man aus dieser Gleichung y bestimmt,

$$\frac{2^{x-1}}{2^x - 1} = \tfrac{1}{2} + \frac{1}{2(2^x-1)},\ \frac{2^{x-1}-1}{2^x-1} = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2(2^x-1)}.$$

Je größer x ist, desto kleiner wird der Bruch

$$\frac{1}{2(2^x-1)}.$$

Je größer also die Anzahl der Kugeln ist, desto mehr nähern sich die beiden Wahrscheinlichkeiten der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Je kleiner x ist, desto mehr nähert sich obiger Bruch dem Bruche $\frac{1}{2}$, also die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl zu greifen, der Gewißheit, die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl zu greifen, dagegen der Null, d. i. der Unmöglichkeit. Für $x = 1$ wird erstere Wahrscheinlichkeit wirklich $= 1$, letztere $= 0$.

57. Ist x unbekannt, und bloß bestimmt, daß es nicht $> n$ sey, also selbst alle Werthe von 1 bis n haben kann; so ist jetzt die Anzahl aller möglichen Fälle nach (56.)

$$= (2-1) + (2^2-1) + (2^3-1) + (2^4-1) + \ldots + (2^n-1)$$
$$= 2^{n+1} - n - 2.$$

Digitized by Google

Also die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl von Kugeln zu greifen, nach (8.) und (56.)

$$= \frac{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}}{2^{n+1} - n - 2} = \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - n - 2}.$$

und die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl Kugeln zu greifen,

$$= \frac{(2^0 - 1) + (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + \ldots + (2^{n-1} - 1)}{2^{n+1} - n - 2} = \frac{2^n - n - 1}{2^{n+1} - n - 2}.$$

Erstere Wahrscheinlichkeit ist wieder größer als letztere, und die Summe beider, wie es seyn muß, $= 1$.

58. Die Urne enthalte jetzt x weiße und eben so viele schwarze Kugeln; man sucht die Wahrscheinlichkeit, bei dem Ziehen irgend einer geraden Anzahl von Kugeln halb weiße und halb schwarze Kugeln zu ziehen.

Die Mengen der Fälle eine, zwei, drei, vier, u. s. f. Kugeln von jeder Farbe zu ziehen, sind nach dem Vorhergehenden (56.)

$$\left[\frac{x}{1}\right], \left[\frac{x}{2}\right], \left[\frac{x}{3}\right], \left[\frac{x}{4}\right], \left[\frac{x}{5}\right], \ldots$$

Da sich nun jede einzelne Combination weißer Kugeln mit jeder einzelnen Combination derselben Klasse schwarzer Kugeln verbinden kann; so sind die Mengen der Fälle eine weiße und eine schwarze Kugel, zwei weiße und zwei schwarze, drei weiße und drei schwarze Kugeln zu ziehen, u. s. f.

$$\left[\frac{x}{1}\right]^2, \left[\frac{x}{2}\right]^2, \left[\frac{x}{3}\right]^2, \left[\frac{x}{4}\right]^2, \left[\frac{x}{5}\right]^2, \ldots$$

Die Anzahl aller möglichen Fälle also, eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln zu ziehen, ist

$$= \left[\frac{x}{1}\right]^2 + \left[\frac{x}{2}\right]^2 + \left[\frac{x}{3}\right]^2 + \left[\frac{x}{4}\right]^2 + \left[\frac{x}{5}\right]^2 + \ldots$$

$$= 1 + \left[\frac{x}{1}\right]^2 + \left[\frac{x}{2}\right]^2 + \left[\frac{x}{3}\right]^2 + \left[\frac{x}{4}\right]^2 + \ldots - 1$$

$$= \left[\frac{2x}{x}\right] - 1 \text{ (Binomial-Coefficienten. 17. S. 318.)}.$$

Die Anzahl aller möglichen Fälle ist nach (56.) $= 2^{2x-1} - 1$, da man voraussetzt, daß jedes Mal eine ge-

Digitized by Google

rade Anzahl von Kugeln gezogen werde. Folglich die gesuchte Probabilität

$$= \frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x-1} - 1}.$$

Setzte man nicht voraus, daß immer eine gerade Anzahl von Kugeln gezogen, sondern ganz willkührlich in die Urne gegriffen würde; so wäre die Anzahl aller Fälle $= 2^{2x} - 1$, und folglich unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, eine gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln zu ziehen,

$$= \frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x} - 1}.$$

Auch ist

$$\left[\frac{2x}{x}\right] = \frac{2x(2x-1) \ldots (x+1)}{1.2.3 \ldots x}$$

$$= \frac{2x(2x-1)..(x+1).x(x-1)...1}{1.2.3 \ldots x \cdot 1.2.3 \ldots x}$$

$$= \frac{1.2.3.4 \ldots 2x}{\{1.2.3 \ldots x\}^2}.$$

Folglich obige beide Probabilitäten

$$= \frac{\frac{1.2.3.4 \ldots 2x}{\{1.2.3 \ldots x\}^2} - 1}{2^{2x-1} - 1},$$

$$\text{und} = \frac{\frac{1.2.3.4 \ldots 2x}{\{1.2.3 \ldots x\}^2} - 1}{2^{2x} - 1};$$

59. Nach dem Artikel Binomial-Coefficienten (16.) ist immer

$$\left[\frac{2x}{x}\right] < 2^{2x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x\pi}}, \quad \left[\frac{2x}{x}\right] > 2^{2x} \cdot \sqrt{\frac{2}{(2x+1)\pi}}.$$

Das Verhältniß dieser Gränzen ist, wie man leicht findet,

$$= \sqrt{\frac{2x+1}{2x}},$$

und wird, wenn man $x+1$ für x setzt,

$$= \sqrt{\frac{2x+3}{2x+2}}.$$

Sey nun

Digitized by Google

$$\Gamma\frac{2x+1}{2x} = 1 + \alpha, \Gamma\frac{2x+3}{2x+2} = 1 + \alpha' .$$

Da

$$\frac{2x+3}{2x+2} = \frac{2x+2+1}{2x+2} = 1 + \frac{1}{2x+2}, \quad \frac{2x+1}{2x} = 1 + \frac{1}{2x}$$

ist; so ist offenbar

$$\frac{2x+3}{2x+2} < \frac{2x+1}{2x}, \quad \Gamma\frac{2x+3}{2x+2} < \Gamma\frac{2x+1}{2x} .$$

Also $\alpha' < \alpha$, und das Verhältniß obiger Gränzen kommt also dem Verhältnisse der Gleichheit desto näher, je größer x ist. Ist also x sehr groß, so kann man offenbar die Probabilität

$$\frac{\left[\frac{2x}{x}\right] - 1}{2^{2x-1} - 1} = \frac{\left[\frac{2x}{x}\right]}{2^{2x-1}}$$

setzen, wodurch die Größe dieses Bruchs nicht merklich geändert wird. Denn sey überhaupt

$$\frac{p-1}{q-1} = \frac{p}{q} + z; \text{ so ist}$$

$$z = \frac{p-1}{q-1} - \frac{p}{q} = \frac{p-q}{q(q-1)},$$

offenbar ein sehr kleiner Bruch, wenn q sehr groß ist. Annähernd kann man aber auch

$$\left[\frac{2x}{x}\right] = 2^{2x}\Gamma\frac{1}{x\pi}$$

setzen, wodurch man obige Probabilität

$$= \frac{2^{2x}}{2^{2x-1}}\Gamma\frac{1}{x\pi} = 2\Gamma\frac{1}{x\pi} = \frac{2}{\Gamma x\pi}$$

erhält, wie auch Laplace a. a. O. p. 203 findet.

60. Man habe jetzt $x + x'$ Urnen, von denen die erste p weiße und q schwarze, die zweite p' weiße und q' schwarze, die dritte p'' weiße und q'' schwarze Kugeln enthalte, u. s. f. Man soll die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß, indem man nach der Reihe aus jeder Urne eine Kugel nimmt, x weiße und x' schwarze Kugeln gezogen werden.

Bei der ersten Ziehung sind offenbar $p + q$ verschiedene Fälle möglich, und eben so $p' + q'$ bei der zweiten. Jeder der ersten kann sich mit jedem der zweiten Fälle verbinden,

Digitized by Google

welches für die beiden ersten Ziehungen $(p+q)(p'+q')$ verschiedene Fälle giebt. Jeder dieser Fälle kann sich wieder mit jedem der $p''+q''$ bei der dritten Ziehung möglichen Fälle verbinden, welches für die drei ersten Ziehungen überhaupt $(p+q)(p'+q')(p''+q'')$ verschiedene Fälle giebt. Eben so erhält man für alle Ziehungen die Anzahl der möglichen Fälle

$$= (p+q)(p'+q')(p''+q'')(p'''+q''') \ldots .$$

Um nun die Anzahl der günstigen Fälle zu bestimmen, wollen wir zuerst die Anzahl der Fälle suchen, in welchen x weiße Kugeln aus den $x+x'$ Urnen gezogen werden können. Diese x weißen Kugeln sind offenbar aus x Urnen gezogen, und da sich jede der in der ersten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln mit jeder der in der zweiten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln, jede dieser Verbindungen zu zweien sich wieder mit jeder der in der dritten dieser x Urnen enthaltenen weißen Kugeln verbinden kann, u. s. f.; so giebt das Product der Zahlen, welche anzeigen, wie oft eine weiße Kugel in jeder dieser x Urnen enthalten ist, die Anzahl der möglichen Arten, aus den genannten x Urnen x weiße Kugeln zu ziehen. Da aber diese x Urnen ganz willkührlich sind; so erhellet, wenn man sich die $x+x'$ gegebenen Urnen auf alle mögliche Arten zu x (natürlich ohne Wiederholungen) combinirt denkt, daß man die Anzahl aller möglichen Arten, x weiße Kugeln aus den $x+x'$ Urnen zu ziehen, erhält, wenn man für die Elementenreihe

$$p, p', p'', p''', p'''', \ldots\ldots$$

die $x$te Klasse der Combinationen ohne Wiederholungen entwickelt, und jede Combination als ein Product der in ihr enthaltenen Elemente betrachtet. Das Aggregat dieser Combinationen, welches wir durch C bezeichnen wollen, ist dann die gesuchte Zahl.

Jede Art, aus x bestimmten Urnen x weiße Kugeln zu ziehen, kann sich nun aber mit jeder Art, aus den übrigen x' Urnen x' schwarze Kugeln zu ziehen verbinden, so daß man also die Anzahl aller Arten, aus den gegebenen $x+x'$ Urnen x weiße und x' schwarze Kugeln zu ziehen, erhält,

Digitized by Google

wenn man jeder der in C enthaltenen Combinationen noch x' qs beifügt, und diesen qs die Indices giebt, welche die in der entsprechenden Combination vorkommenden p noch nicht haben. Das Aggregat der so erhaltenen Producte, welches wir durch A bezeichnen wollen, ist nun die gesuchte Anzahl der günstigen Fälle, und folglich die gesuchte Probabilität

$$= \frac{A}{(p+q)(p'+q')(p''+q'')(p'''+q''')\ldots}$$

61. Wäre $p = p' = p'' = p''' = \ldots$, $q = q' = q'' = q''' = \ldots$; so wird der Nenner, da $x + x'$ die Anzahl der Urnen, $= (p+q)^{x+x'}$, und jeder Theil des Zählers wird $= p^x q^{x'}$. Die Anzahl dieser Theile ist der Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen der $x$ten Klasse für $x + x'$ Elemente gleich, d. i.

$$= \frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x}.$$

Folglich die gesuchte Probabilität in diesem Falle

$$= \frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x} \cdot \frac{p^x q^{x'}}{(p+q)^{x+x'}}$$

$$= \frac{(x+x')(x+x'-1)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x} \cdot \left(\frac{p}{p+q}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'}.$$

62. Hat man $x + x' + x''$ Urnen, die nach der Reihe p, q, r; p', q', r'; p'', q'', r''; p''', q''', r'''; u. s. f. weiße, schwarze und rothe Kugeln enthalten, und man will die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß man, wenn man aus jeder Urne eine Kugel nimmt, x weiße, x' schwarze und x'' rothe Kugeln ziehen werde; so ist, wie vorher, die Anzahl aller möglichen Fälle

$$= (p+q+r)(p'+q'+r')(p''+q''+r'')\ldots.$$

Alle Arten, x weiße Kugeln zu ziehen, erhält man, wie vorher, wenn man die $x$te Combinationsclasse ohne Wiederholungen für die Elementenreihe

$$p, p', p'', p''', p'''', \ldots$$

bildet, und das Aggregat derselben $= C$ setzt. Bei jeder einzelnen Art, x weiße Kugeln zu ziehen, bleiben noch $x' + x''$ Urnen übrig. Aus diesen lassen sich x' schwarze Kugeln auf so viele verschiedene Arten ziehen, als das

Digitized by Google

Aggregat der Combinationen anzeigt, welche man erhält, wenn man die x'te Combinationsklasse ohne Wiederholungen für die den noch übrigen $x' + x''$ Urnen entsprechenden q bildet. Um also die Anzahl aller möglichen Arten, x weiße und x' schwarze Kugeln zu ziehen, zu erhalten, muß man jede einzelne der in C enthaltenen Combinationen in die x'te Combinationsklasse der $x' + x''$ qs multipliciren, welche die noch nicht bei den p der entsprechenden Combination befindlichen Indices tragen. Das Aggregat aller auf diese Weise erhaltenen Producte, jedes in seine einzelnen Theile zerlegt, sey $= C'$. Will man nun endlich die Anzahl aller möglichen Arten, x weiße, x' schwarze und x'' rothe Kugeln zu ziehen, erhalten; so muß man jeden der einzelnen in C' enthaltenen Theile mit x'' rs verbinden, und letzteren die noch nicht bei p oder q der entsprechenden Theile von C' befindlichen Indices beifügen. Setzt man das so erhaltene Aggregat wieder $= A'$; so ist die Probabilität, x weiße, x' schwarze, x'' rothe Kugeln aus $x + x' + x''$ Urnen nach der Reihe zu ziehen,

$$= \frac{A'}{(p+q+r)(p'+q'+r')(p''+q''+r'')\ldots}.$$

63. Für $p = p' = p'' = p''' = \ldots$, $q = q' = q'' = q''' = \ldots$, $r = r' = r'' = r''' = \ldots$ wird der Nenner $= (p+q+r)^{x+x'+x''}$, und jeder Theil des Zählers $= p^x q^{x'} r^{x''}$. Die Anzahl dieser Theile ist nach dem Vorigen offenbar

$$= \frac{(x+x'+x'')(x+x'+x''-1)\ldots(x'+x''+1)}{1.2.3.4\ldots x} \cdot \frac{(x'+x'')\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots x'}$$

$$= \frac{1.2.3.4\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots x.1.2.3\ldots x'.1.2.3\ldots x''}.$$

Folglich die Probabilität in diesem Falle

$$= \frac{1.2\ldots(x+x'+x'')}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''} \cdot \frac{p^x q^{x'} r^{x''}}{(p+q+r)^{x+x'+x''}}$$

$$= \frac{1.2\ldots(x+x'+x'')}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''} \cdot \left(\frac{p}{p+q+r}\right)^x \cdot \left(\frac{q}{p+q+r}\right)^{x'} \cdot \left(\frac{r}{p+q+r}\right)^{x''}$$

wo $\frac{p}{p+q+r}$, $\frac{q}{p+q+r}$, $\frac{r}{p+q+r}$

die Probabilitäten sind, aus jeder Urne eine weiße, oder eine schwarze, oder eine rothe Kugel zu ziehn.

Digitized by Google

64. Es erhellet leicht, wie man auf diese Art weiter gehen kann. Für $x+x'+x'+x'''$ Urnen mit $p, q, r, s; p', q' r', s'; p'', q'', r'', s''$; u. s. f. weißen, schwarzen, rothen und gelben Kugeln, erhält man, wenn man auf ähnliche Art wie vorher A und A' das Aggregat A'' bildet, die Probabilität, x weiße, x' schwarze, x'' rothe und x''' gelbe Kugeln aus den $x+x'+x''+x'''$ Urnen zu ziehen, wenn man aus jeder eine zieht,

$$= \frac{A''}{(p+q+r+s)(p'+q'+r'+s')(p''+q''+r''+s'')\ldots},$$

und, wenn $p = p' = p'' = \ldots$, $q = q' = q'' = \ldots$, $r = r' = r'' = \ldots$, $s = s' = s'' = \ldots$, ist,

$$= \frac{1.2.3\ldots(x+x'+x''+x''')}{1\ldots x.1\ldots x'.1\ldots x''.1\ldots x'''} \times \left(\frac{p}{p+q+r+s}\right)^{x} \cdot \left(\frac{q}{p+q+r+s}\right)^{x'} \cdot \left(\frac{r}{p+q+r+s}\right)^{x''} \cdot \left(\frac{s}{p+q+r+s}\right)^{x'''}.$$

Diese Aufgaben leiten uns zu folgendem sehr wichtigen Theile der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wahrscheinlichkeit bei wiederholten Versuchen.

65. Unter wiederholten Versuchen werden hier z. B. die mehrmaligen Würfe mit derselben Anzahl gleicher Würfel, die Züge von Kugeln, welche man aus einer Urne nimmt, nach jedem Zuge aber immer wieder in die Urne hineinlegt, um immer dasselbe Verhältniß zwischen der Zahl der Fälle jeder Art zu behalten, u. dgl. Sind nun p und $p' = 1 - p$ die Wahrscheinlichkeiten zweier einander entgegengesetzten Ereignisse, und man will die Wahrscheinlichkeit bestimmen, daß in $x+x'$ Versuchen das erste Ereigniß $x$mal, das zweite x'mal eintreffe; so erhellet leicht, daß diese Aufgabe mit der in (60.) aufgelösten Aufgabe: die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, daß aus $x+x'$ Urnen, deren jede eine gewisse gleiche Anzahl weißer und schwarzer Kugeln enthält, wenn nach der Reihe aus jeder Urne eine Kugel genommen wird, also in $x+x'$ Zügen, x weiße und x' schwarze Kugeln gezogen worden, iden-

Digitized by Google

tisch ist. Setzt man also p und p' für die dortigen $\frac{p}{p+q}$ und $\frac{q}{p+q}$; so erhält man die gesuchte Probabilität

$$= \frac{1.2.3...(x+x')}{1.2.3...x.1.2.3...x'} p^x p'^{x'}.$$

Eben so leicht erhellet, daß die allgemeinere Aufgabe: die Probabilität zu bestimmen, daß bei mehrern Ereignissen, deren Probabilitäten p, p', p'', p''', ... sind, so daß

$$p + p' + p'' + p''' + ... = 1$$

ist, in $x + x' + x'' + x''' + ...$ Versuchen das erste Ereigniß xmal, das zweite x'mal, das dritte x''mal eintreffe u. s. f. mit der in (63.) und (64.) aufgelösten allgemeinern Aufgabe identisch, und die gesuchte Probabilität folglich

$$= \frac{1.2.3...(x+x'+x''+x'''+...)}{1...x.1...x'.1...x''.1...x'''...} p^x p'^{x'} p''^{x''} ....$$

ist.

66. Die Probabilität

$$\frac{1.2.3...(x+x')}{1...x.1...x'} p^x p'^{x'}$$

wird leicht auf folgenden Ausdruck gebracht:

$$\left[\frac{x+x'}{x'}\right] p^{x+x'-x'} p'^{x'},$$

welches das $(x'+1)$te Glied in der Entwickelung von $(p+p')^{x+x'}$ ist. Setzen wir nun $x + x' = \alpha$, so drücken die Glieder der Entwickelung von $(p+p')^\alpha$ nach der Reihe die Wahrscheinlichkeiten aus, daß in α Versuchen das in Rede stehende Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$ ist, xmal und das entgegengesetzte kein Mal, $(\alpha - 1)$mal und das entgegengesetzte ein Mal; $(\alpha - 2)$mal und das entgegengesetzte zwei Mal eintreffe, u. s. f.

67. Soll das in Rede stehende Ereigniß in α Versuchen **wenigstens** $(\alpha - \beta)$mal, wo natürlich $\beta < \alpha$ ist, eintreffen, so kann es αmal, $(\alpha - 1)$mal, $(\alpha - 2)$mal, ... $\alpha - \beta + 1)$mal, $(\alpha - \beta)$mal eintreffen, und die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fall von diesen statt finde, ist nach 8.) und dem Vorhergehenden

Digitized by Google

$$= p^\alpha + \frac{\alpha}{1} p^{\alpha-1} p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} p^{\alpha-2} p'^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-\beta+1)}{1.2.3..\beta} p^{\alpha-\beta} p'^\beta$$
$$= p^\alpha \left\{ 1 + \frac{\alpha}{1} \cdot \frac{p'}{p} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2} \left(\frac{p'}{p}\right)^2 + \ldots. \right.$$
$$\left. \ldots. + \frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-\beta+1)}{1.2.3..\beta} \left(\frac{p'}{p}\right)^\beta \right\}$$
$$= p^\alpha \left(1 + \frac{p'}{p}\right)^\beta \left\{ 1 + \frac{\alpha-\beta}{1} \cdot \frac{p'}{p+p'} \right.$$
$$+ \frac{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2} \left(\frac{p'}{p+p'}\right)^2$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta)}{1.2.3..\beta} \left(\frac{p'}{p+p'}\right)^\beta \right\}$$

(s. Umformung der Reihen 19.) oder, da $p + p' = 1$ ist,

$$= p^{\alpha-\beta} \left\{ 1 + \frac{\alpha-\beta}{1} p' + \frac{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2} p'^2 \right.$$
$$+ \frac{(\alpha-\beta+2)(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta)}{1.2.3} p'^3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\beta)}{1.2.3\ldots\beta} p'^\beta \right\}$$

und, wenn man $\alpha - \beta = \gamma$ setzt, obige Probabilität

$$= p^\gamma \left\{ 1 + \frac{\gamma}{1}(1-p) \right.$$
$$+ \frac{(\gamma+1)\gamma}{1.2}(1-p)^2$$
$$+ \frac{(\gamma+2)(\gamma+1)\gamma}{1.2.3}(1-p)^3$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\gamma}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}(1-p)^{\alpha-\gamma} \right\}$$

wodurch also die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt wird, daß das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit p ist, in α Versuchen wenigstens γmal eintreffe. Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel in 4 Würfen wenigstens zwei Mal 6 zu werfen, ist

$$= \left(\tfrac{1}{6}\right)^2 \cdot \left\{ 1 + \tfrac{2}{1} \cdot \tfrac{5}{6} + \frac{3.2}{1.2} \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right)^2 \right\} = \tfrac{19}{144}, > \tfrac{1}{8}, < \tfrac{1}{7}.$$

68. Soll man die Anzahl von Versuchen finden, welche nöthig ist, damit die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereigniß,

Digitized by Google

dessen Probabilität $= p$ ist, wenigstens γmal eintrifft, $= w$ wird; so muß man aus der Gleichung

$$w = p^\alpha + \frac{\alpha}{1}p^{\alpha-1}p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}p^{\alpha-2}p'^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\gamma+1)}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}p^\gamma p'^{\alpha-\gamma}$$
$$= p^\gamma\left\{1 + \frac{\gamma}{1}(1-p) + \frac{(\gamma+1)\gamma}{1.2}(1-p)^2 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\gamma}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}(1-p)^{\alpha-\gamma}\right\}$$

wo p, p', γ, w bekannt sind, α bestimmen.

Für $\gamma = 1$ wird diese Gleichung

$$w = p^\alpha + \frac{\alpha}{1}p^{\alpha-1}p' + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1.2}p^{\alpha-2}p'^2 + \ldots.$$
$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots2}{1.2.3..(\alpha-1)}pp'^{\alpha-1}$$
$$= p\left\{1+(1-p)+(1-p)^2+(1-p)^3+\ldots+(1-p)^{\alpha-1}\right\}$$
$$= p.\frac{(1-p)^\alpha - 1}{1-p-1} = 1-(1-p)^\alpha \text{ (Geom. Reihe. 4.)}.$$

Also

$$(1-p)^\alpha = 1 - w,$$

woraus durch Logarithmen

$$\alpha = \frac{\log(1-w)}{\log(1-p)},$$

und, wenn man

$$1 - w = \frac{v}{v'},\ 1-p = \frac{u}{u'}$$

setzt,

$$\alpha = \frac{\log v - \log v'}{\log u - \log u'} = \frac{\log v' - \log v}{\log u' - \log u}.$$

Sey z. B. die Anzahl der Würfe mit zwei Würfeln zu bestimmen, bei welcher es eben so wahrscheinlich ist, zwei Sechsen zu werfen, als nicht; so ist $w = \frac{1}{2}$, $1-w = \frac{1}{2}$, $v = 1$, $v' = 2$, $p = \frac{1}{36}$, $1-p = \frac{35}{36}$, $u = 35$, $u' = 36$; also

$$\alpha = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} = 24{,}6.$$

Wirft man also nur 24 Mal, so ist es wahrscheinlicher, nicht zwei Sechsen zu werfen; wirft man aber 25 Mal, so ist es wahrscheinlicher zwei Sechsen zu werfen, als nicht.

Digitized by Google

69. Will man bestimmen, wie oft bei α Versuchen das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$, und dessen entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= p'$ ist, am wahrscheinlichsten eintrifft; so muß man offenbar (66.) in der Entwickelung von $(p + p')^\alpha$ das größte Glied ausmitteln. Das $(k+1)$te Glied sey $=$

$$\left[\frac{\alpha}{k}\right] p^{\alpha-k} p'^k = t .$$

Das nächst vorhergehende und nächstfolgende Glied sind:

$$\left[\frac{\alpha}{k-1}\right] p^{\alpha-k+1} p'^{k-1} = 't , \left[\frac{\alpha}{k+1}\right] p^{\alpha-k-1} p'^{k+1} = t' ,$$

und man wird sich leicht überzeugen, daß

$$'t = t . \frac{k}{\alpha-k+1} \cdot \frac{p}{1-p}, \; t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot \frac{1-p}{p} .$$

Betrachten wir nun zuerst den einfachsten Fall, wo $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ ist; so ist

$$'t = t . \frac{k}{\alpha-k+1}, \; t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1} .$$

Die einzelnen Glieder der Reihe seyen A, B, C, D, E, ...; so ist hiernach

$$A = 1, \; B = A . \frac{\alpha}{1} , \; C = B . \frac{\alpha-1}{2} , \; D = C . \frac{\alpha-2}{3}, \ldots$$

$$\ldots . \; t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1}, \ldots .$$

woraus sogleich erhellet, daß diese Glieder so lange zunehmen, so lange $\alpha - k > k + 1$, $k < \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ ist. Ist α eine gerade Zahl, $= 2\beta$; so hat man also $k < \frac{1}{2}(2\beta - 1)$, $< \beta - \frac{1}{2}$. Folglich nehmen die Glieder zu, bis $k = \beta - 1$, $k + 1 = \beta$, d. i. bis zum $(\beta+1)$ten Gliede, welches $= t'$, da t das $(k+1)$te $= \beta$te, also t' das $(k+2)$te $= (\beta+1)$te Glied ist. Die folgenden Glieder sind

$$t'' = t' . \frac{2\beta-\beta}{\beta+1} = t' . \frac{\beta}{\beta+1} ,$$

$$t''' = t'' . \frac{2\beta-(\beta+1)}{\beta+2} = t'' . \frac{\beta-1}{\beta+2} ,$$

$$t'''' = t''' . \frac{2\beta-(\beta+2)}{\beta+3} = t''' . \frac{\beta-2}{\beta+3} ,$$

. . . . . .

und nehmen folglich offenbar fortwährend ab. Das Glied t' ist also in diesem Falle das größte. Da die Entwicke-

Digitized by Google

lung von $(p + p')^{2\beta}$ bekanntlich $2\beta+1 = \beta+1+\beta$ Glieder hat; so ist t' in dieser Entwickelung das mittelste Glied

$$= \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] p^{2\beta-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] \cdot (\tfrac{1}{2})^{2\beta}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\frac{1}{2}\alpha+1)}{1.2.3\ldots\frac{1}{2}\alpha} \cdot (\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Es ist also am wahrscheinlichsten, daß das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist, in α Versuchen $2\beta-\beta = \beta = \frac{1}{2}\alpha$mal eintrifft, und die Wahrscheinlichkeit, daß dies wirklich geschehe, wird durch obigen Ausdruck dargestellt.

Ist α eine ungerade Zahl, $= 2\beta+1$; so hat man nach dem Obigen $k < \frac{1}{2}(2\beta+1-1)$, $< \beta$, so daß also die Glieder zunehmen bis $k = \beta-1$, $k+1 = \beta$, also wieder bis t'. Die folgenden Glieder sind

$$t'' = t' \cdot \frac{2\beta+1-\beta}{\beta+1} = t' \cdot \frac{\beta+1}{\beta+1},$$

$$t''' = t'' \cdot \frac{2\beta+1-(\beta+1)}{\beta+2} = t'' \cdot \frac{\beta}{\beta+2},$$

$$t'''' = t''' \cdot \frac{2\beta+1-(\beta+2)}{\beta+3} = t''' \cdot \frac{\beta-1}{\beta+3},$$

. . . . . .

und nehmen folglich von t'' ab, welches $= t'$ ist, ab. Die größte Wahrscheinlichkeit ist also entweder t' oder t''. Da nun t' das $(\beta+1)$te, t'' das $(\beta+2)$te Glied ist, so ist die Wahrscheinlichkeit am größten, daß das Ereigniß entweder $2\beta+1-\beta = \beta+1$, oder $2\beta+1-(\beta+1) = \beta$mal eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit selbst ist

$$= \left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right] p^{2\beta+1-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right] \cdot (\tfrac{1}{2})^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\left(\frac{\alpha+1}{2}+1\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} (\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Da $(p+p')^{2\beta+1}$ bekanntlich $2\beta+2 = \beta+1+1+\beta$ Glieder hat; so ist obige Wahrscheinlichkeit ebenfalls das mittelste Glied, wobei jedoch zu bemerken, daß hier zwei Mittelglieder vorkommen, die aber einander gleich sind.

Digitized by Google

70. In dem Falle, wo α eine gerade Zahl, $= 2\beta$, ist, sind nach dem Art. Binomial-Coefficienten (16.) die Gränzen der Probabilität

$$2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2\beta},\quad 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\beta\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2\beta};$$

d. i. $$\sqrt{\frac{2}{(\alpha+1)\pi}} \text{ und } \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}},$$

und diese Gränzen kommen einander offenbar desto näher, je größer α ist.

Für $\alpha = 2\beta+1$ ist die Probabilität

$$= \left[\frac{2\beta+1}{2\beta}\right]\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha} = \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\left[\frac{2\beta}{\beta}\right]\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Folglich die Gränzen derselben:

$$\frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha},\quad \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha};$$

d. i. $$\frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot\tfrac{1}{2},\quad \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}\cdot\tfrac{1}{2};$$

oder $$\frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \text{ und } \frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{(\alpha-1)\pi}}.$$

71. Andere Nährungsausdrücke erhält man auf folgende Art. Nach Thl. IV. S. 663. ist

$$\begin{aligned}\log n\,1 + \log n\,2 + \log n\,3 + \log n\,3 + \log n\,4 + \ldots + \log n\,x \\ = \tfrac{1}{2}\log n\,2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\log n\,x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \ldots \\ = \log n(1.2.3.4\ldots.x) \\ = \tfrac{1}{2}\log n\,2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\log n\,x + \log n\,e \qquad -x+\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \ldots\end{aligned}$$

wenn e, wie gewöhnlich die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Für die Bernoullischen Zahlen müssen a. a. O. ihre Werthe gesetzt werden (Thl. I. S. 254.). Also

$$1.2.3..x = \sqrt{2\pi}.x^{x+\frac{1}{2}}.e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots}$$

$$= \sqrt{2\pi}.\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}.e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots}.$$

Hat man nun im Allgemeinen das Product

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1) = \frac{1.2.3\ldots.\alpha}{1.2.3\ldots(\alpha-\beta)};$$

Digitized by Google

so erhält man mittelst der gefundenen Formel

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)$$
$$=\left\{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha}}\cdot e^{\frac{1}{12\alpha}-\frac{1}{360\alpha^3}+\ldots}\right\}$$
$$:\left\{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha-\beta}}\cdot e^{\frac{1}{12(\alpha-\beta)}-\frac{1}{360(\alpha-\beta)^3}+\ldots}\right\}$$
$$=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\ldots}.$$

Folglich der Binomial-Coefficient

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\ldots}$$
$$:\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}}\cdot e^{\frac{1}{12\beta}-\frac{1}{360\beta^3}+\ldots}$$
$$=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\ldots}$$

ein Nährungsausdruck für jeden Binomial-Coefficienten, welchen man, wenn die Anzahl der Factoren sehr groß ist, mit Vortheil gebrauchen wird. Für $\alpha=2\beta$ wird

$$\left[\frac{2\beta}{\beta}\right]=\frac{(2\beta)^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\ldots}$$
$$=\frac{2^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{8\beta}-\ldots}=\frac{2^{2\beta}}{\sqrt{\beta\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{8\beta}-\ldots}$$

Für $\alpha=2\beta+1$ wird

$$\left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right]=\frac{(2\beta+1)^{2\beta+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot(\beta+1)^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta+1}-\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\beta}\right\}-\ldots}$$

Nährungsausdrücke für die obige Probabilität lassen sich hieraus nun leicht construiren.

72. Gehen wir nun zu dem allgemeinern Falle über, wenn die Wahrscheinlichkeit nicht $=\frac{1}{2}$ ist; so ist, wenn das größte Glied in der Entwickelung von $(p+p')^{\alpha}$ das

Digitized by Google

$(k+1)$te ist, und $= t$ gesetzt, übrigens ganz die vorige Bezeichnung beibehalten wird, wie vorher (69.):

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\quad t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p}.$$

Folglich ist, da nach der Bedingung der Aufgabe $t > 't$, $t > t'$ seyn muß,

$$t > t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\quad t > t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p},$$

woraus man leicht findet:

$$k < (\alpha+1)(1-p),\ k > \alpha(1-p)-p;$$
$$k < \alpha(1-p)-p+1,\ k > \alpha(1-p)-p,$$

so daß also k die größte in $\alpha(1-p)-p+1$ enthaltene ganze Zahl, oder die ganze Zahl ist, welche zunächst $> \alpha(1-p)-p$ ist. Die vor dem t vorhergehenden, und auf t folgenden Glieder sind

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},$$
$$''t = 't.\frac{k-1}{\alpha-k+2}.\frac{p}{1-p},$$
$$'''t = ''t.\frac{k-2}{\alpha-k+3}.\frac{p}{1-p},$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

$$\text{und } t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{1},$$
$$t'' = t'.\frac{\alpha-k-1}{k+2}.\frac{1-p}{p},$$
$$t''' = t''.\frac{\alpha-k-2}{k+3}.\frac{1-p}{p},$$
$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Da nun k nach dem Obigen so bestimmt worden ist, daß $'t < t$, $t' < t$ ist; so sind

$$\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\ \frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p};$$

folglich um so mehr

$$\frac{k-1}{\alpha-k+2}.\frac{p}{1-p},\ \frac{k-2}{\alpha-k+3}.\frac{p}{1-p},\ \frac{k-3}{\alpha-k+4}.\frac{p}{1-p},\ \ldots$$
$$\frac{\alpha-k-1}{k+2}.\frac{1-p}{p},\ \frac{\alpha-k-2}{k+3}.\frac{1-p}{p},\ \frac{\alpha-k-3}{k+4}.\frac{1-p}{p},\ \ldots$$

echte Brüche, und demnach $t, 't, ''t, '''t, \ldots.; t, t',$

Digitized by Google

t'', t''', ... zwei abnehmende Reihen, also t das größte Glied in der Entwickelung von $(p+p')^\alpha$.

73. Setzt man, da k die ganze Zahl ist, welche zunächst größer als $\alpha(1-p)-p$ ist,

$$k = \alpha(1-p) - p + \delta,$$

wo δ einen echten Bruch bezeichnet; so erhält man leicht

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k+\delta}{k-\delta+1}.$$

Je größer k und $\alpha - k$ sind, desto genauer ist, da $\delta < 1$,

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k}{k}.$$

Da nun $\alpha-k$ und k die Exponenten von p und $p' = 1-p$ in dem durch t bezeichneten Gliede sind (69.); so erhellet aus dem Vorhergehenden und aus (66.) leicht, daß bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen zur Hervorbringung eines Ereignisses oder seines entgegengesetzten die wahrscheinlichste Verbindung dieser Ereignisse die ist, in welcher jedes derselben seiner Probabilität proportional wiederholt vorkommt.

74. Das $l$te Glied nach oder vor dem größten, d. h. das $(k+1\pm l)$te oder $(k+1+l)$te Glied, wenn man l gehörig positiv und negativ nimmt, ist

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k-l+1)}{1.2.3\ldots(k+l)} p^{\alpha-k-l}(1-p)^{k+l}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots\alpha}{1.2.3\ldots(k'-l).1.2.3\ldots(k+l)} p^{k'-l}(1-p)^{k+l},$$

für $k+k' = \alpha$.

Eine Nährungsformel zur Berechnung dieses Gliedes erhält man auf folgende Art. Nach (71.) ist, wenn man sich die Potenz von e mit dem zusammengesetzten Exponenten entwickelt denkt:

$$1.2.3\ldots\alpha = \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}.e^{-\alpha}.\sqrt{2\pi}.\left\{1+\frac{1}{12\alpha}+\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k'-l)} = (k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}.\frac{e^{k'-l}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12(k'-l)}-\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k+l)} = (k+l)^{-l-k-\frac{1}{2}}.\frac{e^{k+l}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12(k+l)}-\ldots\right\}.$$

Digitized by Google

Der hyperbolische Logarithmus von $(k'-1)^{l-k'-\frac{1}{2}}$ ist

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\left\{\log n\, k' + \log n\left(1-\frac{1}{k'}\right)\right\}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\left\{\log n\, k' - \frac{1}{k'} - \frac{1^2}{2k'^2} - \frac{1^3}{3k'^3} - \dots\right\}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\log n\, k' + l + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$$

$$+ \frac{l^2}{4k'}\cdot\frac{1}{k'} + \frac{l^2}{6k'}\cdot\frac{1}{k'^2} + \tfrac{1}{5}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{1}{k'^2} + \dots$$

$$- \tfrac{1}{12}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{1}{k'} - \tfrac{1}{20}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{1}{k'^2} - \tfrac{1}{30}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^3\cdot\frac{1}{k'^2} - \dots.$$

Nimmt man nun l im Verhältniß zu k′ nur klein an, so daß nur erst l^2 mit k′ verglichen werden kann; so erhält man nährungsweise hieraus

$$\log n\,(k'-1)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\log n\, k' + l + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$$

$$= \log n\, k'^{\,l-k'-\frac{1}{2}} + \log n\, e^{\,l+\frac{l}{2k'}-\frac{l^2}{2k'}-\frac{l^3}{6k'^2}},$$

und folglich

$$(k'-1)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{\,l-\frac{l^2}{2k'}}\cdot k'^{\,l-k'-\frac{1}{2}}\cdot\left\{1+\frac{l}{2k'}-\frac{l^3}{6k'^2}\right\};$$

also auch $(k+1)^{-l-k-\frac{1}{2}}$

$$= e^{\,-l-\frac{l^2}{2k}}\cdot k^{-l-k-\frac{1}{2}}\cdot\left\{1-\frac{l}{2k}+\frac{l^3}{6k^2}\right\}.$$

Ferner ist nach dem Obigen aus der Gleichung

$$k = \alpha(1-p) - p + \delta,$$

wo $\delta < 1$ ist:

$$p = \frac{\alpha-k+\delta}{\alpha+1} = \frac{k'+\delta}{\alpha+1}.$$

Setzt man nun $p = \frac{k'-z}{\alpha}$; so ist $z < 1$. Denn aus der Gleichung

$$\frac{k'-z}{\alpha} = \frac{k'+\delta}{\alpha+1}$$

erhält man leicht:

$$z = \frac{k' - \alpha\delta}{\alpha+1}.$$

Digitized by Google

Aber $k + k' = \alpha$; also $k' < \alpha + 1$, und um so mehr $k' - \alpha\delta < \alpha + 1$, wenn $\alpha\delta < k'$ ist. Ist aber $\alpha\delta > k'$, so ist, weil $\delta < 1$ ist, doch $\alpha\delta < \alpha$, $\alpha\delta - k' < \alpha$, $< \alpha + 1$. Folglich, ohne Rücksicht auf das Zeichen, immer $z < 1$. Ferner ist

$$1 - p = 1 - \frac{k' - z}{\alpha} = \frac{\alpha - k' + z}{\alpha} = \frac{k + z}{\alpha};$$

$$\text{also } p^{k'-1}(1-p)^{k+1} = \frac{(k'-z)^{k'-1}.(k+z)^{k+1}}{\alpha^\alpha}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left(1 - \frac{z}{k'}\right)^{k'-1}.\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left\{1 - \frac{k'-1}{1}.\frac{z}{k'}\right\}\left\{1 + \frac{k+1}{1}.\frac{z}{k}\right\}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left\{1 + \frac{(k+k')lz}{kk'}\right\} = \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{k}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\},$$

wenn man immer die z^2 enthaltenden Glieder vernachlässigt. Aus allem Vorhergehenden erhält man endlich

$$\frac{1.2.3....\alpha}{1.2.3..(k'-1).1.2.3..(k+1)}.p^{k'-1}(1-p)^{k+1}$$

$$= \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}.e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}.\left\{1 + \frac{1}{12\alpha}\right\}$$

$$\times e^{1 - \frac{l^2}{2k'}}.k^{1-k'-\frac{1}{2}}.\left\{1 + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{6k'^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k'-1}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k'-1)}\right\}$$

$$\times e^{-1-\frac{l^2}{2k}}.k^{-1-k-\frac{1}{2}}.\left\{1 - \frac{l}{2k} + \frac{l^2}{6k^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k+1)}\right\}$$

$$\times \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\}.$$

Das Product der Factoren vor den Parenthesen ist, wie man leicht findet,

$$= \frac{\sqrt{\alpha}.e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2kk'}}.$$

Das Product der eingeschlossenen Größen ist, wenn man, mit Laplace, die Glieder $\frac{1}{12\alpha}$, $\frac{1}{12(k'-1)}$, $\frac{1}{12(k+1)}$ vernachlässigt,

Digitized by Google

69. Will man bestimmen, wie oft bei α Versuchen das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$, und dessen entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= p'$ ist, am wahrscheinlichsten eintrifft; so muß man offenbar (66.) in der Entwickelung von $(p + p')^\alpha$ das größte Glied ausmitteln. Das $(k+1)$te Glied sey $=$

$$\left[\frac{\alpha}{k}\right] p^{\alpha-k} p'^{k} = t .$$

Das nächst vorhergehende und nächstfolgende Glied sind:

$$\left[\frac{\alpha}{k-1}\right] p^{\alpha-k+1} p'^{k-1} = {}'t , \quad \left[\frac{\alpha}{k+1}\right] p^{\alpha-k-1} p'^{k+1} = t' ,$$

und man wird sich leicht überzeugen, daß

$${}'t = t . \frac{k}{\alpha-k+1} \cdot \frac{p}{1-p}, \quad t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1} \cdot \frac{1-p}{p} .$$

Betrachten wir nun zuerst den einfachsten Fall, wo $p = 1 - p = \frac{1}{2}$ ist; so ist

$${}'t = t . \frac{k}{\alpha-k+1}, \quad t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1} .$$

Die einzelnen Glieder der Reihe seyen A, B, C, D, E, ...; so ist hiernach

$$A = 1, \; B = A . \frac{\alpha}{1}, \; C = B . \frac{\alpha-1}{2}, \; D = C . \frac{\alpha-2}{3}, \ldots$$

$$\ldots . \; t' = t . \frac{\alpha-k}{k+1}, \ldots .$$

woraus sogleich erhellet, daß diese Glieder so lange zunehmen, so lange $\alpha - k > k + 1$, $k < \frac{1}{2}(\alpha - 1)$ ist. Ist α eine gerade Zahl, $= 2\beta$; so hat man also $k < \frac{1}{2}(2\beta - 1)$, $< \beta - \frac{1}{2}$. Folglich nehmen die Glieder zu, bis $k = \beta - 1$, $k + 1 = \beta$, d. i. bis zum $(\beta+1)$ten Gliede, welches $= t'$, da t das $(k+1)$te $= \beta$te, also t' das $(k+2)$te $= (\beta+1)$te Glied ist. Die folgenden Glieder sind

$$t'' = t' . \frac{2\beta-\beta}{\beta+1} = t' . \frac{\beta}{\beta+1} ,$$

$$t''' = t'' . \frac{2\beta-(\beta+1)}{\beta+2} = t'' . \frac{\beta-1}{\beta+2} ,$$

$$t'''' = t''' . \frac{2\beta-(\beta+2)}{\beta+3} = t''' . \frac{\beta-2}{\beta+3} ,$$

. . . . . .

und nehmen folglich offenbar fortwährend ab. Das Glied t' ist also in diesem Falle das größte. Da die Entwicke-

Digitized by Google

lung von $(p + p')^{2\beta}$ bekanntlich $2\beta + 1 = \beta + 1 + \beta$ Glieder hat; so ist t' in dieser Entwickelung das mittelste Glied

$$= \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] p^{2\beta-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta}{\beta}\right] \cdot (\tfrac{1}{2})^{2\beta}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\frac{1}{2}\alpha+1)}{1.2.3\ldots\frac{1}{2}\alpha} \cdot (\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Es ist also am wahrscheinlichsten, daß das Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ist, in α Versuchen $2\beta - \beta = \beta = \frac{1}{2}\alpha$mal eintrifft, und die Wahrscheinlichkeit, daß dies wirklich geschehe, wird durch obigen Ausdruck dargestellt.

Ist α eine ungerade Zahl, $= 2\beta + 1$; so hat man nach dem Obigen $k < \frac{1}{2}(2\beta + 1 - 1)$, $< \beta$, so daß also die Glieder zunehmen bis $k = \beta - 1$, $k + 1 = \beta$, also wieder bis t'. Die folgenden Glieder sind

$$t'' = t' \cdot \frac{2\beta + 1 - \beta}{\beta + 1} = t' \cdot \frac{\beta + 1}{\beta + 1},$$

$$t''' = t'' \cdot \frac{2\beta + 1 - (\beta + 1)}{\beta + 2} = t'' \cdot \frac{\beta}{\beta + 2},$$

$$t'''' = t''' \cdot \frac{2\beta + 1 - (\beta + 2)}{\beta + 3} = t''' \cdot \frac{\beta - 1}{\beta + 3},$$

. . . . . .

und nehmen folglich von t'' ab, welches $= t'$ ist, ab. Die größte Wahrscheinlichkeit ist also entweder t' oder t''. Da nun t' das $(\beta + 1)$te, t'' das $(\beta + 2)$te Glied ist, so ist die Wahrscheinlichkeit am größten, daß das Ereigniß entweder $2\beta + 1 - \beta = \beta + 1$, oder $2\beta + 1 - (\beta + 1) = \beta$mal eintrifft. Die Wahrscheinlichkeit selbst ist

$$= \left[\frac{2\beta + 1}{\beta}\right] p^{2\beta+1-\beta}\, p'^{\beta} = \left[\frac{2\beta + 1}{\beta}\right] \cdot (\tfrac{1}{2})^{\alpha}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\left(\frac{\alpha+1}{2} + 1\right)}{1.2.3\ldots\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)} (\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Da $(p + p')^{2\beta+1}$ bekanntlich $2\beta + 2 = \beta + 1 + 1 + \beta$ Glieder hat; so ist obige Wahrscheinlichkeit ebenfalls das mittelste Glied, wobei jedoch zu bemerken, daß hier zwei Mittelglieder vorkommen, die aber einander gleich sind.

Digitized by Google

70. In dem Falle, wo α eine gerade Zahl, $= 2\beta$, ist, sind nach dem Art. Binomial-Coefficienten (16.) die Gränzen der Probabilität

$$2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2\beta},\quad 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\beta\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{2\beta};$$

$$\text{d. i. } \sqrt{\frac{2}{(\alpha+1)\pi}} \text{ und } \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}},$$

und diese Gränzen kommen einander offenbar desto näher, je größer α ist.

Für $\alpha = 2\beta+1$ ist die Probabilität

$$= \left[\frac{2\beta+1}{2\beta}\right]\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha} = \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\left[\frac{2\beta}{\beta}\right]\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha}.$$

Folglich die Gränzen derselben:

$$\frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha},\quad \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot 2^{2\beta}\cdot\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}\cdot(\tfrac{1}{2})^{\alpha};$$

$$\text{d. i. } \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{(2\beta+1)\pi}}\cdot\tfrac{1}{2},\quad \frac{2\beta+1}{\beta+1}\cdot\sqrt{\frac{2}{2\beta\pi}}\cdot\tfrac{1}{2};$$

$$\text{oder } \frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{\alpha\pi}} \text{ und } \frac{\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\frac{2}{(\alpha-1)\pi}}.$$

71. Andere Nährungsausdrücke erhält man auf folgende Art. Nach Thl. IV. S. 663. ist

$$\log n 1 + \log n 2 + \log n 3 + \log n 3 + \log n 4 + \ldots + \log n x$$
$$= \tfrac{1}{2}\log n 2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\log n x - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \ldots$$
$$= \log n (1,2,3.4\ldots,x)$$
$$= \tfrac{1}{2}\log n 2\pi + (x+\tfrac{1}{2})\log n x + \log n e - x + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \ldots$$

wenn e, wie gewöhnlich die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Für die Bernoullischen Zahlen müssen a. a. O. ihre Werthe gesetzt werden (Thl. I. S. 254.). Also

$$1.2.3..x = \sqrt{2\pi}.x^{x+\frac{1}{2}}.e^{-x+\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots}$$
$$= \sqrt{2\pi}.\frac{x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}.e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\ldots}.$$

Hat man nun im Allgemeinen das Product

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1) = \frac{1.2.3\ldots\alpha}{1.2.3\ldots(\alpha-\beta)};$$

Digitized by Google

so erhält man mittelst der gefundenen Formel

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\beta+1)$$
$$=\left\{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha}}\cdot e^{\frac{1}{12\alpha}-\frac{1}{360\alpha^3}+\ldots}\right\}$$
$$:\left\{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\alpha-\beta}}\cdot e^{\frac{1}{12(\alpha-\beta)}-\frac{1}{360(\alpha-\beta)^3}+\ldots}\right\}$$
$$=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\ldots}.$$

Folglich der Binomial-Coefficient

$$\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right\}-\ldots}$$
$$:\sqrt{2\pi}\cdot\frac{\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}{e^{\beta}}\cdot e^{\frac{1}{12\beta}-\frac{1}{360\beta^3}+\ldots}$$
$$=\frac{\alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot(\alpha-\beta)^{\alpha-\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha-\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\ldots}$$

ein Nährungsausdruck für jeden Binomial-Coefficienten, welchen man, wenn die Anzahl der Factoren sehr groß ist, mit Vortheil gebrauchen wird. Für $\alpha=2\beta$ wird

$$\left[\frac{2\beta}{\beta}\right]=\frac{(2\beta)^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\beta}\right\}-\ldots}$$
$$=\frac{2^{2\beta+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{-\frac{1}{8\beta}-\ldots}=\frac{2^{2\beta}}{\sqrt{\beta\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{8\beta}-\ldots}.$$

Für $\alpha=2\beta+1$ wird

$$\left[\frac{2\beta+1}{\beta}\right]=\frac{(2\beta+1)^{2\beta+\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\pi}\cdot\beta^{\beta+\frac{1}{2}}\cdot(\beta+1)^{\beta+\frac{1}{2}}}\cdot e^{\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{2\beta+1}-\frac{1}{\beta+1}-\frac{1}{\beta}\right\}-\ldots}$$

Nährungsausdrücke für die obige Probabilität lassen sich hieraus nun leicht construiren.

72. Gehen wir nun zu dem allgemeinern Falle über, wenn die Wahrscheinlichkeit nicht $=\frac{1}{2}$ ist; so ist, wenn das größte Glied in der Entwickelung von $(p+p')^{\alpha}$ das

Digitized by Google

$(k+1)$te ist, und $= t$ gesetzt, übrigens ganz die vorige Bezeichnung beibehalten wird, wie vorher (69.):

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\quad t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p}.$$

Folglich ist, da nach der Bedingung der Aufgabe $t > 't$, $t > t'$ seyn muß,

$$t > t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\quad t > t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p},$$

woraus man leicht findet:

$$k < (\alpha+1)(1-p),\ k > \alpha(1-p)-p;$$
$$k < \alpha(1-p)-p+1,\ k > \alpha(1-p)-p,$$

so daß also k die größte in $\alpha(1-p)-p+1$ enthaltene ganze Zahl, oder die ganze Zahl ist, welche zunächst $> \alpha(1-p)-p$ ist. Die vor dem t vorhergehenden, und auf t folgenden Glieder sind

$$'t = t.\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},$$
$$''t = 't.\frac{k-1}{\alpha-k+2}.\frac{p}{1-p},$$
$$'''t = ''t.\frac{k-2}{\alpha-k+3}.\frac{p}{1-p},$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

und

$$t' = t.\frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{1},$$
$$t'' = t'.\frac{\alpha-k-1}{k+2}.\frac{1-p}{p},$$
$$t''' = t''.\frac{\alpha-k-2}{k+3}.\frac{1-p}{p},$$
$$\text{&c.} \qquad \text{&c.}$$

Da nun k nach dem Obigen so bestimmt worden ist, daß $'t < t$, $t' < t$ ist; so sind

$$\frac{k}{\alpha-k+1}.\frac{p}{1-p},\ \frac{\alpha-k}{k+1}.\frac{1-p}{p};$$

folglich um so mehr

$$\frac{k-1}{\alpha-k+2}.\frac{p}{1-p},\ \frac{k-2}{\alpha-k+3}.\frac{p}{1-p},\ \frac{k-3}{\alpha-k+4}.\frac{p}{1-p},\ \ldots$$
$$\frac{\alpha-k-1}{k+2}.\frac{1-p}{p},\ \frac{\alpha-k-2}{k+3}.\frac{1-p}{p},\ \frac{\alpha-k-3}{k+4}.\frac{1-p}{p},\ \ldots$$

echte Brüche, und demnach t, $'t$, $''t$, $'''t$, ... ; t, t',

Digitized by Google

t'', t''', ... zwei abnehmende Reihen, also t das größte Glied in der Entwickelung von $(p+p')^\alpha$.

73. Setzt man, da k die ganze Zahl ist, welche zunächst größer als $\alpha(1-p)-p$ ist,

$$k = \alpha(1-p) - p + \delta,$$

wo δ einen echten Bruch bezeichnet; so erhält man leicht

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k+\delta}{k-\delta+1}.$$

Je größer k und $\alpha - k$ sind, desto genauer ist, da $\delta < 1$,

$$\frac{p}{1-p} = \frac{\alpha-k}{k}.$$

Da nun $\alpha - k$ und k die Exponenten von p und $p' = 1-p$ in dem durch t bezeichneten Gliede sind (69.); so erhellet aus dem Vorhergehenden und aus (66.) leicht, daß bei einer sehr großen Anzahl von Versuchen zur Hervorbringung eines Ereignisses oder seines entgegengesetzten die wahrscheinlichste Verbindung dieser Ereignisse die ist, in welcher jedes derselben seiner Probabilität proportional wiederholt vorkommt.

74. Das $l$te Glied nach oder vor dem größten, d. h. das $(k+1\pm l)$te oder $(k+1+l)$te Glied, wenn man l gehörig positiv und negativ nimmt, ist

$$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k-l+1)}{1.2.3\ldots(k+l)} p^{\alpha-k-l}(1-p)^{k+l}$$

$$= \frac{1.2.3\ldots\alpha}{1.2.3\ldots(k'-1).1.2.3\ldots(k+l)} p^{k'-l}(1-p)^{k+l},$$

für $k+k' = \alpha$.

Eine Nährungsformel zur Berechnung dieses Gliedes erhält man auf folgende Art. Nach (71.) ist, wenn man sich die Potenz von e mit dem zusammengesetzten Exponenten entwickelt denkt:

$$1.2.3\ldots\alpha = \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}.e^{-\alpha}.\sqrt{2\pi}.\left\{1+\frac{1}{12\alpha}+\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k'-1)} = (k'-1)^{1-k'-\frac{1}{2}}.\frac{e^{k'-1}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12(k'-1)}-\ldots\right\},$$

$$\frac{1}{1.2.3..(k+l)} = (k+l)^{-l-k-\frac{1}{2}}.\frac{e^{k+l}}{\sqrt{2\pi}}.\left\{1-\frac{1}{12(k+l)}-\ldots\right\}.$$

Digitized by Google

Der hyperbolische Logarithmus von $(k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}$ ist

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\left\{\log n\, k' + \log n\left(1-\frac{l}{k'}\right)\right\}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\left\{\log n\, k' - \frac{l}{k'} - \frac{l^2}{2k'^2} - \frac{l^3}{3k'^3} - \cdots\right\}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\log n\, k' + l + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$$

$$+ \frac{l^2}{4k'}\cdot\frac{l}{k'} + \frac{l^2}{6k'}\cdot\frac{l}{k'^2} + \tfrac{1}{8}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{l}{k'^2} + \cdots$$

$$- \tfrac{1}{12}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{l}{k'} - \tfrac{1}{20}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^2\cdot\frac{l}{k'^2} - \tfrac{1}{30}\left(\frac{l^2}{k'}\right)^3\cdot\frac{l}{k'^2} - \cdots.$$

Nimmt man nun l im Verhältniß zu k′ nur klein an, so daß nur erst l^2 mit k′ verglichen werden kann; so erhält man näherungsweise hieraus

$$\log n\,(k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

$$= (l-k'-\tfrac{1}{2})\log n\, k' + l + \frac{l}{2k'} - \frac{l^2}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2}$$

$$= \log n\, k'^{\,l-k'-\frac{1}{2}} + \log n\, e^{\,l+\frac{l}{2k'}-\frac{l^2}{2k'}-\frac{l^3}{6k'^2}},$$

und folglich

$$(k'-l)^{l-k'-\frac{1}{2}}$$

$$= e^{\,l-\frac{l^2}{2k'}}\cdot k'^{\,l-k'-\frac{1}{2}}\cdot\left\{1+\frac{l}{2k'}-\frac{l^3}{6k'^2}\right\};$$

also auch $(k+l)^{-l-k-\frac{1}{2}}$

$$= e^{\,-l-\frac{l^2}{2k}}\cdot k^{-l-k-\frac{1}{2}}\cdot\left\{1-\frac{l}{2k}+\frac{l^3}{6k^2}\right\}.$$

Ferner ist nach dem Obigen aus der Gleichung

$$k = \alpha(1-p) - p + \delta,$$

wo $\delta < 1$ ist:

$$p = \frac{\alpha-k+\delta}{\alpha+1} = \frac{k'+\delta}{\alpha+1}.$$

Setzt man nun $p = \frac{k'-z}{\alpha}$; so ist $z < 1$. Denn aus der Gleichung

$$\frac{k'-z}{\alpha} = \frac{k'+\delta}{\alpha+1}$$

erhält man leicht:

$$z = \frac{k' - \alpha\delta}{\alpha+1}.$$

Digitized by Google

Aber $k + k' = \alpha$; also $k' < \alpha + 1$, und um so mehr $k' - \alpha\delta < \alpha + 1$, wenn $\alpha\delta < k'$ ist. Ist aber $\alpha\delta > k'$, so ist, weil $\delta < 1$ ist, doch $\alpha\delta < \alpha$, $\alpha\delta - k' < \alpha$, $< \alpha + 1$. Folglich, ohne Rücksicht auf das Zeichen, immer $z < 1$. Ferner ist

$$1 - p = 1 - \frac{k' - z}{\alpha} = \frac{\alpha - k' + z}{\alpha} = \frac{k + z}{\alpha};$$

$$\text{also } p^{k'-1}(1-p)^{k+1} = \frac{(k'-z)^{k'-1}.(k+z)^{k+1}}{\alpha^\alpha}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left(1 - \frac{z}{k'}\right)^{k'-1}.\left(1 + \frac{z}{k}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left\{1 - \frac{k'-1}{1}.\frac{z}{k'}\right\}\left\{1 + \frac{k+1}{1}.\frac{z}{k}\right\}$$

$$= \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left\{1 + \frac{(k+k')lz}{kk'}\right\} = \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\},$$

wenn man immer die z^2 enthaltenden Glieder vernachlässigt. Aus allem Vorhergehenden erhält man endlich

$$\frac{1.2.3....\alpha}{1.2.3..(k'-1).1.2.3..(k+1)}.p^{k'-1}(1-p)^{k+1}$$

$$= \alpha^{\alpha+\frac{1}{2}}.e^{-\alpha}\sqrt{2\pi}.\left\{1 + \frac{1}{12\alpha}\right\}$$

$$\times e^{1 - \frac{1^2}{2k'}}.k^{1-k'-\frac{1}{2}}.\left\{1 + \frac{1}{2k'} - \frac{1^2}{6k'^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k'-1}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k'-1)}\right\}$$

$$\times e^{-1-\frac{1^2}{2k}}.k^{-1-k-\frac{1}{2}}.\left\{1 - \frac{1}{2k} + \frac{1^2}{6k^2}\right\}$$

$$\times \frac{e^{k+1}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(k+1)}\right\}$$

$$\times \frac{k'^{k'-1}.k^{k+1}}{\alpha^\alpha}\left\{1 + \frac{\alpha lz}{kk'}\right\}.$$

Das Product der Factoren vor den Parenthesen ist, wie man leicht findet,

$$= \frac{\sqrt{\alpha}.e^{-\frac{\alpha 1^2}{2kk'}}}{\sqrt{\pi}.\sqrt{2kk'}}.$$

Das Product der eingeschlossenen Größen ist, wenn man, mit Laplace, die Glieder $\frac{1}{12\alpha}$, $\frac{1}{12(k'-1)}$, $\frac{1}{12(k+1)}$ vernachlässigt,

Digitized by Google

$$= 1 + \frac{1}{2k'} - \frac{l^3}{6k'^2} - \frac{l}{2k} + \frac{l^3}{6k^2} + \frac{\alpha l z}{kk'}$$
$$= 1 + \frac{\alpha l z}{kk'} + \frac{l(k-k')}{2kk'} - \frac{l^3}{6k'^2} + \frac{l^3}{6k^2},$$

ebenfalls mit Vernachlässigung der übrigen Glieder. Also

$$\frac{1.2.3....\alpha}{1.2.3..(k'-1).1.2.3..(k+1)} \cdot p^{k'-1}.(1-p)^{k+1}$$
$$= \frac{\Gamma\alpha \cdot e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}}{\Gamma\pi \cdot \Gamma 2kk'} \cdot \left\{1 + \frac{\alpha l z}{kk'} + \frac{l(k-k')}{2kk'} - \frac{l^3}{6k'^2} + \frac{l^3}{6k^2}\right\},$$

das lte Glied nach dem größten, und folglich das lte Glied vor dem größten

$$\pm \frac{\Gamma\alpha \cdot e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}}{\Gamma\pi \cdot \Gamma 2kk'} \cdot \left\{1 - \frac{\alpha l z}{kk1} - \frac{l(k-k')}{2kk'} + \frac{l^3}{6k'^2} - \frac{l^3}{6k^2}\right\}.$$

Also die Summe dieser beiden Glieder

$$= \frac{2\Gamma\alpha}{\Gamma\pi \cdot \Gamma 2kk'} \cdot e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}}.$$

Also ist die Summe aller Glieder in der Entwickelung von $\{p+(1-p)\}^\alpha$ zwischen dem lten vor dem größten und dem lten nach dem größten, wie man sich leicht überzeugen wird, gleich dem endlichen Integral

$$\Sigma \frac{2\Gamma\alpha}{\Gamma\pi \cdot \Gamma 2kk'} \cdot e^{-\frac{\alpha l^2}{2kk'}},$$

dieses Integral zwischen den Gränzen $l = o$ und $l = l$ genommen, wobei jedoch zu bemerken, daß in dieser Summe das größte Glied zwei Mal enthalten ist, und demnach einmal abgezogen werden muß.

Setzen wir nun die Größe unter dem Integralzeichen $= y$; so ist, da hier das Increment von $l = 1$ ist (Taylors Lehrsatz. 23.):

$$\Sigma y = \left\{\frac{\partial}{e^{\partial l} - 1}\right\}^{-1} y.$$

Also, nach Thl. IV. S. 647, wenn man das dortige $w = 1$, $x = l$ setzt:

$$\Sigma y = \int y \partial l - \tfrac{1}{2} y + \tfrac{1}{12} \frac{\partial y}{\partial l} - \ldots.$$

Digitized by Google

Da nun allgemein

$$\frac{\partial . me^{-nv^2}}{\partial v} = -2mnve^{-nv^2},$$

$$\frac{\partial^2 . me^{-nv^2}}{\partial v^2} = -2mne^{-nv^2} + 4mn^2v^2e^{-nv^2},$$

u. s. f. u. s. f.

ist; so erhellet, wenn man $n = \frac{a}{2kk'}$, $nv = \frac{al}{2kk'}$ setzt, daß die Differentialquotienten $\frac{\partial y}{\partial l}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial l^2}$, ... nur sehr klein seyn können, und man also berechtigt ist,

$$\Sigma y = \int y \partial l - \tfrac{1}{2} y$$

zu setzen, das Integral von $l = o$ bis $l = 1$ genommen. Dies giebt

$$\Sigma^1_o y = \int^1_o y \partial l - \underset{(l=1)}{\tfrac{1}{2} y} + \underset{(l=o)}{\tfrac{1}{2} y}$$

$$= \int^1_o y \partial l - \tfrac{1}{2} y + \frac{\Gamma a}{\Gamma\pi . \Gamma 2kk'}.$$

Bezeichnet man das größte Glied durch Y; so erhält man aus dem obigen allgemeinen Ausdruck für das lte Glied nach dem größten, indem man $l = o$ setzt,

$$Y = \frac{\Gamma a}{\Gamma\pi . \Gamma 2kk'}.$$

Dies giebt

$$\Sigma^1_o y = \int^1_o y \partial l - \tfrac{1}{2} y + Y.$$

Bezeichnen wir die Summe der Glieder zwischen dem lten vor und nach dem größten durch S; so ist nach dem Obigen

$$S = \Sigma^1_o y - Y; \text{ also } S = \int^1_o y \partial l - \tfrac{1}{2} y.$$

Die Summe des lten Gliedes vor und des lten Gliedes nach dem größten ist nach dem Obigen $= y$. Demnach, wenn S' die Summe der Glieder vom lten Gliede vor, bis zum lten Gliede nach dem größten bezeichnet,

$$S' = S + y = \int^1_o y \partial l + \tfrac{1}{2} y.$$

Setzt man nun

$$\frac{l\Gamma a}{\Gamma 2kk'} = t;$$

so erhält man leicht

$$S' = \frac{2}{\Gamma\pi} \int e^{-t^2} \partial t + \frac{\Gamma a}{\Gamma\pi . \Gamma 2kk'} . e^{-t^2},$$

Digitized by Google

das Integral zwischen den Gränzen $l = o$, $l = 1$, d. i. $t = o$, $t = t$, genommen.

Nach dem Obigen ist $k' = \alpha p + z$, $k = \alpha - k' = \alpha(1-p) - z$, woraus leicht

$$\gamma_{2kk'} = \alpha\sqrt{2p(1-p) + \frac{2z}{\alpha}(1-p) - \frac{2z^2}{\alpha^2}}.$$

Auch erhält man leicht

$$\frac{k' \pm 1}{\alpha} - p = \frac{\alpha p + z \pm 1}{\alpha} - p$$
$$= \pm\frac{1}{\alpha} + \frac{z}{\alpha} = \pm\frac{t\gamma_{2kk'}}{\alpha\gamma_\alpha} + \frac{z}{\varphi}.$$

Nach dem ersten Falle der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.) wird durch die Formel

$$\frac{2}{\gamma_\pi}\int e^{-t^2}\partial t + \frac{\gamma_\alpha}{\gamma_\pi \cdot \gamma_{2kk'}} \cdot e^{-t^2}$$

die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, daß das Ereigniß, dessen einfache Wahrscheinlichkeit $= p$ ist, in α Versuchen nicht weniger als $(k'-1)$mal, und nicht öfter als $(k'+1)$mal, eintrifft; oder die Wahrscheinlichkeit, daß die Differenz zwischen dem Verhältniß der Anzahl der Wiederholungen des Ereignisses, dessen Waheseinlichkeit $= p$ ist, zu der ganzen Anzahl der Versuche, und der Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses, zwischen den Gränzen

$$\pm\frac{t\gamma_{2kk'}}{\alpha\gamma_\alpha} + \frac{z}{\alpha}$$

enthalten ist.

75. Es ist nöthig, hier einige Bemerkungen über das Integral

$$\int e^{-t^2}\partial t$$

einzuschalten. Es ist allgemein

$$\int\frac{e^{-t^2}\partial t}{t^{2\alpha}} = -\frac{e^{-t^2}}{2t^{2\alpha+1}} - \frac{2\alpha+1}{2}\int\frac{e^{-t^2}\partial t}{t^{2\alpha+2}},$$

wovon man sich durch Differentiation überzeugen kann. Durch successive Anwendung dieser Formel erhält man

$$\int e^{-t^2}\partial t = -\frac{e^{-t^2}}{2t} + \frac{1 \cdot e^{-t^2}}{2^2 t^3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot e^{-t^2}}{2^3 t^5} + \ldots$$
$$\ldots \pm\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2\alpha-1)\, e^{-t^2}}{2^{\alpha+1} t^{2\alpha+1}} \pm\frac{1 \cdot 3 \ldots (2\alpha+1)}{2^{\alpha+1}}\int\frac{e^{-t^2}\partial t}{t^{2\alpha+2}},$$

Digitized by Google

oder, wenn man diese Reihe in's Unendliche fortsetzt,

$$\int e^{-t^2}\partial t = -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1-\frac{1}{2t^2}+\frac{1.3}{2^2t^4}-\frac{1.3.5}{2^3t^6}+\ldots\right\}.$$

Für $t=\infty$ verschwindet diese Reihe. Also ist zwischen den Gränzen $t=T$, $t=\infty$:

$$\int e^{-t^2}\partial t=\frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1-\frac{1}{2T^2}+\frac{1.3}{2^2T^4}-\frac{1.3.5}{2^3T^6}+\ldots\right\}$$
$$=\frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1-1.q+1.3.q^2-1.3.5.q^3+\ldots\right\}$$

für $\frac{1}{2T^2}=q$. Verwandelt man die eingeschlossene Reihe in einen Kettenbruch (Kettenbruch. 60.), so wird zwischen obigen Gränzen

$$\int e^{-t^2}\partial t=\frac{e^{-T^2}}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}$$

Entwickelt man e^{-t^2} in eine Reihe; so erhält man

$$\int e^{-t^2}\partial t = t-\frac{1}{1}\cdot\frac{t^3}{3}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{t^5}{5}-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{t^7}{7}+\ldots$$

eine für $t=0$ verschwindende Reihe. Also ist zwischen den Gränzen $t=0$, $t=T$:

$$\int e^{-t^2}\partial t=T-\frac{1}{1}\cdot\frac{T^3}{3}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{T^5}{5}-\frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{T^7}{7}+\ldots.$$

Noch eine Reihe erhält man so. Es ist allgemein

$$\int e^{-t^2}t^{2\alpha}\partial t=\frac{e^{-t^2}t^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}+\frac{2}{2\alpha+1}\int e^{-t^2}t^{2\alpha+2}\partial t,$$

wovon man sich ebenfalls leicht durch Differentiation überzeugen wird. Durch successive Anwendung dieser Formel erhält man, wenn die Reihe in's Unendliche fortgesetzt wird,

$$\int e^{-t^2}\partial t = e^{-t^2}t\left\{1+\frac{2t^2}{1.3}+\frac{(2t^2)^2}{1.3.5}+\frac{(2t^2)^3}{1.3.5.7}+\ldots\right\};$$

folglich, zwischen den Gränzen $t=0$, $t=T$:

$$\int e^{-t^2}\partial t = e^{-T^2}T\left\{1+\frac{2T^2}{1.3}+\frac{(2T^2)^2}{1.3.5}+\frac{(2T^2)^3}{1.3.5.7}+\ldots\right\}.$$

Digitized by Google

Die beiden letzten Reihen convergiren immer; doch kann die Convergenz erst spät anfangen. Ist also T groß, so bedient man sich lieber des obigen Kettenbruchs, welcher aber den Gränzen $t = T$, $t = \infty$ entspricht. Um einen Ausdruck für die Gränzen $t = o$, $t = T$ durch einen Kettenbruch zu finden, suche man zuerst den Werth des Integrals zwischen den Gränzen $t = o$, $t = \infty$. Diesen findet man so:

Es ist allgemein

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

wovon man sich leicht durch Differentiation überzeugt. Also durch successive Anwendung dieser Formel:

$$\int \frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{3}x^2 + \frac{1.2}{1.3}\right\}\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{x^5\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{5}x^4 + \frac{1.4}{3.5}x^4 + \frac{1.2.4}{1.3.5}\right\}\sqrt{1-x^2},$$

u. s. w. u. s. w.

und auf ähnliche Art:

$$\int \frac{x^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{4}x^3 + \frac{1.3}{2.4}x\right\}\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3}{2.4}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\left\{\tfrac{1}{6}x^5 + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x\right\}\sqrt{1-x^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}},$$

2c. 2c.

Da nun

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Arc sin } x$$

ist; so erhält man zwischen den Gränzen $x = o$, $x = 1$ hieraus leicht:

$$\int \frac{x^{2r+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.2.4.6\ldots 2r}{1.3.5.7\ldots(2r+1)},$$

$$\int \frac{x^{2r}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1.3.5..(2r-1).\pi}{2.4.6..2r.2}.$$

Folglich zwischen denselben Gränzen

$$\int \frac{x^{2r}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \int \frac{x^{2r+1}\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2r+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Digitized by Google

Setzt man nun

$$x = e^{-qt^2} \text{ und } q(2r+1) = 1 ;$$

so erhält man hieraus leicht nach einigen einfachen Reductionen:

$$2\int \frac{e^{-t^2} t\partial t}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} \cdot \int \frac{e^{-t^2(1+q)} t\partial t}{\sqrt{\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}}} = \frac{\pi}{2} ,$$

Aber durch Entwickelung in eine Reihe:

$$\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q} = t^2 - \frac{2q(t^2)^2}{1.2} + \ldots ,$$

und folglich

$$\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q} = t^2$$

für $q = o$. Also, wenn man in obiger Gleichung $q = o$ setzt,

$$2\int \frac{e^{-t^2} t\partial t}{t} \cdot \int \frac{e^{-t^2} t\partial t}{t} = \frac{\pi}{2}, \int e^{-t^2} \partial t = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} ,$$

zwischen den Gränzen $x = o$, $x = 1$, d. i. $t = \infty$, $t = o$. Da nun dieses bestimmte Integral bekanntlich die Summe aller Werthe von e^{-t^2} ausdrückt, welche man erhält, wenn man dem t alle Werthe von $t = \infty$ bis $t = o$ beilegt; so ist, weil alle diese Werthe von e^{-t^2} offenbar positiv sind, das obere Zeichen zu nehmen, und

$$\int_o^\infty e^{-t^2} \partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

zu setzen. Es ist aber augenscheinlich

$$\int_o^T e^{-t^2} \partial t = \int_o^\infty e^{-t^2} \partial t - \int_T^\infty e^{-t^2} \partial t .$$

Also nach dem Obigen

$$\int_o^T e^{-t^2} \partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-T^2}}{2T}\left\{1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1.3}{2^2 T^4} - \frac{1.3.5}{2^3 T^6} + \ldots\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} - \frac{e^{-T^2}}{2T} \cdot \cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\cfrac{4q}{1+\ldots}}}}}$$

für $q = \frac{1}{2T^2}$.

Digitized by Google

Eine Tafel der Werthe dieses Integrals und seiner Logarithmen hat Kramp in seiner Analyse des réfractions astronomiques. Leips. 1798. p. 193—210. geliefert.

76. Also die Probabilität in (74.), wenn man die Gränze von $t = T$ setzt,

$$= \frac{2}{\Upsilon\pi}\left\{\tfrac{1}{2}\Upsilon\pi - \frac{e^{-T^2}}{2T}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\ldots}}}}\right\} + \frac{\Upsilon\alpha}{\Upsilon\pi.\Upsilon 2kk'}\cdot e^{-T^2}$$

$$= 1 - \frac{e^{-T^2}}{T\Upsilon\pi}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{2q}{1+\cfrac{3q}{1+\ldots}}}} + \frac{e^{-T^2}}{\Upsilon 2\alpha\pi\left\{p(1-p)+\frac{z}{\alpha}(1-2p)-\frac{z^2}{\alpha^2}\right\}},$$

wo $q = \frac{1}{2T^2}$, $k' = \alpha p + z$, $z = k' - \alpha p$ ist.

Läßt man T wachsen, so ist klar, daß sowohl e^{-T^2}, als auch $\frac{e^{-T^2}}{T} = \frac{1}{Te^{T^2}}$ sehr schnell abnehmen, und obige Probabilität sich also immer mehr und mehr der Einheit, d. i. der Gewißheit, nähert, und daß, wenn $T = \infty$, die Wahrscheinlichkeit selbst zur Gewißheit werden muß.

Nimmt man die Gränzen

$$\pm\frac{t\Upsilon 2kk'}{\alpha\Upsilon\alpha} + \frac{z}{\alpha}$$

als unveränderlich an; so erhellet, daß, wenn α wächst, auch t oder T wachsen muß. Daraus ergiebt sich folgender merkwürdige und wichtige Satz:

Die Anzahl der Versuche kann immer so sehr vervielfältigt werden, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Unterschied zwischen dem Verhältniß der Anzahl der Wiederholungen eines Ereignisses, dessen Wahrscheinlichkeit $= p$ ist, zu der Anzahl aller Versuche, und der Wahrschein-

Digitized by Google

lichkeit p dieses Ereignisses, gegebene Gränzen nicht überschreitet, der Gewißheit beliebig nahe gebracht wird (Vergl. 74.). Wir sind bei dem Beweise dieses wichtigen, zuerst von Jacob Bernoulli gefundenen, Theorems vorzüglich der Darstellung von Laplace gefolgt. Auch Moivre hat sich mit diesem Gegenstande beschäftigt.

Berechnung der wahrscheinlichsten Resultate aus gegebenen Beobachtungen. Methode der kleinsten Quadrate.

77. Wir beginnen diesen wichtigen Abschnitt, welcher die Grundlage aller Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Erscheinungen der Natur enthält, größerer Deutlichkeit wegen mit einem Beispiele. Der Gegenstand dieses Abschnitts ist nach unserer Ansicht nicht sowohl selbst schon eine Anwendung der Probabilitätenrechnung, sondern er liefert vielmehr eine Theorie der wichtigsten Anwendungen derselben, und durfte daher, als unbedingt zur Theorie selbst gehörend, hier nicht fehlen.

Folgende, aus Bohnenbergers Astronomie. Tübingen. 1811. S. 450. entlehnte, Tabelle enthält eine Uebersicht der unter verschiedenen geographischen Breiten beobachteten Längen des Sexagesimalsecunden-Pendels. Die Länge des Sexagesimalsecunden-Pendels zu Paris, nach Bordas Bestimmung = 440,559 par. Linien, ist in derselben als Einheit angenommen.

Beobachter.	Ort.	Breite.	Pendellänge.
Bouguer.	Peru.	0°. 0′	0,99669
—	Portobello.	9. 34	0,99689
Le Gentil.	Pondichery.	11. 56	0,99710
Campbell.	Jamaika.	18. 0	0,99745
Bouguer.	Klein Goava.	18. 27	0,99728
La Caille.	Cap.	33. 55	0,99877
	Formentera.	38. 40	0,99908
Darquier.	Toulouse.	43. 36	0,99950
Liesganig.	Wien.	48. 13	0,99987
Bouguer.	Paris.	48. 50	1,00000
v. Zach.	Gotha.	50. 56	1,00006
Graham.	London.	51. 31	1,00018
Grischow.	Arensberg.	58. 15	1,00074
Mallet.	Petersburg.	59. 56	1,00101
Maupertuis.	Pello.	66. 48	1,00137
Mallet.	Ponoi.	67. 5	1,00148

Digitized by Google

Der flüchtigste Blick auf diese Tabelle zeigt, daß die Pendellängen vom Aequator nach den Polen hin wachsen. Nur die Pendellängen von Jamaika und Klein Goava machen hiervon eine Ausnahme. Die Breiten sind aber hier auch so wenig von einander verschieden, daß diese Abweichung vom Gesetze offenbar Folge der Beobachtungsfehler ist, da der von dem Breitenunterschiede herrührende Unterschied der Pendellängen kleiner sein kann als der Beobachtungsfehler. Vergleicht man aber genauer die Zunahmen der Pendellängen mit den Breiten, so bemerkt man sehr bald, daß erstere, vom Aequator angerechnet, sehr nahe den Quadraten der Sinus der Breiten proportional sind, welches Gesetz wir hier nur als ein Resultat aus den Beobachtungen ansehen wollen, da wir uns natürlich auf die Bestätigung, welche es durch die Theorie der Attraction elliptischer Sphäroide in der Mechanik erhält, in diesem Werke nicht einlassen können. Bezeichnen wir also im Allgemeinen die der Breite L entsprechende Pendellänge durch l, so wird das bemerkte Gesetz offenbar durch folgende Formel dargestellt:

$$l = A + B \sin L^2 .$$

A und B sind zwei constante Größen. Für $L = 0$ erhält man $A = l$, und für $L = 90^0$ ergiebt sich leicht $B = l - A$, so daß also A die Pendellänge unter dem Aequator, B der Unterschied zwischen der Pendellänge unter dem Pol und der Pendellänge unter dem Aequator ist. Daß obige Gleichung auch für das Decimalsecunden-Pendel richtig bleibt, folgt leicht aus der bekannten mechanischen Formel

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}, \quad l = \frac{2gt^2}{\pi^2}$$

wo t die Schwingungszeit bezeichnet. Ist t eine Sexagesimalsecunde, t_1 eine Decimalsecunde, l_1 die Länge des Decimalsecunden-Pendels, und $t_1 = \alpha t = 0{,}324 . t$ (Bohnenberger a. a. O. S. 212.); so ist

$$l_1 = \frac{2gt_1^2}{\pi^2} = \frac{2g\alpha^2 t^2}{\pi^2} = \alpha^2 l ;$$

also offenbar auch

$$A_1 = \alpha^2 A, \quad B_1 = \alpha^2 B .$$

Digitized by Google

Aus obiger Gleichung ergiebt sich aber durch Multiplication mit α^2 sogleich:

$$\alpha^2 l = \alpha^2 A + \alpha^2 B \sin L^2 ,$$

d. i. $l_1 = A_1 + B_1 \sin L^2$, so daß also die Gleichung

$$l = A + B \sin L^2$$

auch für das Decimalsecunden-Pendel gilt. Neuere Beobachtungen der Länge des Decimalsecunden-Pendels, welche wir im Folgenden gebrauchen werden, enthält folgende Tafel (Biot Astronomie. Paris. 1810. T. III. Add. p. 164.):

Beobachter.	Ort.	Breite.	Pendellänge in Metern.
Arago, Chair, Biot.	Formentera.	38°.39'.46"	0,7412517
Mathieu, Biot.	Figeac.	44. 36. 45	0,7416243
Mathieu, Biot.	Bordeaux.	44. 50. 25	0,7416151
Mathieu, Biot.	Clermont.	46. 48. 4	0,7417157
Bouvard, Mathieu, Biot.	Paris.	48. 50. 15	0,7419262
Mathieu, Biot.	Dunkerque.	51. 2. 8	0,7420865

Soll die Formel

$$l = A + B \sin L^2$$

praktisch brauchbar seyn, so kommt es vorzüglich auf die genaue Bestimmung der Constanten A, B an. Man überzeugt sich leicht, daß dazu zwei beobachtete Pendellängen hinreichen. Ist nämlich l' irgend eine andere Pendellänge, L' die entsprechende Breite, so hat man

$$l = A + B \sin L^2 , \quad l' = A + B \sin L'^2 ;$$
$$l - l' = B \{ \sin L^2 - \sin L'^2 \}$$
$$= B \{ \sin L + \sin L' \} \{ \sin L - \sin L' \}$$
$$= B \sin (L + L') \sin (L - L') ;$$
$$B = \frac{l - l'}{\sin (L + L') \sin (L - L')} ,$$
$$A = l - B \sin L^2 = l' - B \sin L'^2 ;$$

woraus sich A, B bestimmen lassen. Gebraucht man zu dieser Bestimmung die Pendellängen von Dünkirchen und Formentera aus obiger Tafel, so findet man

$$A = 0^m, 7397310, \quad B = 0^m, 00389622 ;$$

folglich überhaupt die Pendellänge unter der Breite L =

Digitized by Google

$$l = 0^m, 7397310 + 0^m, 0038962 . \sin L^2 ,$$

immer in Bezug auf das Decimalsecunden-Pendel. Wie man hieraus die Formel für das Secunden-Pendel nach der gewöhnlichen Zeiteintheilung findet, ersieht man aus dem Obigen leicht.

Wären die Pendellängen von Formentera und Dünkirchen völlig genau, so würden mittelst obiger Rechnung auch die Constanten A, B mit völliger Genauigkeit bestimmt seyn. Jedes Resultat einer Beobachtung oder eines Versuchs ist aber mit Fehlern behaftet, so daß also auch die obigen numerischen Werthe von A, B nicht auf völlige Richtigkeit Anspruch machen können, welches sich noch deutlicher zeigen würde, wenn man zu der Bestimmung dieser Größen andere Beobachtungen als die obigen anwenden wollte, wodurch man nie dieselben Werthe von A, B, wie es doch bei völliger Genauigkeit der Beobachtungen nothwendig der Fall seyn müßte, sondern vielmehr immer einigermaßen von einander verschiedene Werthe dieser Größen erhalten würde. Hieraus entspringt, wie man nun leicht sehen wird, das Bedürfniß, im Besitz einer allgemeinen Methode zu seyn, welche in allen den Fällen, wo, wie in dem obigen Beispiele, aus gegebenen Beobachtungen mittelst einer ebenfalls gegebenen Relation oder Gleichung gewisse unbekannte Größen bestimmt werden sollen, sogleich die Werthe derselben liefert, welche mit der größten Wahrscheinlichkeit auf Richtigkeit Anspruch machen können. Wir setzen hierbei voraus, daß die Anzahl der gegebenen Beobachtungen größer sey, als die Anzahl der zu bestimmenden Größen, daß also, wie man sich auszudrücken pflegt, das Problem mehr als bestimmt sey. Wäre die Anzahl der Beobachtungen der Anzahl der unbekannten Größen gleich, oder kleiner als dieselbe, so wäre die Aufgabe im ersten Falle eine bestimmte, im letzten eine unbestimmte. In den Naturwissenschaften ist es aber ein Hauptgesetz, durch Vervielfältigung der Beobachtungen und Versuche sich der völligen Richtigkeit der aus ihnen abgeleiteten Resultate möglichst zu nähern, und nur auf diesem Wege ist eine solche Annäherung möglich. Man

Digitized by Google

sieht also, daß nur der oben supponirte Fall zulässig ist, wenn die aus den Beobachtungen abgeleiteten Resultate auch nur einiges Zutrauen verdienen sollen. Wir verlassen jetzt unser obiges Beispiel, jedoch in der Absicht, nachher wieder zu demselben zurückzukehren, und wenden uns nun zu der Aufsuchung einer allgemeinen Methode der Berechnung gegebener Beobachtungen, welche den oben an eine solche Methode gemachten Anforderungen entspricht.

78. Seyen daher überhaupt

$$X, X', X'', X''', X'''', \ldots$$

Functionen der unbekannten Größen $x, y, z, v, \ldots$. Die Anzahl jener sey $= n$, die Anzahl dieser $= m$, wo also nach der schon oben gemachten Voraussetzung immer $n > m$ ist. Durch unmittelbare Beobachtungen seyen respective die Werthe

$$A, A', A'', A''', A'''' \ldots$$

obiger Functionen gefunden. Die Fehler der einzelnen Beobachtungen seyen nach der Reihe

$$\begin{aligned} A - X &= \Delta, \\ A' - X' &= \Delta', \\ A'' - X'' &= \Delta'', \\ A''' - X''' &= \Delta''', \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

welche also ebenfalls Functionen von $x, y, z, v, \ldots$ sind.

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler bei der ersten Beobachtung in der That Δ sey, ist offenbar eine Function von Δ, und soll daher überhaupt durch $\varphi\Delta$ bezeichnet werden. Setzen wir nun zuerst voraus, daß die Beobachtungen alle gleich gut sind, und folglich kein Grund vorhanden ist, die eine für mehr oder weniger genau zu halten als eine andere, so wird auch bei allen Beobachtungen die Wahrscheinlichkeit, gleich große Fehler zu begehen, gleich groß seyn, welches uns berechtigt, bei allen obigen Beobachtungen nach der Reihe die Wahrscheinlichkeiten, die Fehler $\Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots$ zu begehen, durch dasselbe Functionszeichen zu bezeichnen. Es sind also

$$\varphi\Delta, \varphi\Delta', \varphi\Delta'', \varphi\Delta''', \varphi\Delta'''', \ldots$$

Digitized by Google

die Wahrscheinlichkeiten, bei den obigen einzelnen Beobachtungen nach der Reihe die Fehler

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots.$$

zu begehen.

Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehler aller einzelnen Beobachtungen respective Δ, Δ', Δ'', Δ''', Δ'''', ... sind, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß alle diese Fehler bei den einzelnen Beobachtungen wirklich begangen werden, wenn wir diese Wahrscheinlichkeit durch W bezeichnen, nach (9.) =

$$W = \varphi\Delta . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' . \varphi\Delta''' . \varphi\Delta'''' \ldots.$$

Wären die Größen x, y, z, v, ... so bestimmt, daß zwischen den Functionen

$$X, X', X'', X''', X'''', \ldots.$$

und den durch unmittelbare Beobachtung gefundenen Werthen

$$A, A', A'', A''', A'''', \ldots,$$

derselben die Differenzen

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots.$$

wirklich statt fänden, so würden offenbar x, y, z, v, ... richtig bestimmt seyn. Die Unmöglichkeit einer solchen Bestimmung liegt aber, weil man ja die Fehler der Beobachtungen selbst nicht kennt, klar vor Augen, und es bleibt also nichts anderes übrig, als die Größen x, y, z, v, ... auf eine solche Weise zu bestimmen, daß die Wahrscheinlichkeit, obige Fehler begangen zu haben, d. h. daß

$$W = \varphi\Delta . \varphi\Delta' . \varphi\Delta' . \varphi\Delta'' . \varphi\Delta'''' \ldots.$$

ein Maximum wird.

Für das Maximum ist aber bekanntlich, wenn die partiellen Differentialquotienten, wie gewöhnlich, durch Einschließung in Parenthesen bezeichnet werden,

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial v}\right) = \ldots = 0.$$

Aber nach einer sehr bekannten Regel der Differentialrechnung, die sich leicht aus dem Artikel: Differentialformeln (4.) ergiebt:

Digitized by Google

$$\frac{1}{W}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{1}{\varphi\Delta}\left(\frac{\partial\varphi\Delta}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varphi\Delta'}\left(\frac{\partial\varphi\Delta'}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varphi\Delta''}\left(\frac{\partial\varphi\Delta''}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varphi\Delta'''}\left(\frac{\partial\varphi\Delta'''}{\partial x}\right) + \ldots\ldots\ldots$$

Folglich, wenn man

$$\frac{\partial\varphi\Delta}{\varphi\Delta} = \varphi'\Delta.\partial\Delta$$

setzt, zugleich in Bezug auf die übrigen partiellen Differentialquotienten von W, wie leicht erhellen wird:

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial y}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial y}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial y}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial z}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial z}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial z}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial v}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial v}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial v}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots\ldots = 0$$

u. s. f. u. s. f.

wo es nun vorzüglich auf die Bestimmung der Form der Function φ', und somit auch der Function φ ankommt, wozu man auf folgende Weise gelangt.

Nach einem längst bekannten Grundsatze erhält man, wenn eine Größe aus mehrern gleich guten Beobachtungen zu bestimmen ist, den wahrscheinlichsten Werth derselben, indem man das arithmetische Mittel aller sich aus den Beobachtungen ergebenden Werthe nimmt, wozu die Annahme berechtigt, daß offenbar die bei den Beobachtungen begangenen Fehler bald positiv, bald negativ seyn werden, so daß also diese Fehler, wenn man nach dem obigen Grundsatze verfährt, sich gegenseitig aufheben oder compensiren werden. Wollte man annehmen, daß die Fehler immer nur mit demselben Zeichen behaftet wären, so würden sich einige Beobachtungen offenbar zu weit von der Wahrheit entfernen, und die Beobachtungen würden also

Digitized by Google

nicht den Namen gleich guter Beobachtungen verdienen, wie doch bei Anwendung des obigen Princips immer vorausgesetzt werden muß. Zugleich ist klar, daß das Resultat auf eine desto größere Wahrscheinlichkeit wird Anspruch machen können, je größer die Anzahl der zum Grunde gelegten Beobachtungen ist, so daß also auch hier wieder Vervielfältigung der Beobachtungen als unbedingtes Erforderniß zur Erreichung möglichster Genauigkeit hervortritt. Auf obiges Princip gestützt, gelangt man nun auf folgende Weise zur Bestimmung der Form der Function φ'. Sey einmal

$$X \leftrightarrows X' = X'' = X''' = X'''' = \ldots = x,$$

so ist nach obigem Grundsatze, wenn wir den wahrscheinlichsten Werth von x durch p bezeichnen,

$$p = \frac{1}{n}\left(A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots\right),$$

da oben die Anzahl der in der Parenthese eingeschlossenen Größen $= n$ gesetzt worden ist. Also sind die wahrscheinlichsten Werthe der Fehler Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... nach der Reihe:

$$A - p, A' - p, A'' - p, A''' - p, \ldots.$$

Für diese Werthe der Fehler muß demnach die Wahrscheinlichkeit W ein Maximum werden, und es müssen folglich auch die oben für das Maximum entwickelten Bedingungsgleichungen statt finden, wenn man für die Fehler die obigen wahrscheinlichsten Werthe setzt. Die erste dieser Gleichungen wird, da wir hier

$$X = X' \leftrightarrows X'' = X''' = X'''' = \ldots = x$$

gesetzt haben:

$$\left(\frac{\partial(A-x)}{\partial x}\right)\varphi'\Delta + \left(\frac{\partial(A'-x)}{\partial x}\right)\varphi'\Delta' + \left(\frac{\partial(A''-x)}{\partial x}\right)\varphi'\Delta'' + \ldots = 0;$$

also, wenn man differentiirt:

$$-\varphi'\Delta - \varphi'\Delta' - \varphi'\Delta'' - \varphi'\Delta''' - \ldots = 0,$$
$$\varphi'\Delta + \varphi'\Delta' + \varphi'\Delta'' + \varphi'\Delta''' + \ldots = \rho;$$

d. i.

$$\varphi'(A-p) + \varphi'(A'-p) + \varphi'(A''-p) + \varphi'(A'''-p) + \ldots = 0.$$

Setzen wir nun ferner

$$A' = A'' = A''' = A'''' = \ldots = A - nB;$$

Digitized by Google

so ist

$$\begin{aligned} &A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots \\ &= A + (n-1)(A-nB) \\ &= nA - n(n-1)B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{n}\left(A + A' + A'' + A''' + A'''' + \ldots\right) \\ &= A - (n-1)B. \end{aligned}$$

Folglich

$$\begin{aligned} A - p &= A - A + (n-1)B = (n-1)B \\ A' - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \\ A'' - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \\ A''' - p &= A - nB - A + (n-1)B = -B \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Also nach dem Obigen

$$\varphi'(n-1)B + \varphi'(-B) + \varphi'(-B) + \varphi'(-B) + \ldots = 0,$$

d. i., da die Anzahl der Größen A', A'', A''', u. s. f. $= n-1$ ist:

$$\begin{aligned} &\varphi'(n-1)B + (n-1)\varphi'(-B) = 0, \\ &\varphi'(1-n)(-B) - (1-n)\varphi'(-B) = 0, \\ &\varphi'(1-n)(-B) = (1-n)\varphi'(-B). \end{aligned}$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten mit $(1-n)(-B)$ dividirt:

$$\frac{\varphi'(1-n)(-B)}{(1-n)(-B)} = \frac{\varphi'(-B)}{(-B)}.$$

Diese Relation gilt offenbar für jedes B, und jedes ganze positive n. Setzen wir also überhaupt $-B = \Theta$, so hat man für jedes ganze positive n und jedes Θ:

$$\frac{\varphi'(1-n)\Theta}{(1-n)\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta}.$$

Für $n = 2$ erhält man

$$\frac{\varphi'(-\Theta)}{(-\Theta)} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta}.$$

Also

$$\frac{\varphi'(1-n)\Theta}{(1-n)\Theta} = \frac{\varphi'(n-1)\Theta}{(n-1)\Theta},$$

und daher, wenn wir $n-1 = \mu$ setzen, für jedes ganze positive μ:

$$\frac{\varphi'\mu\Theta}{\mu\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta},$$

Digitized by Google

woraus, wenn man, welches offenbar verstattet ist, Θ für $\mu\Theta$, und also $\frac{\Theta}{\mu}$ für Θ schreibt, sogleich folgt, daß auch für jedes ganze positive μ:

$$\frac{\varphi'\Theta}{\Theta} = \frac{\varphi'\frac{\Theta}{\mu}}{\frac{\Theta}{\mu}}$$

seyn muß. Bezeichnet nun $\frac{\mu}{\nu}$ irgend einen positiven Bruch, so ist hiernach:

$$\frac{\varphi'\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\right)\Theta}{\left(\pm\frac{\mu}{\nu}\Theta\right)} = \frac{\varphi'\frac{\mu}{\nu}(\pm\Theta)}{\frac{\mu}{\nu}(\pm\Theta)} = \frac{\varphi'\mu\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)}{\mu\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)}$$

$$= \frac{\varphi'\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)}{\left(\pm\frac{\Theta}{\nu}\right)} = \frac{\varphi'(\pm\Theta)}{(\pm\Theta)} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta},$$

so daß also für jeden positiven oder negativen Bruch $\frac{\mu}{\nu}$ immer

$$\frac{\varphi'\frac{\mu}{\nu}\Theta}{\frac{\mu}{\nu}\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta}$$

ist. Da bei Irrationalgrößen statt derselben ihre Gränzen gesetzt werden können, so erhellet nun, daß für jedes λ

$$\frac{\varphi'\lambda\Theta}{\lambda\Theta} = \frac{\varphi'\Theta}{\Theta},$$

und folglich offenbar $\frac{\varphi'\Theta}{\Theta}$, also auch $\frac{\varphi'\Delta}{\Delta}$ eine constante Größe seyn muß. Setzen wir also überhaupt

$$\frac{\varphi'\Theta}{\Theta} = k.$$

Nun ist nach dem Obigen

$$\frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta} = \varphi'\Theta.\partial\Theta, \quad \varphi'\Theta = \frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta.\partial\Theta};$$

also

$$\frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta.\partial\Theta} = k\Theta, \quad \frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta} = k\Theta\partial\Theta;$$

$$\int\frac{\partial\varphi\Theta}{\varphi\Theta} = k\int\Theta\partial\Theta;$$

Digitized by Google

d. i. $\log n \varphi\Theta = \frac{1}{2}k\Theta^2 + \text{Const}$, oder, für Const $= \log n k'$:

$$\begin{aligned}\log n \varphi\Theta &= \tfrac{1}{2}k\Theta^2 + \log n\, k' \\ &= \log n\, e^{\frac{1}{2}k\Theta^2} + \log n\, k' \\ &= \log n\,(k' e^{\frac{1}{2}k\Theta^2})\end{aligned}$$

Also

$$\varphi\Theta = k' e^{\frac{1}{2}k\Theta^2},$$

Also auch

$$\varphi\Delta = k' e^{\frac{1}{2}k\Delta^2}.$$

79. Setzen wir nun nach und nach Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... für Θ, und multipliciren die einzelnen Functionen in einander, so wird nach dem Obigen

$$\begin{aligned}W &= \varphi\Delta \cdot \varphi\Delta' \cdot \varphi\Delta'' \cdot \varphi\Delta''' \ldots \\ &= k'^n \cdot e^{\frac{1}{2}k(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)},\end{aligned}$$

Wäre k positiv, so würde, da

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

immer positiv ist, offenbar W mit

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

in's Unendliche zu- und abnehmen, also gar kein Maximum statt finden können, wobei nur zu bemerken, daß $e > 1$ ist. Also muß k negativ seyn, und man ist folglich berechtigt, $k = -2h^2$ zu setzen, so daß also

$$\varphi\Delta = k' e^{-h^2\Delta^2},$$

wo es nun noch vorzüglich auf die Bestimmung der Constante k' ankommt. Zu dem Ende wollen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen suchen, daß der Fehler überhaupt zwischen den Gränzen δ und δ' enthalten ist. Zu dem Ende denke man sich das Intervall $\delta' - \delta$ in n gleiche Intervalle getheilt, deren jedes $= i$, und nehme an, daß in jedem dieser kleinen Intervalle für alle Punkte desselben die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in einen dieser Punkte falle, gleich groß sey, welches offenbar mit desto größerem Rechte verstattet ist, je kleiner die einzelnen durch i bezeichneten Intervalle sind. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler δ sey, ist überhaupt $= \varphi\delta$, und eben so die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $\delta + i$,

Digitized by Google

$\delta + 2i$, $\delta + 3i$, ... $\delta + ni = \delta'$ sey, $= \varphi(\delta + i)$, $\varphi(\delta + 2i)$, $\varphi(\delta + 3i)$, ... $\varphi(\delta + ni)$. Da nun für alle einzelnen Intervalle die Wahrscheinlichkeit als gleich groß angenommen wird, so ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze die Wahrscheinlichkeit im 1ten, 2ten, 3ten, ... nten Intervalle nach der Reihe:

$$\varphi(\delta+i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \cdots,$$

$$\varphi(\delta+2i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{2i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{2^2i^2}{1.2} + \cdots,$$

$$\varphi(\delta+3i) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{3i}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{3^2i^2}{1.2} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi(\delta+ni) = \varphi\delta + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{ni}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{n^2i^2}{1.2} + \cdots.$$

Wir haben hier nämlich die Wahrscheinlichkeit am Ende eines jeden Intervalls für die in dem ganzen entsprechenden Intervalle herrschende Wahrscheinlichkeit genommen. Die Wahrscheinlichkeiten, daß der Fehler überhaupt in das 1te, 2te, 3te, ... nte Intervall falle, sind, da jedes i Punkte enthält, nach dem in (8.) bewiesenen Satze von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit, welcher hier offenbar seine Anwendung findet:

$$\varphi(\delta+i).i,\ \varphi(\delta+2i).i,\ \varphi(\delta+3i).i,\ \ldots\ \varphi(\delta+ni).i$$

und folglich nach demselben Satze die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler überhaupt in irgend eins dieser Intervalle, d. h. überhaupt zwischen die Gränzen δ und δ' falle,

$$= \varphi(\delta+i).i + \varphi(\delta+2i).i + \varphi(\delta+3i).i + \ldots + \varphi(\delta+ni).i$$

d. i., wenn man die oben gefundenen Reihen substituirt,

$$= \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^3}{1.2} + \cdots$$

$$+ \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{2i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{2^2i^3}{1.2} + \cdots$$

$$+ \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{3i^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{3^2i^3}{1.2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \varphi\delta.i + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{ni^2}{1} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{n^2i^3}{1.2} + \cdots$$

Digitized by Google

$$= \varphi\delta.ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i^2}{1}(1+2+3+..+n)$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^3}{1.2}(1^2+2^2+3^2+..+n^2)$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\cdot\frac{i^4}{1.2.3}(1^3+2^3+3^3+..+n^3)$$
$$+ \ldots\ldots$$

d. i., wenn man nach dem Art. Potenz. (39.) die dort gefundenen Summen der Potenzen substituirt, wobei hier nur alle Coefficienten, auf deren Werth es weiter nicht ankommt, durch (.) bezeichnet werden,

$$= \varphi\delta.ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{i^2}{1}\left\{\tfrac{1}{2}n^2+(.)n\right\}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{i^3}{1.2}\left\{\tfrac{1}{3}n^3+(.)n^2+(.)n\right\}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\cdot\frac{i^4}{1.2.3}\left\{\tfrac{1}{4}n^4+(.)n^3+(.)n^2+(.)n\right\}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

$$= \varphi\delta.ni + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\left\{\tfrac{1}{2}(ni)^2+(.)ni.i\right\}\cdot\frac{1}{1}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\left\{\tfrac{1}{3}(ni)^3+(.)(ni)^2.i+(.)ni.i^2\right\}\cdot\frac{1}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\left\{\tfrac{1}{4}(ni)^4+(.)(ni)^3.i+..+(.)ni.i^3\right\}\cdot\frac{1}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

also, wenn wir

$$ni = \delta' - \delta = \alpha$$

setzen,

$$= \varphi\delta.\alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\left\{\tfrac{1}{2}\alpha^2+(.)\alpha i\right\}\cdot\frac{1}{1}$$
$$+ \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\left\{\tfrac{1}{3}\alpha^3+(.)\alpha^2 i+(.)\alpha i^2\right\}\cdot\frac{1}{1.2}$$
$$+ \frac{\partial^3\varphi\delta}{\partial\delta^3}\left\{\tfrac{1}{4}\alpha^4+(.)\alpha^3 i+(.)\alpha^2 i^2+(.)\alpha i^3\right\}\cdot\frac{1}{1.2.3}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

und demnach, wenn I überhaupt eine Function von i bezeichnet, welche für $i = o$ verschwindet, obige Wahrscheinlichkeit

$$= \varphi\delta.\alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}\cdot\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}\cdot\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \ldots. + I.$$

Je kleiner i ist, desto mehr nähert sich dieser Ausdruck unbedingter Richtigkeit. Um selbige aber wirklich zu errei-

Digitized by Google

chen, muß man $i = o$ setzen, wodurch auch I verschwindet, und sich folglich für die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' liegt, die Reihe

$$\varphi\delta.\alpha + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}.\frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}.\frac{\alpha^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$= \varphi\delta.\frac{\delta'-\delta}{1} + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}.\frac{(\delta'-\delta)^2}{1.2} + \frac{\partial^2\varphi\delta}{\partial\delta^2}.\frac{(\delta'-\delta)^3}{1.2.3} + \cdots$$

ergiebt. Setzen wir nun ferner

$$\Phi = \int\varphi\Theta.\partial\Theta\,;$$

so ist

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta} = \varphi\Theta,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2} = \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta},\ \frac{\partial^3\Phi}{\partial\Theta^3} = \frac{\partial^2\varphi\Theta}{\partial\Theta^2},\ \ldots;$$

also, wenn man

$$\delta' = \Theta + (\delta' - \Theta)$$

für Θ setzt, nach dem Taylor'schen Lehrsatze

$$\underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} = \Phi + \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}.\frac{\delta'-\Theta}{1} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial\Theta^2}.\frac{(\delta'-\Theta)^2}{1.2} + \cdots$$
$$= \Phi + \varphi\Theta.\frac{\delta'-\Theta}{1} + \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta}.\frac{(\delta'-\Theta)^2}{1.2} + \cdots$$
$$\underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} - \Phi = \varphi\Theta.\frac{\delta'-\Theta}{1} + \frac{\partial\varphi\Theta}{\partial\Theta}.\frac{(\delta'-\Theta)^2}{1.2} + \cdots$$

Also, wenn man jetzt δ für Θ setzt:

$$\underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} - \underset{(\Theta=\delta)}{\Phi} = \varphi\delta.\frac{\delta'-\delta}{1} + \frac{\partial\varphi\delta}{\partial\delta}.\frac{(\delta'-\delta)^2}{1.2} + \cdots;$$

Da nun aber

$$\Phi = \int\varphi\Theta.\partial\Theta$$

ist, so ist nach der gewöhnlichen Bezeichnung der bestimmten Integrale:

$$\int_\delta^{\delta'}\varphi\Theta.\partial\Theta = \underset{(\Theta=\delta')}{\Phi} - \underset{(\Theta=\delta)}{\Phi}$$

und demnach die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' liegt,

$$= \int_\delta^{\delta'}\varphi\Theta.\partial\Theta,$$

oder, was dasselbe ist,

$$= \int_\delta^{\delta'}\varphi\Delta.\partial\Delta.$$

Digitized by Google

Nach den gewöhnlichen Begriffen der Integralrechnung schließt man hier ganz kurz so. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler in das unendlich kleine Intervall $\partial\Delta$ fällt, ist nach (8.) $= \varphi\Delta.\partial\Delta$. Folglich die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen o und δ' enthalten ist,

$$= \int \varphi\Delta.\partial\Delta$$

das Integral so bestimmt, daß es für $\Delta = o$ verschwindet, und dann $\Delta = \delta'$ gesetzt, woraus denn weiter leicht folgt, daß die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' enthalten ist, durch das obige bestimmte Integral ausgedrückt wird. Obige Darstellung schien mir jedoch den Vorzug der größern Strenge und Deutlichkeit zu haben, wenn sie sich auch nicht eben so sehr durch Kürze empfiehlt. Sie würde sich auch leicht ganz allgemein machen lassen. Die große Wichtigkeit des Gegenstandes mag diese Weitläufigkeit, mit der vielleicht Einigen gedient ist, entschuldigen.

Also ist nach dem Obigen die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Gränzen δ und δ' liegt,

$$= k' \int_{\delta}^{\delta'} e^{-h^2\Delta^2} \partial\Delta .$$

In (75.) haben wir aber gefunden:

$$\int_0^{\infty} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} .$$

Folglich auch nach bekannten Sätzen der Integralrechnung

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} ;$$

also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Delta^2} \partial\Delta = \sqrt{\pi} .$$

Für $h\Delta = \Delta_1$ ist

$$\int e^{-h^2\Delta^2} \partial\Delta = \int \frac{e^{-\Delta_1^2} \partial\Delta_1}{h} = \frac{1}{h} \int e^{-\Delta_1^2} \partial\Delta_1 .$$

Ist $\Delta = \infty$, so ist auch $\Delta_1 = \infty$. Also

Digitized by Google

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} \partial\Delta = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\Delta_1^2} \partial\Delta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ liegt, nach dem Obigen

$$= k' \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 \Delta^2} \partial\Delta = \frac{k'\sqrt{\pi}}{h},$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist aber offenbar Gewißheit, indem der Fehler nothwendig zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen muß, d. i. $= 1$. Also

$$1 = \frac{k'\sqrt{\pi}}{h}, \quad k' = \frac{h}{\sqrt{\pi}};$$

und folglich endlich:

$$\varphi\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2},$$

$$W = h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2 (\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots)}.$$

Nach dem Obigen müssen x, y, z, v, ... so bestimmt werden, daß W ein Maximum wird. Dem Maximum von W entspricht aber offenbar das Minimum von

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots.$$

Also müssen x, y, z, v, ... so bestimmt werden, daß die Summe der Quadrate der Fehler ein Minimum wird.

Man nennt dieses Princip aus leicht begreiflichen Gründen das Princip der kleinsten Quadrate, und die darauf gegründete Methode der Bestimmung der unbekannten Größen die Methode der kleinsten Quadrate.

80. Dieses Princip, weiter verfolgt, führt nun zu folgender analytischen Methode zur Bestimmung der unbekannten Größen, wenn wir zunächst, welches in der That auch der am häufigsten vorkommende Fall ist, nur Gleichungen des ersten Grades voraussetzen. Die gegebenen Gleichungen seyen

$$\begin{aligned}
X &= a - bx - cy - dz - ev - \ldots. \\
X' &= a' - b'x - c'y - d'z - e'v - \ldots. \\
X'' &= a'' - b''x - c''y - d''z - e''v - \ldots, \\
X''' &= a''' - b'''x - c'''y - d'''z - e'''v - \ldots,
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Digitized by Google

so erhält man für die Fehler (§. 78.) leicht folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\Delta &= A - a + bx + cy + dz + ev + \ldots,\\
\Delta' &= A' - a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots.\\
\Delta'' &= A'' - a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots.\\
\Delta''' &= A''' - a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots,
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

oder, wenn wir

$$A - a = a,\ A' - a' = a',\ A'' - a'' = a'';\ A''' - a''' = a''' \ldots.$$

setzen:

$$\begin{aligned}
\Delta &= a + bx + cy + dz + ev + \ldots.\\
\Delta' &= a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots.\\
\Delta'' &= a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots.\\
\Delta''' &= a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots,
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Es muß aber

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots,$$

ein Minimum, und folglich

$$2\Delta\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + 2\Delta'\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) + 2\Delta''\left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) + \ldots = 0,$$

$$\Delta\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) + \Delta'''\left(\frac{\partial\Delta'''}{\partial x}\right) + \ldots = 0$$

seyn, wo die eingeschlossenen Differentialquotienten wieder partielle Differentiale sind. Aber

$$\left(\frac{\partial\Delta}{\partial x}\right) = b,\ \left(\frac{\partial\Delta'}{\partial x}\right) = b',\ \left(\frac{\partial\Delta''}{\partial x}\right) = b'', \ldots,$$

Also

$$b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots = 0.$$

Verfährt man in Bezug auf die übrigen unbekannten Größen eben so, so erhält man:

$$\begin{aligned}
b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots &= 0\\
c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots &= 0\\
d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots &= 0\\
e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots &= 0
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

eben so viele Gleichungen des ersten Grades als unbekannte Größen, welche also aus derselben durch Elimination nach bekannten algebraischen Methoden gefunden werden kön-

Digitized by Google

nen. Setzt man in der ersten Gleichung für die Fehler ihre obigen Ausdrücke, so erhält man

$$\begin{aligned}
o = {} & b\,(a + bx + cy + dz + ev + \ldots) \\
& + b'(a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots) \\
& + b''(a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots) \\
& + b'''(a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots) \\
& + \ldots\ldots\ldots \\
= {} & + ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots \\
& + (bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \ldots)x \\
& + (bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \ldots)y \\
& + (bd + b'd' + b''d'' + b'''d''' + \ldots)z \\
& + \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

oder, nach einer leicht zu verstehenden abkürzenden Bezeichnung mittelst des Summenzeichens $\int$, zugleich in Bezug auf die übrigen obigen Gleichungen, die sich natürlich eben so wie die erste behandeln lassen:

$$\begin{aligned}
&\int ab + x\int bb + y\int bc + z\int bd + \ldots = o \\
&\int ac + x\int bc + y\int cc + z\int cd + \ldots = o \\
&\int ad + x\int bd + y\int cd + z\int dd + \ldots = o \\
&\int ae + x\int be + y\int ce + z\int de + \ldots = o \\
&\qquad \text{u. s. f.} \qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

welches nun die völlig entwickelten Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Größen sind.

Sey z. B.

$$\begin{aligned}
X &= x - y + 2z \\
X' &= 3x + 2y - 5z \\
X'' &= 4x + y + 4z \\
X''' &= -x + 3y + 3z
\end{aligned}$$

und durch Beobachtung gefunden:

$$A = 3,\ A' = 5,\ A'' = 21,\ A''' = 14;$$

so erhält man leicht nach dem Obigen die Gleichungen für die Fehler:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 3 - x + y - 2z \\
\Delta' &= 5 - 3x - 2y + 5z \\
\Delta'' &= 21 - 4x - y - 4z \\
\Delta''' &= 14 + x - 3y - 3z\,.
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
a &= 3,\ b = -1,\ c = 1,\ d = -2 \\
a' &= 5,\ b' = -3,\ c' = -2,\ d' = 5 \\
a'' &= 21,\ b'' = -4,\ c'' = -1,\ d'' = -4 \\
a''' &= 14,\ b''' = 1,\ c''' = -3,\ d''' = -3\,.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Bildet man nun die durch $\int$ bezeichneten Summen, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\ 88 + 27x + 6y &= 0 \\ -\ 70 + 6x + 15y + z &= 0 \\ -\ 107 + y + 54z &= 0 . \end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen findet man durch Elimination die wahrscheinlichsten Werthe:

$$x = 2{,}470 ; y = 3{,}551 ; z = 1{,}916 .$$

81. Kehren wir nun wieder zu dem obigen Beispiel vom Pendel (77.) zurück. Sey das Dortige

$$l = X, A = x, B = y ;$$

also die gegebene Gleichung:

$$X = x + y \sin L^2 .$$

Die zweiten a. a. O. mitgetheilten sechs Beobachtungen geben die durch Beobachtung gefundenen Werthe:

$$\begin{aligned} A &= 0{,}7412517 \\ A' &= 0{,}7416243 \\ A'' &= 0{,}7416151 \\ A''' &= 0{,}7417157 \\ A^{IV} &= 0{,}7419262 \\ A^{V} &= 0{,}7420865 . \end{aligned}$$

Folglich sind, wenn man die Sinus der entsprechenden Breiten gehörig substituirt:

$$\begin{aligned} \Delta &= 0{,}7412517 - x - 0{,}3903417 . y \\ \Delta &= 0{,}7416243 - x - 0{,}4942370 . y \\ \Delta' &= 0{,}7416151 - x - 0{,}4972122 . y \\ \Delta'' &= 0{,}7417157 - x - 0{,}5136117 . y \\ \Delta^{IV} &= 0{,}7419262 - x - 0{,}5667721 . y \\ \Delta^{V} &= 0{,}7420865 - x - 0{,}6045628 . y . \end{aligned}$$

Wendet man nun auf diese Gleichungen die obige allgemeine Methode an, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -\ 4{,}4502195 + 6x + 3{,}0657375 . y &= 0 \\ -\ 2{,}27397288 + 3{,}0657375 . x + 1{,}59339312 . y &= 0 . \end{aligned}$$

Also, wenn man mit 6 dividirt:

$$\begin{aligned} -\ 0{,}74170325 + x + 0{,}51095625 . y &= 0 \\ -\ 0{,}37899548 + 0{,}51095625 . x + 0{,}26556552 . y &= 0 . \end{aligned}$$

Bestimmt man nun aus diesen beiden Gleichungen nach be-

Digitized by Google

kannten Methoden der Algebra x, y; so erhält man, da nach (78.) Alles in Metern ausgedrückt ist:

$$x = A = 0^m,739703526$$
$$y = B = 0^m,003913689 ;$$

also, wegen

$$l = A + B \sin L^2 ,$$

die Länge des Decimalsecunden-Pendels unter der Breite L:

$$l = 0^m,739703526 + 0^m,003913689 . \sin L^2 ,$$

A ist die Länge des Decimalsecunden-Pendels unter dem Aequator, B der Unterschied zwischen dieser Pendellänge und der Pendellänge unter dem Pol. Wir haben dieses lehrreiche Beispiel aus Biot Traité d'Astronomie phys. T. III. p. 164 — 169. entlehnt. Die Rechnungen sind von Mathieu gemacht, hier aber noch mehr den oben entwickelten allgemeinen Formeln gemäß zu führen gesucht worden.

Die ersten in (77.) mitgetheilten Beobachtungen, mit Ausnahme der Pendellänge von Formentera, hat Puissant (Traité de Géodésie. T. II. p. 341.) berechnet. Er findet als Resultat, welches ich noch hieher setzen will:

$$l = 0^m,7395752 + 0^m,00407830 . \sin L^2 .$$

82. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Δ zwischen die Gränzen $-\delta$, $+\delta$ falle, ist nach dem Vorhergehenden

$$= \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \partial\Delta = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\Delta^2} \frac{d.h\Delta}{h}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2} \partial . h\Delta ,$$

oder, wenn wir überhaupt

$$\int e^{-h^2\Delta^2} \partial . h\Delta = \psi(h\Delta)$$

setzen, obige Wahrscheinlichkeit

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \psi(+h\delta) - \psi(-h\delta) \right\} .$$

Für eine andere Reihe von Beobachtungen ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen die Gränzen $-\delta'$ und $+\delta'$ falle,

$$= \int_{-\delta'}^{+\delta'} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h'^2\Delta^2} \partial\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \psi(+h'\delta') - \psi(-h'\delta') \right\} .$$

Digitized by Google

Ist also $h\delta = h'\delta'$, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei den ersten Beobachtungen der Fehler zwischen die Grenzen $-\delta$, $+\delta$, bei den zweiten zwischen die Grenzen $-\delta'$, $+\delta'$ falle, gleich groß. Ist also bei den ersten Beobachtungen für eine gewisse Wahrscheinlichkeit das Intervall, in welchem der Fehler liegt, $-\delta$, $+\delta$, oder der Fehler selbst $= \delta$, entweder positiv oder negativ genommen, so ist bei den zweiten Beobachtungen für dieselbe Wahrscheinlichkeit der Fehler $= \delta' = \frac{h\delta}{h'}$. Setzen wir nun

$$h : h' = 1 : n,\ h' = nh;$$

$$\text{so ist } \delta' = \frac{h\delta}{nh} = \frac{1}{n}\delta,\ \delta = n\delta',$$

und es kann also bei den ersten Beobachtungen eben so leicht (d. i. mit derselben Wahrscheinlichkeit) ein nfacher Fehler begangen werden, wie bei den zweiten ein einfacher. Man legt daher nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauche den zweiten Beobachtungen eine nfache Genauigkeit oder Präcision, einen nfachen Werth, ein nfaches Gewicht bei, oder es verhalten sich überhaupt rücksichtlich der Güte, des Werths oder Gewichts die ersten Beobachtungen zu den zweiten $= 1 : n = h : h'$, so daß also überhaupt durch $h : h'$ der verhältnißmäßige Werth, die verhältnißmäßige Präcision der Beobachtungen dargestellt wird. Man nennt daher die Größe h selbst die Präcision, den Werth oder das Gewicht der entsprechenden Beobachtungen.

83. Das in (79.) entwickelte Princip setzt alle in Rechnung zu nehmenden Beobachtungen als gleich gut voraus. Haben aber die Beobachtungen ungleiches Gewicht, so seyen, wie gewöhnlich,

$$\Delta, \Delta', \Delta'', \Delta''', \Delta'''', \ldots$$

die Fehler, und

$$h, h', h'', h''', h'''', \ldots$$

die respectiven Gewichte der gegebenen Beobachtungen. Unter der Voraussetzung, daß alle Beobachtungen mit gleicher Genauigkeit gemacht wären, setze man das Gewicht $= 1$, und bezeichne die Fehler der Beobachtungen nach der Reihe durch

Digitized by Google

$$\Delta_1, \Delta'_1, \Delta''_1, \Delta'''_1, \ldots;$$

so erhellet, weil sich offenbar die Fehler umgekehrt wie die Gewichte verhalten, augenblicklich die Richtigkeit der folgenden Proportionen und Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1 : h &= \Delta : \Delta_1 \;;\; \Delta_1 = h\Delta \\
1 : h' &= \Delta' : \Delta'_1 \;;\; \Delta'_1 = h'\Delta' \\
1 : h'' &= \Delta'' : \Delta''_1 \;;\; \Delta''_1 = h''\Delta'' \\
1 : \Delta''' &= \Delta''' : \Delta'''_1 \;;\; \Delta'''_1 = h'''\Delta'''
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

Da nun nach dem Princip der kleinsten Quadrate die unbekannten Größen so bestimmt werden müssen, daß

$$\Delta_1^2 + \Delta'^2_1 + \Delta''^2_1 + \Delta'''^2_1 + \ldots.$$

ein Minimum wird, so muß auch jetzt diese Bestimmung so vorgenommen werden, daß

$$(h\Delta)^2 + (h'\Delta')^2 + (h''\Delta'')^2 + (h'''\Delta''')^2 + \ldots.$$

ein Minimum wird. Es ist also hiermit vorliegender Fall auf den ersten Fall zurückgeführt, indem man nur statt der Fehler selbst die mit den respectiven Gewichten der entsprechenden Beobachtungen multiplicirten Fehler setzt. Ist daher, wie in (80.),

$$\begin{aligned}
\Delta &= a + bx + cy + dz + ev + \ldots. \\
\Delta' &= a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots. \\
\Delta'' &= a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots. \\
\Delta''' &= a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots.
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

so ist

$$\begin{aligned}
h\Delta &= ah + bhx + chy + dhz + \ldots. \\
h'\Delta' &= a'h' + b'h'x + c'h'y + d'h'z + \ldots. \\
h''\Delta'' &= a''h'' + b''h''x + c''h''y + d''h''z + \ldots. \\
h'''\Delta''' &= a'''h''' + b'''h'''x + c'''h'''y + d'''h'''z + \ldots.
\end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

und die unbekannten Größen sind also so zu bestimmen, daß

$$(h\Delta)^2 + (h'\Delta')^2 + (h''\Delta'')^2 + (h'''\Delta''')^2 + \ldots.$$

ein Minimum wird, welches natürlich auf dieselben Gleichungen zwischen den unbekannten Größen wie in (80.) führt, wenn nur respective

Digitized by Google

$$\begin{array}{llll} ah\ , & bh\ ; & ch\ , & dh\ , \ldots. \\ a'h\ , & b'h'\ , & c'h'\ , & d'h'\ , \ldots. \\ a''h''\ , & b''h''\ , & c''h''\ , & d''h''\ , \ldots. \\ a'''h'''\ , & b'''h'''\ , & c'''h'''\ , & d'''h'''\ , \ldots. \end{array}$$

u. s. f. u. s. f.

statt der dortigen

$$\begin{array}{llll} a\ , & b\ , & c\ , & d\ , \ldots. \\ a'\ , & b'\ , & c'\ , & d'\ , \ldots. \\ a''\ , & b''\ , & c''\ , & d''\ , \ldots. \\ a'''\ , & b'''\ , & c'''\ , & d'''\ , \ldots. \end{array}$$

u. s. f. u. s. f.

gesetzt werden.

84. Das Vorhergehende bezieht sich auf Gleichungen des ersten Grades, oder sogenannte lineare Gleichungen. Es läßt sich aber jeder andere Fall auf diesen zurückführen. Da nämlich die Anzahl der unbekannten Größen $= m$, die Anzahl der gegebenen Gleichungen $= n$, und $n > m$ ist, so berechne man mittelst der gewöhnlichen Eliminationsmethoden aus m der gegebenen Gleichungen die genäherten Werthe

$$x_1\ ,\ y_1\ ,\ z_1\ ,\ v_1\ ,\ \ldots.$$

der m unbekannten Größen, setze nun

$$x = x_1 + x'\ ,\ y = y_1 + y'\ ,\ z = z_1 + z'\ ,\ v = v_1 + v'\ ,\ \ldots.$$

und führe diese Ausdrücke in die gegebenen Gleichungen für x, y, z, v, ... ein. Da nun bei Beobachtungen welche im Allgemeinen den Namen guter Beobachtungen verdienen, bei denen nämlich nicht augenscheinliche Fehler vorgefallen sind — und solche dürfen ja überhaupt nur in Rechnung genommen werden, wenn das Resultat brauchbar seyn soll — offenbar x', y', z', v', ... immer nur sehr klein seyn werden, so kann man alle die erste übersteigenden Dimensionen dieser Unterschiede vernachlässigen, wodurch die gegebenen Gleichungen sogleich auf den Fall linearer Gleichungen zurückgeführt werden.

85. Nach diesen Bemerkungen kehren wir zu dem ersten Falle, wo die gegebenen Gleichungen linear, und die Gewichte der Beobachtungen nicht von einander verschieden sind, wieder zurück. Vorzüglich ist nun noch die Bestim-

Digitized by Google

mung der relativen Gewichte der durch die obige Methode gefundenen Werthe der einzelnen unbekannten Größen übrig. Wir gehen dabei von einer nähern Betrachtung der Function

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots,$$

welche im Folgenden immer durch V bezeichnet werden soll, aus, schicken jedoch noch folgenden allgemeinen Satz von den Functionen voraus.

Wenn die Function

$$F = f(x, y, z, \ldots) - \varphi(x, y, z, \ldots)$$

von einer der in ihr enthaltenen veränderlichen Größen, z. B. x, unabhängig ist, so erhält man den von x unabhängigen Ausdruck dieser Function, wenn man x aus der Gleichung

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$$

bestimmt, und den erhaltenen Ausdruck für x in die gegebene Function setzt.

Da die gegebene Function von x unabhängig ist, so müssen alle mit x behafteten Glieder sich gegenseitig aufheben, und es muß also allgemein

$$f(x, y, z, \ldots) = \psi(x, y, z, \ldots) + f'(y, z, \ldots)$$
$$\varphi(x, y, z, \ldots) = \psi(x, y, z, \ldots) + \varphi'(y, z, \ldots);$$

folglich

$$F = f'(y, z, \ldots) - \varphi(y, z, \ldots)$$

seyn. Bestimmt man nun x aus der Gleichung

$$\varphi(x, y, z, \ldots) = 0,$$
$$\text{d. i. } \psi(x, y, z, \ldots) + \varphi'(y, z, \ldots) = 0;$$

so erhält man für x einen Ausdruck, welcher eine Function von y, z, ... ist, und durch X bezeichnet werden soll. Setzt man denselben für x, so erhält man aus obiger Gleichung

$$\psi(X, y, z, \ldots) + \varphi'(y, z, \ldots) = 0,$$
$$\psi(X, y, z, \ldots) = -\varphi'(y, z, \ldots).$$

Folglich, wenn man den gefundenen Werth von x auch in die gegebene Function setzt, nach dieser Substitution

$$F = f(X, y, z, \ldots) - \varphi(X, y, z, \ldots)$$
$$= \psi(X, y, z, \ldots) + f'(y, z, \ldots) - \varphi(X, y, z, \ldots)$$
$$= -\varphi'(y, z, \ldots) + f'(y, z, \ldots) - \varphi(X, y, z, \ldots).$$

Digitized by Google

Aber nach dem Obigen

$$\varphi(X, y, z, \ldots) = 0;$$

also

$$F = f(y, z, \ldots) - \varphi'(y, z, \ldots)$$

der schon oben gefundene von x befreite Ausdruck der Function F.

86. Setzen wir nun

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots = V,$$

und (vergl. 80.)

$$P = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots$$
$$Q = c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots$$
$$R = d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots$$
$$S = e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots$$

u. s. f. u. s. f.

wobei immer

$$\Delta = a + bx + cy + dz + ev + \ldots,$$
$$\Delta' = a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots.$$
$$\Delta'' = a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots.$$
$$\Delta''' = a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''v + \ldots.$$

u. s. f. u. s. f.

ist. Differentiirt man V nach x, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = 2\Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + 2\Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + 2\Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + \Delta\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

$$\begin{aligned} = {} & (a + bx + cy + dz + ev + \ldots).b \\ & + (a' + b'x + c'y + d'z + e'v + \ldots).b' \\ & + (a'' + b''x + c''y + d''z + e''v + \ldots).b'' \\ & + (a''' + b'''x + c'''y + d'''z + e'''y + \ldots).b''' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = {} & ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots. \\ & + (bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \ldots.)x \\ & + (bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \ldots.)y \\ & + (bd + b'd' + b''d'' + b'''d''' + \ldots.)z \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Man kann folglich

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots$$

Digitized by Google

setzen, wo immer α eine Summe von Quadraten, und folglich positiv ist. Setzt man der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots = \Omega ,$$

so läßt sich leicht zeigen, daß

$$V - \frac{\Omega^2}{\alpha} = V' ,$$

von x unabhängig ist. Differentirt man nämlich nach x, so erhält man

$$\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \frac{2\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)$$

$$= 2\Omega - \frac{2\Omega}{\alpha} \cdot \alpha = 2\Omega - 2\Omega = 0 ,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt. Ferner ergiebt sich auch aus der Gleichung

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Delta\left(\frac{\partial \Delta}{\partial x}\right) + \Delta'\left(\frac{\partial \Delta'}{\partial x}\right) + \Delta''\left(\frac{\partial \Delta''}{\partial x}\right) + \ldots$$

unmittelbar, daß

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots ,$$

d. i. daß

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = P , \text{ und eben so}$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = Q ,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = R ,$$

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = S ,$$

u. s. f. u. s. f.

ist, wovon wir späterhin Gebrauch machen werden.

Da nun

$$V' = V - \frac{\Omega^2}{\alpha}$$

von x unabhängig ist, so erhält man den von x befreiten Ausdruck für V', wenn man x aus der Gleichung

$$\Omega = 0$$

Digitized by Google

bestimmt, und den gefundenen Ausdruck für x setzt (85.). Nach dieser Substitution wird, wegen $\Omega = 0$,

$$V' = V,$$

so daß also V', eben so wie V, eine Summe von Quadraten ist, die aber von x unabhängig ist. Auch ist klar, daß in den Größen, aus deren Quadraten V' besteht, alle unbekannte Größen nur in der ersten Dimension vorkommen, eben so wie in V. Also ist ganz wie vorher

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)' = \lambda' + \beta' y + \gamma' z + \delta' v + \ldots = \Omega;$$

β' ist, wie vorher α, positiv, und

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'',$$

welches nach dem Obigen natürlich kein x mehr enthält, ist auch von y unabhängig. Man erhält daher wieder den von y befrei'ten Ausdruck von V'', wenn man y aus der Gleichung

$$\Omega' = 0$$

bestimmt, und den gefundenen Werth substituirt, wodurch man

$$V'' = V''$$

erhält, so daß also V'' wieder eine Function von ganz ähnlicher Beschaffenheit wie V' und V ist, auf welche sich also wieder ganz dieselben Schlüsse wie vorher anwenden lassen, wie sogleich erhellen wird.

Man hat also nach dem Bisherigen:

$$V - \frac{\Omega^2}{\alpha} = V', \quad V = \frac{\Omega^2}{\alpha} + V';$$

$$V' - \frac{\Omega'^2}{\beta'} = V'', \quad V' = \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V'';$$

$$V'' - \frac{\Omega''^2}{\gamma''} = V''', \quad V'' = \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V''';$$

$$V''' - \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} = V'''', \quad V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''';$$

u. s. f. u. s. f.

wo jede der Functionen

$$V, V', V'', V''', V'''', \ldots$$

eine unbekannte Größe weniger enthält als die nächst vor-

Digitized by Google

hergehende, und α, β', γ'', δ''', ... alle positiv sind. Durch successive Substitution erhält man hieraus leicht

$$\begin{aligned} V &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + V' \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + V'' \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + V''' \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''', \end{aligned}$$

u. s. f. u. s. f.

d. i. endlich,

$$\begin{aligned} V &= \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + ... \\ &= \frac{\Omega^2}{\alpha} + \frac{\Omega'^2}{\beta'} + \frac{\Omega''^2}{\gamma''} + \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + ... + \text{Const} \end{aligned}$$

wo alle Nenner positiv sind.

87. Man denke sich jetzt irgend ein System

$$l, l', l'', l''', ...$$

bestimmter Werthe von

$$x, y, z, v, ...,$$

und bezeichne die Fehler, d. i. die Unterschiede von den wahren Werthen, durch

$$x', y', z', v', ...,$$

so daß die wahren Werthe selbst

$$x = l + x', y = l' + y', z = l'' + z', v = l''' + v', ...$$

sind; so ist nach (79.) die Wahrscheinlichkeit dieses Systems, d. i. die Wahrscheinlichkeit, daß die Fehler wirklich die obigen, an sich natürlich unbekannten, Werthe haben,

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2(\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + ..)}$$

oder, nach der in 6.) gebrauchten Bezeichnung,

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2 V},$$

und folglich der Größe

$$e^{-h^2 V}$$

proportional. Läßt man nun x um ∂x sich ändern, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß x zwischen den Grenzen x, $x + \partial x$ enthalten sey, indem alle übrigen unbekannten Größen ungeändert bleiben, wenn man ∂x als unendlich

Digitized by Google

klein annimmt, nach der Regel der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit (8.), offenbar der Größe

$$e^{-h^2V}\partial x$$

proportional. Folglich überhaupt die Wahrscheinlichkeit, daß, indem alle übrigen unbekannten Größen ungeändert bleiben, der Werth von x zwischen den endlichen Gränzen $-\delta$ und $+\delta$ enthalten sey, dem bestimmten Integral

$$\int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2V}\partial x$$

proportional, wovon man sich nach einer strengen Methode ganz auf dieselbe Weise wie in (79.) bei einem ganz ähnlichen Fall überzeugen kann, indem die Allgemeinheit der dortigen Schlüsse leicht in die Augen fällt. Läßt man nun x völlig unbestimmt, so sind $-\infty$ und $+\infty$ die Gränzen, zwischen welche sein Werth überhaupt fallen kann, und demnach, wenn x unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit des in Rede stehenden Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V}\partial x$$

proportional. Nach (79.) ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

und nach (86.)

$$e^{-h^2V}\partial x = e^{-h^2\left\{\frac{1}{a}\Omega^2 + V'\right\}}\partial x$$

$$= e^{-h^2V'} \cdot e^{-\frac{1}{a}h^2\Omega^2}\partial x,$$

wo V' kein x mehr enthält, so daß also

$$\int e^{-h^2V}\partial x = e^{-h^2V'}\int e^{-\frac{1}{a}h^2\Omega^2}\partial x.$$

Da nun ferner (86.)

$$\Omega = 1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots$$

ist, so ist, da hier bloß x als veränderlich betrachtet wird:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial x}{\partial\Omega} = \frac{1}{\alpha}.$$

Digitized by Google

Folglich

$$e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial x = e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega\cdot\frac{\partial x}{\partial\Omega} = \frac{1}{\alpha}e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega,$$

$$\int e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega.$$

Da

$$\Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta v + \ldots,$$

und α positiv ist (86.), die Größen y, z, v, ... aber als constant betrachtet werden, so ist offenbar gleichzeitig $x = \mp\infty$, $\Omega = \mp\infty$, wo die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen. Also

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V}\partial x = \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{\alpha}h^2\Omega^2}\partial\Omega$$
$$= \frac{1}{\alpha}e^{-h^2V'}\cdot\frac{\Gamma\pi}{h\Gamma\frac{1}{\alpha}} = h^{-1}\alpha^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2V'}$$

wo V′ nur y, z, v, ... enthält.

Also ist, indem x unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit des Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen der Größe

$$e^{-h^2V'}$$

proportional. Betrachtet man nun ferner auch y als unbestimmt, so ist die Wahrscheinlichkeit des Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen ganz eben so dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V'}\partial y = h^{-1}\beta'^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2V''},$$

d. i. der Größe

$$e^{-h^2V''}$$

proportional, woraus ferner folgt, daß, wenn auch z unbestimmt bleibt, die Wahrscheinlichkeit des Systems der Werthe der übrigen unbekannten Größen dem bestimmten Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2V''}\partial z = h^{-1}\gamma''^{-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-h^2V'''},$$

Digitized by Google

d. i. der Größe

$$e^{-h^2 V'''}$$

proportional ist, u. s. f.

Obgleich wir die folgenden Betrachtungen auf den Fall beschränken werden, wenn nur vier unbekannte Größen x, y, z, v zu bestimmen sind, so wird dies doch der Allgemeinheit nicht schaden. Die Wahrscheinlichkeit des Werthes von v ist nach dem Vorhergehenden der Größe

$$e^{-h^2 V''}$$

proportional. Aber nach (86.)

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + V'''',$$

wo V'''' kein v mehr enthält, und demnach eine constante Größe ist, so daß also

$$V''' = \frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C,$$

obige Wahrscheinlichkeit folglich der Größe

$$e^{-h^2\left\{\frac{\Omega'''^2}{\delta'''} + C\right\}} = e^{-h^2 C} \cdot e^{-h^2 \frac{\Omega'''^2}{\delta'''}},$$

d. i. der Größe

$$e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}}$$

proportional ist. Die Wahrscheinlichkeit wird also am größten, wenn

$$e^{-\frac{h^2 \Omega'''^2}{\delta'''}}$$

ein Maximum wird. Differentiirt man nun diese bloß von v abhängende Function, und setzt den Differentialquotienten $= 0$, so erhält man:

$$-\frac{h^2}{\delta'''} e^{-\frac{h^2 \Omega''^2}{\delta'''}} \cdot 2\Omega''' \cdot \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = 0,$$

Aber (86.)

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta''' v, \quad \frac{\partial \Omega'''}{\partial v} = \delta'''.$$

Folglich

Digitized by Google

$$-2h^2\Omega'''\varrho^{-\frac{h^2\Omega'''^2}{\delta'''}} = 0,$$

woraus sogleich:

$$\Omega''' = 0,\ \lambda''' + \delta'''v = 0,\ v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''}$$

welches also der wahrscheinlichste Werth von v ist. Wir hätten zu demselben Resultat auch auf anderm Wege mittelst unserer frühern Formeln gelangen können, und werden nachher auf die Uebereinstimmung der Resultate besonders aufmerksam machen. Der wahre Werth von v ist also für diese Bestimmung, wenn wir, wie oben, den Fehler durch v' bezeichnen:

$$v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + v',$$

welches, für v in Ω''' gesetzt, giebt:

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta'''\left\{-\frac{\lambda'''}{\delta'''} + v'\right\} = \delta'''v',$$

so daß also die Wahrscheinlichkeit, den Fehler v' zu begehen, der Größe

$$e^{-\frac{h^2\delta'''^2v'^2}{\delta'''}} = e^{-h^2\delta'''v'^2}$$

proportional ist. Die Wahrscheinlichkeit, bei den unmittelbaren Beobachtungen den Fehler Δ zu begehen, ist nach (78. 79.) der Größe

$$e^{-h^2\Delta^2}$$

proportional, und h ist die Präcision oder das Gewicht der Beobachtungen. Dächte man sich nun den obigen Werth von v durch directe Beobachtung gefunden, so würde das Gewicht oder die Präcision dieser Beobachtung $= \sqrt{h^2\delta'''} = h\sqrt{\delta'''}$ seyn, so daß sich also das Gewicht der obigen Bestimmung von v zu dem Gewichte der Beobachtungen verhält wie $h\sqrt{\delta'''} : h = \sqrt{\delta'''} : 1$, oder es ist das Gewicht der wahrscheinlichsten Bestimmung von $v = \sqrt{\delta'''}$, wenn man das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ setzt.

Es ist nun nach (86.)

$$P = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \Omega$$

$$Q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right) + \frac{\Omega}{\beta}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)$$

$$= \Omega' + \frac{\beta}{\alpha}\Omega,$$

Digitized by Google

$$\text{da } \Omega = \lambda + \alpha x + \beta y + \delta z + \ldots,$$

also das partielle Differential

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) = \beta$$

ist. Ferner ist

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial z}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial z}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z}\right) \\ &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega. \end{aligned}$$

Endlich

$$\begin{aligned} S &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial v}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial V'''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega''}{\gamma''}\left(\frac{\partial \Omega''}{\partial v}\right) + \frac{\Omega'}{\beta'}\left(\frac{\partial \Omega'}{\partial v}\right) + \frac{\Omega}{\alpha}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial v}\right) \\ &= \Omega'' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega. \end{aligned}$$

Man hat also folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} P &= \Omega \\ Q &= \Omega' + \frac{\beta}{\alpha}\Omega \\ R &= \Omega'' + \frac{\gamma'}{\beta'}\Omega' + \frac{\gamma}{\alpha}\Omega \\ S &= \Omega''' + \frac{\delta''}{\gamma''}\Omega'' + \frac{\delta'}{\beta'}\Omega' + \frac{\delta}{\alpha}\Omega \end{aligned}$$

oder auch, wie leicht erhellet:

$$\begin{aligned} \Omega &= P \\ \Omega' &= Q + \mathfrak{A}P \\ \Omega'' &= R + \mathfrak{B}'Q + \mathfrak{A}'P \\ \Omega''' &= S + \mathfrak{C}''R + \mathfrak{B}''Q + \mathfrak{A}''P \end{aligned}$$

wo alle Coefficienten von P, Q, R, S, bekannte Größen sind. Aber

$$\Omega''' = \lambda''' + \delta'''v, \quad v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\Omega'''}{\delta'''}.$$

Also allgemein

$$v = -\frac{\lambda'''}{\delta'''} + \frac{\mathfrak{A}''}{\delta'''}P + \frac{\mathfrak{B}''}{\delta'''}Q + \frac{\mathfrak{C}''}{\delta'''}R + \frac{1}{\delta'''}S.$$

Drückt man also v durch eine Gleichung von der Form

Digitized by Google

$$v = L''' + A_1'''P + B_1''Q + C_1'''R + D_1'''S$$

aus, so ist, wie aus dem Obigen erhellet, L''' der wahrscheinlichste Werth von v, und, da

$$\frac{1}{\delta'''} = D_1''', \quad \delta''' = \frac{1}{D_1'''}$$

ist, $r\delta''' = \frac{1}{rD_1'''}$ dessen Gewicht, das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt.

Hieraus ergiebt sich nun, da die Allgemeinheit der obigen Schlüsse sogleich in die Augen fällt, unmittelbar Folgendes. Es ist nach dem Obigen überhaupt

$$P = b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' + \ldots$$
$$Q = c\Delta + c'\Delta' + c''\Delta'' + c'''\Delta''' + \ldots$$
$$R = d\Delta + d'\Delta' + d''\Delta'' + d'''\Delta''' + \ldots$$
$$S = e\Delta + e'\Delta' + e''\Delta'' + e'''\Delta''' + \ldots$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

m Gleichungen zwischen den m unbekannten Größen x, y, z, v, ..., welche in Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... alle nur in der ersten Dimension vorkommen. Eliminirt man nun aus diesen Gleichungen x, y, z, v, ... nach bekannten algebraischen Methoden, so wird man die Werthe dieser unbekannten Größen offenbar immer durch Ausdrücke von folgender Form darstellen können:

$$x = L + A_1P + B_1Q + C_1R + D_1S + \ldots.$$
$$y = L' + A_1'P + B_1'Q + C_1'R + D_1'S + \ldots.$$
$$z = L'' + A_1''P + B_1''Q + C_1''R + D_1''S + \ldots.$$
$$v = L''' + A_1'''P + B_1'''Q + C_1'''R + D_1'''S + \ldots.$$
$$\text{u. s. f.} \qquad \text{u. s. f.}$$

Hat man diese Ausdrücke entwickelt, so sind

$$L, L', L'', L''', \ldots.$$

die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Größen x, y, z, v, ..., und

$$\frac{1}{rA_1}, \frac{1}{rB_1''}, \frac{1}{rC_1''}, \frac{1}{rD_1'''}, \ldots,$$

die Gewichte dieser Bestimmungen, das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt, so daß also dieses elegante analytische Verfahren mit einem Male zu der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werthe und deren Gewichte führt.

Digitized by Google

Ist nur eine unbekannte Größe x zu bestimmen, und man hat folgende Gleichungen für die Fehler:

$$\Delta = a + bx,\ \Delta' = a' + b'x,\ \Delta'' = a'' + b''x,\ \ldots,$$

so erhält man leicht:

$$P = ab + a'b' + a''b'' + \ldots + (b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots)x$$

$$x = -\frac{ab + a'b' + a''b'' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots} + \frac{1}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}P,$$

Also der wahrscheinlichste Werth von x

$$= -\frac{ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots}$$

und sein Gewicht

$$= \gamma(b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \ldots).$$

Sind die Gleichungen für die Fehler

$$\Delta = a - x,\ \Delta' = a' - x,\ \Delta'' = a'' - x,\ \ldots$$

und die Anzahl der Beobachtungen $= n$, so ist der wahrscheinlichste Werth

$$= \frac{a + a' + a'' + a''' + \ldots}{n}$$

und das Gewicht $= \gamma n$, das Gewicht der Beobachtungen $= 1$ gesetzt. Ist also das Gewicht der Beobachtungen $= h$, so ist das Gewicht des Resultats $= h\gamma n$. Ist daher der wahrscheinlichste Fehler der Beobachtungen $= \Delta$, so ist der wahrscheinlichste Fehler des Resultates offenbar nur $= \frac{\Delta}{\gamma n}$, da dessen Gewicht γn Mal größer ist.

Sey jetzt, um noch einmal zu dem schon in (80.) behandelten Beispiel, wenn auch hier in noch etwas anderer Beziehung zurückzukehren:

$$\begin{aligned} X &= x - y + 2z \\ X' &= 3x + 2y - 5z \\ X'' &= 4x + y + 4z \\ X''' &= -2x + 6y + 6z \end{aligned}$$

und durch Beobachtung gefunden:

$$A = 3,\ A' = 5,\ A'' = 21,\ A''' = 28.$$

Die Gewichte der drei ersten Beobachtungen seyen einander gleich, der letzten aber sey nur das halbe Gewicht von jenem beizulegen. Die Fehler sind

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
\Delta &= A - X = 3 - x + y - 2z \\
\Delta' &= A' - X' = 5 - 3x - 2y + 5z \\
\Delta'' &= A'' - X'' = 21 - 4x - y - 4z \\
\Delta''' &= A''' - X''' = 28 + 2x - 6y - 6z .
\end{aligned}$$

Da aber der vierten Beobachtung bloß das halbe Gewicht beizulegen ist, so muß man nach (83.) bloß $\frac{1}{2}\Delta'''$ als Fehler in die Rechnung einführen, und erhält demnach folgende Ausdrücke für die Fehler:

$$\begin{aligned}
\Delta &= 3 - x + y - 2z \\
\Delta' &= 5 - 3x - 2y + 5z \\
\Delta'' &= 21 - 4x - y - 4z \\
\Delta''' &= 14 + x - 3y - 3z
\end{aligned}$$

wo also a, b, c, u. s. f. dieselben Werthe haben wie in (80.). Es ist nun z. B.

$$\begin{aligned}
P &= b\Delta + b'\Delta' + b''\Delta'' + b'''\Delta''' \\
&= \begin{cases} -3 + x - y + 2z \\ -15 + 9x + 6y - 15z \\ -84 + 16x + 4y + 16z \\ 14 + x - 3y - 3z \end{cases} \\
&= -88 + 27x + 6y .
\end{aligned}$$

Führt man diese Rechnung nun auch für Q, R aus, so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}
P &= -88 + 27x + 6y \\
Q &= -70 + 6x + 15y + z \\
R &= -107 + y + 54z .
\end{aligned}$$

Aus diesen drei Gleichungen bestimme man x, y, z. Für y z. B. würde die Rechnung so stehen:

$$\begin{array}{rl}
54\,Q = & -3780 + 324x + 810y + 54z \\
R = & -107 + y + 54z \\
\hline
54\,Q - R = & -3673 + 324x + 809y \\
12\,P = & -1056 + 324x + 72y \\
\hline
-12\,P + 54\,Q - R = & -2617 + 737y .
\end{array}$$

Durch diese Elimination erhält man:

$$\begin{aligned}
19899x &= 49154 + 809P - 324Q + 6R \\
737y &= 2617 - 12P + 54Q - R \\
6633z &= 12707 + 2P - 9Q + 123R
\end{aligned}$$

und folglich nach dem Obigen, wenn man nur noch durch die Coefficienten von x, y, z dividirt, die wahrscheinlichsten Werthe:

Digitized by Google

$$x = \frac{49154}{19899} = 2,470$$
$$y = \frac{2617}{737} = 3,551$$
$$z = \frac{12707}{6633} = 1,916 .$$

Die Gewichte dieser Bestimmungen sind, das Gewicht er Beobachtnngen = 1 gesetzt:

$$\text{für } x \ldots = \sqrt{\tfrac{19899}{809}} = 4,96$$
$$\text{für } y \ldots = \sqrt{\tfrac{737}{54}} = 3,69$$
$$\text{für } z \ldots = \sqrt{\tfrac{6633}{123}} = 7,34 .$$

Also ist z von allen am schärfsten bestimmt, y am wenigen genau, so daß y nur halb so sicher ist als z.

88. Weder bei Ausmittelung der wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Größen, noch bei Bestimmung er relativen Gewichte derselben, brauchte man, wie aus em Vorhergehenden erhellet, den Werth der Größe h zu ennen. Indeß ist eine Kenntniß dieser Größe immer an ch interessant und lehrreich, und wir wollen daher jetzt och einige Bemerkungen über die Art und Weise hinzufüen, wie man durch die Beobachtungen selbst zu einer solhen Kenntniß gelangen kann. Den Werth des Integrals

$$\int \frac{2e^{-t^2}\partial t}{\sqrt{\pi}},$$

on $t = o$ an gerechnet, wollen wir bei dieser Untersuhung durch Θt bezeichnen. Mittelst der in (75.) gegebenen Formeln findet man leicht folgende von Gauß berechnete Werthe dieser Function:

$$\begin{array}{lll}
0,5000000 = \Theta 0,4769363 & = \Theta \varrho \\
0,6000000 = \Theta 0,5951161 & = \Theta 1,247790\varrho \\
0,7000000 = \Theta 0,7328691 & = \Theta 1,536618\varrho \\
0,8000000 = \Theta 0,9061939 & = \Theta 1,900032\varrho \\
0,8427008 = \Theta 1 & = \Theta 2,096716\varrho \\
0,9000000 = \Theta 1,1630872 & = \Theta 2,438664\varrho \\
0,9900000 = \Theta 1,8213864 & = \Theta 3,818930\varrho \\
0,9990000 = \Theta 2,3276754 & = \Theta 4,880475\varrho \\
0,9999000 = \Theta 2,7510654 & = \Theta 5,768204\varrho \\
1 = \Theta \infty & = \Theta \infty .
\end{array}$$

Diese Werthe werden von dem Gange unserer Function eine hinlängliche Uebersicht geben.

Digitized by Google

89. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler Δ ei Beobachtung zwischen den Grenzen $-\delta$ und $+\delta$ ent ten, oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht grö als δ sey, ist nach (79.)

$$= \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\delta}^{+\delta} e^{-h^2\Delta^2} \partial\Delta = \int_{-\delta}^{+\delta} \frac{e^{-h^2\Delta^2}\,\partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}}$$

$$= 2\int_{0}^{\delta} \frac{e^{-h^2\Delta^2}\,\partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}} = \int_{0}^{\delta} \frac{2e^{-h^2\Delta^2}\,\partial . h\Delta}{\sqrt{\pi}}$$

wo sich immer die Grenzen bloß auf die veränder Größe Δ beziehen, wie sich von selbst versteht. Se wir nun $h\Delta = t$, so ist; für $\Delta = 0$, auch $t = 0$, $\Delta = \delta$ aber $t = h\delta$, und folglich obige Wahrscheinlich

$$= \int_{0}^{h\delta} \frac{2e^{-t^2}\,\partial t}{\sqrt{\pi}} = \Theta h\delta ,$$

wo sich nun natürlich die Grenzen auf die verände Größe t beziehen. Setzen wir $h\delta = \varrho$, $\delta =$ so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler zwischen Grenzen $-\frac{\varrho}{h}$, $+\frac{\varrho}{h}$ enthalten, d. i., ohne Rück auf das Zeichen, nicht größer als $\frac{\varrho}{h}$ sey, nach (88.) = folglich der entgegengesetzten Wahrscheinlichkeit gleich, daß es also eben so wahrscheinlich ist, einen Fehler zu gehen, welcher $< \frac{\varrho}{h}$, als einen Fehler zu begehen, w cher $> \frac{\varrho}{h}$ ist. Man nennt daher die Größe

$$\frac{\varrho}{h} = \frac{0{,}4769363}{h}$$

den wahrscheinlichen Fehler, und bezeichnet den ben nach Gauß mit r.

Für

$$\delta = 2{,}438664 . \frac{\varrho}{h}, \quad \delta = 3{,}818930 . \frac{\varrho}{h}$$

z. B. ist

$$\delta h = 2{,}438664\varrho , \quad \delta h = 3{,}818930\varrho .$$

Also die Wahrscheinlichkeit, daß der Fehler $2{,}438664\varrho$ oder $3{,}818930\varrho$ nicht übersteige, respective $= \frac{9}{10}$, =

Digitized by Google

$\frac{1}{\sigma}$, und folglich die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, e Wahrscheinlichkeit nämlich, daß der Fehler über 438664ϱ oder 3,818930ϱ hinausgehe, nur $\frac{1}{1\sigma}$, $=$ $\frac{1}{b\sigma}$, u. s. w.

90. Die Wahrscheinlichkeit, daß bei n wirklich angeellten Beobachtungen die Fehler Δ, Δ', Δ'', Δ''', ... yen, war nach (79.)

$$= h^n \pi^{-\frac{1}{2}n} e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}$$

h als gegeben oder beständig, die Fehler dagegen als änderlich angesehen werden. Betrachtet man aber jetzt ngekehrt die Fehler als gegeben oder beständig, das Geicht h der Beobachtungen dagegen als unbekannt oder eränderlich, so wird der richtige Werth von h offenbar erjenige seyn, welcher den Fehlern Δ, Δ', Δ'', Δ''', entricht, und es wird folglich offenbar durch obige Größe, nn die Fehler als gegeben oder constant betrachtet werh, auch die Wahrscheinlichkeit ausgedrückt, daß h der ahre Werth des Gewichts der Beobachtungen sey, so ß also diese Wahrscheinlichkeit der Größe

$$h^n e^{-h^2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}$$

oportional ist. Der wahrscheinlichste Werth von h wird so derjenige seyn, für welchen diese Größe ein Maximum ird. Differentiirt man nun, indem man die Fehler als nstant betrachtet, und

$$\Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots = S$$

tzt, nach h, und setzt das Differential $=$ o, so erält man:

$$nh^{n-1} e^{-h^2 S} - 2h^{n+1} S e^{-h^2 S} = o,$$

$$n - 2h^2 S = o,$$

$$h = \sqrt{\frac{n}{2S}} = \sqrt{\frac{n}{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}}$$

elches also der wahrscheinlichste Werth von h seyn wird. ieraus erhält man unmittelbar den wahrscheinlichsten Berth von r, d. h. den wahrscheinlichsten Werth des ahrscheinlichen Fehlers $=$

Digitized by Google

$$\epsilon\sqrt{\frac{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}{n}}$$
$$= 0{,}4769363\sqrt{\frac{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots)}{n}}$$
$$= 0{,}6744897\sqrt{\frac{\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots}{n}},$$

Der wahrscheinlichste Werth von h soll der Kürze wegen im Folgenden durch H bezeichnet werden, so daß also

$$H = \sqrt{\frac{n}{2(\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta^2+\ldots)}}$$

ist. Eben so soll der obige wahrscheinlichste Werth von r durch R bezeichnet werden, so daß also

$$R = 0{,}6744897\sqrt{\frac{\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2+\Delta'''^2+\ldots}{n}}$$

ist. Man sieht hieraus, daß immer

$$HR = \frac{0{,}6744897}{\sqrt{2}} = 0{,}47693631 = \epsilon$$

ist.

91. Man begreift leicht, daß man von dieser Bestimmung von h und r desto weniger berechtigt ist, viele Genauigkeit zu erwarten, je kleiner n ist. Entwickeln wir daher den Grad der Genauigkeit, welchen man derselben beizulegen hat, für den Fall, wo n eine große Zahl ist. Nach (91.) verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß H der wahre Werth von h ist, zu der Wahrscheinlichkeit, daß diese Bestimmung von der Wahrheit abweicht, und z. B. H + λ der wahre Werth von h ist,

$$= H^n e^{-H^2 S} : (H+\lambda)^n e^{-(H+\lambda)^2 S}.$$

Aber

$$H = \sqrt{\frac{n}{2S}}, \quad S = \frac{n}{2H^2}.$$

Folglich das Verhältniß obiger Wahrscheinlichkeiten

$$= H^n e^{-\frac{n}{2}} : (H+\lambda)^n e^{-\frac{n(H+\lambda)^2}{2H^2}}$$
$$= 1 : \left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}^n e^{-\frac{n(2H\lambda+\lambda^2)}{2H^2}}$$
$$= 1 : e^{\log n\left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}^n - \frac{n(2H\lambda+\lambda^2)}{2H^2}}$$
$$= 1 : e^{-\frac{n(2H\lambda+\lambda^2)}{2H^2} + n\log n\left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}}$$

Digitized by Google

Aber (Logarithmus. 42.)

$$-\frac{2H\lambda+\lambda^2}{2H^2}+\log n\left\{1+\frac{\lambda}{H}\right\}$$

$$=-\frac{\lambda}{H}-\frac{\lambda^2}{2H^2}+\frac{\lambda}{H}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^4}{H^4}+\ldots$$

$$=-\frac{\lambda^2}{H^2}\left\{1-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}-\tfrac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}+\ldots\right\}$$

und folglich das Verhältniß obiger Wahrscheinlichkeiten

$$=1:e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}\left\{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda^2}{H^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}+\ldots\right\}}.$$

Wegen des negativen Exponenten und der beträchtlichen Größe von n wird das zweite Glied dieses Verhältnisses nur dann gegen das erste noch merklich seyn, wenn $\frac{\lambda}{H}$ ein sehr kleiner Bruch ist, d. h. es wird nur dann noch einige Wahrscheinlichkeit vorhanden seyn, daß nicht H, sondern $H+\lambda$ der wahre Werth von h ist, wenn $\frac{\lambda}{H}$ ein sehr kleiner Bruch ist, welches uns berechtigt, statt des obigen Verhältnisses kürzer dieses zu gebrauchen:

$$1:e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}},$$

so daß also die Wahrscheinlichkeit, daß $H+\lambda$ der wahre Werth von h ist,

$$=Ke^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}},$$

gesetzt werden muß, wo K eine constante Größe bezeichnet. Also ist, nach einer früher schon öfter gebrauchten Schlußart, die Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Werth von h zwischen den Gränzen $H-\lambda$ und $H+\lambda$ enthalten ist,

$$=K\int_{-\lambda}^{+\lambda}e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda.$$

Da nun der Werth von h gewiß zwischen den Gränzen $H-\lambda$ und $H+\lambda$ enthalten ist, wenn man für λ den größten überhaupt zulässigen Werth λ' setzt, so ist klar, daß man die Constante K so bestimmen muß, daß

$$K\int_{-\lambda'}^{+\lambda'}e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda=1$$

Digitized by Google

wird, weil für diese Grenzen obige Wahrscheinlichkeit offenbar Gewißheit, d. i. $= 1$ ist. Sobald aber $\frac{\lambda}{H}$ aufhört ein sehr kleiner Bruch zu seyn, wird wegen der Größe von n offenbar $e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}$, also auch der Werth des obigen bestimmten Integrals unmerklich, so daß also

$$K\int_{-\lambda'}^{+\lambda'} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda \text{ und } K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda$$

nicht merklich von einander verschieden seyn können, und demnach verstattet ist, K so zu bestimmen, daß

$$K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda = 1$$

wird. Es ist aber, für

$$\frac{n\lambda^2}{H^2} = t^2,\ \frac{2\gamma n}{H} = t,\ \partial\lambda = \frac{H\partial t}{\gamma n},$$

weil offenbar für $\lambda = \pm\infty$ auch $t = \pm\infty$ ist, nach (79.)

$$K\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda = \frac{KH}{\gamma n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\partial t = \frac{KH\gamma\pi}{\gamma n}.$$

Also

$$\frac{KH\gamma\pi}{\gamma n} = 1,\ K = \frac{1}{H}\gamma\frac{n}{\pi},$$

und folglich die Wahrscheinlichkeit, daß h zwischen den Grenzen $H - \lambda$ und $H + \lambda$ enthalten sey,

$$= \frac{1}{H}\gamma\frac{n}{\pi}\cdot\int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda$$

$$= \frac{1}{H}\gamma\frac{n}{\pi}\cdot\int_{0}^{\lambda} 2e^{-\frac{n\lambda^2}{H^2}}\partial\lambda$$

$$= \int_{0}^{\lambda}\frac{2e^{-\left(\frac{2\gamma n}{H}\right)^2}\partial\left(\frac{2\gamma n}{H}\right)}{\gamma\pi},$$

so daß also nach der in (88.) eingeführten Bezeichnung offenbar die in Rede stehende Wahrscheinlichkeit

$$= \Theta\left(\frac{2\gamma n}{H}\right).$$

Digitized by Google

ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist also $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\frac{2\gamma_n}{H} = \varrho, \quad \lambda = H\frac{\varrho}{\gamma_n}$$

ist, und folglich 1 gegen 1 zu wetten, daß der wahre Werth von h zwischen den Grenzen

$$H\left(1-\frac{\varrho}{\gamma_n}\right), \quad H\left(1+\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)$$

liege. Da ferner $\varrho = rh$, $\varrho = RH$ ist (89. 90.); so ist $rh = RH$, $r = \frac{RH}{h}$; und folglich auch 1 gegen 1 zu wetten, daß der wahre Werth von r zwischen den Grenzen

$$\frac{RH}{H\left(1-\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)}, \quad \frac{RH}{H\left(1+\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)}; \text{ d. i. } \frac{R}{1-\frac{\varrho}{\gamma_n}}, \quad \frac{R}{1+\frac{\varrho}{\gamma_n}}$$

oder, wenn man diese Brüche in Reihen entwickelt, wegen der Kleinheit von $\frac{\varrho}{\gamma_n}$ zwischen den Grenzen

$$R\left(1-\frac{\varrho}{\gamma_n}\right), \quad R\left(1+\frac{\varrho}{\gamma_n}\right)$$

liege.

Wir haben also folgende Formeln

$$S = \Delta^2 + \Delta'^2 + \Delta''^2 + \Delta'''^2 + \ldots$$

Wahrscheinlichster Fehler der Beobachtungen $=$

$$R = 0{,}6744897\sqrt{\frac{S}{n}} \quad (90.).$$

Wahrscheinlichster Fehler des aus den Beobachtungen nach dem arithmetischen Mittel gezogenen Resultats $= \frac{R}{\gamma_n}$ (87.).

Wahrscheinlichste Grenze des Beobachtungsfehlers

$$= R\left\{1 \pm \frac{0{,}4769363}{\gamma_n}\right\}.$$

Wahrscheinlichste Unsicherheit von R also

$$= \frac{0{,}4769363\,R}{\gamma_n}.$$

Littrow (Theoret. u. pract. Astron. I. Wien. 1821. S. 266.) fand für die Breite der Ofener Sternwarte folgende 10 Resultate:

Digitized by Google

47° 29′	11″, 5
	12 , 2
	12 , 8
	11 , 2
	11 , 7
	12 , 3
	11 , 5
	11 , 9
	12 , 4
	12 , 5
Mittel 47° 29′	12″, 00 .

Die Fehler Δ, Δ', Δ'', ... jeder einzelnen Beobachtung kann man gleich der Differenz jeder Beobachtung von diesem Mittel annehmen. Dies giebt

$$S = 2{,}42;\ n = 10;$$

$$R = 0{,}67449\sqrt{\frac{2{,}42}{10}} = 0'',33;\ \frac{R}{\sqrt{n}} = 0'',104;$$

$$0{,}47694\frac{R}{\sqrt{10}} = 0'',016.$$

92. Eine weitere Ausführung dieses wichtigen Gegenstandes verstattet hier der Raum nicht. Gauß hat sich durch Entwickelung der obigen Theorie, welche die Grundlage aller Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Naturwissenschaft enthält, unsterblich verdient gemacht. Die eigentlichen Quellen, woraus man dieselbe studiren muß, sind die Theoria motus corporum coelestium. Hamburgi. 1809. p. 205. sqq., zwei Abhandlungen von Gauß in der Monatl. Corresp. Thl. XXIV. und der Zeitschrift für Astron. Thl. I. S. 185. ff. Auf die neuesten hierher gehörenden Schriften von Gauß: Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Gott. 1823. und Supplementum Theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Gott. 1828. konnte hier keine Rücksicht genommen werden, sie verdienen aber ebenfalls in jeder Beziehung eifrigst studirt zu werden. In diesem Artikel, der keine weitere Ausführung gestattete, konnten bloß die ältern Arbeiten von Gauß berücksichtigt werden. Ferner s. m. noch vorzüglich: Gauss Disquisitio de elementis ellipticis Palladis. Comm. Gott. 1811. Bessel Fundamenta Astronomiae. p. 18. 116. Paucker: über die Anw. der Methode der kleinsten Quadratsumme auf physikal.

Digitized by Google

Beobachtungen. Mitau. 1819. Zwei Abhandlungen von Plana in den Mém. de Turin. 1811. p. 355. und der Zeitschrift für Astron. Thl. VI. S. 250. Phil. Transact. 1819. p. 77. Annales d. Math. T. XII. p. 181. Eine Abhandlung von Svanberg in den Kongl. Vetensk. Academiens Handlingar. 1821. p. 388. Der Art. Milieu in der franz. Enc. Gehlers phys. Wörterb. Neue Aufl. Art. Beobachtung v. Muncke. Thl. I. S. 901. Eine Recension von v. Rieſe in den Jahrb. für wiss. Kritik. Febr. 1830. S. 269. Vorzüglich auch Laplace Théorie anal. d. prob. Suppl. Zu bemerken ist noch, daß noch ehe Gauß seine Methode (deren er sich schon seit 1795 bei der Berechnung der Planetenbahnen bedient hat) in der Theoria motus etc. l. c. bekannt machte, Legendre auf das Princip der kleinsten Quadratsummen aufmerksam gemacht hat (Nouv. methodes pour la determination des orbites des cometes etc. Paris. 1806.). Durch die weitere Entwickelung und die innige Verbindung mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sie aber ganz das Eigenthum von Gauß geworden, der sie übrigens auch, wie oben erwähnt, schon seit 1795 angewandt hat.

Literatur.

93. Aus dem folgenden Verzeichniß der wichtigsten über Wahrscheinlichkeitsrechnung erschienenen Schriften wird man zugleich die Männer erkennen, welche sich um dieselbe am meisten verdient gemacht haben.

Die ersten Aufgaben über die Glücksspiele haben Pascal und Fermat gegen die Mitte des 17ten Jahrhunderts aufgelöst, und dadurch den Grund zur Wahrscheinlichkeitsrechnung gelegt. Dabei machte sich auch der Ritter Méré bekannt, welcher Pascal einige Aufgaben dieser Art vorlegte. Besonders wichtig in dieser Zeit ist

Hugenii Tractatus de ratiociniis in ludo aleae, zuerst bekannt gemacht von Schooten im Jahre 1658 in seinen Exercitationes mathematicae.

Auch ist zu bemerken:

Digitized by Google

Of the Laws of chance. London. 1692. Von einem Ungenannten.

Den ersten vollständigern Lehrbegriff verfaßte Jacob Bernoulli, welcher aber erst nach seinem Tode von Nicolas Bernoulli, dem Neffen, herausgegeben ward, unter dem Titel:

Jac. Bernoulli Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis et epistola de ludo pilae reticularis. Basil. 1713. Dieses Werk enthält auch die obige Schrift von Huygens mit Anmerkungen. Bernoulli ward an der Vollendung desselben durch den Tod gehindert, es wird aber noch jetzt mit Recht sehr geschätzt.

Die Theorie der Glücksspiele behandelte Montmort ausführlich in einem ebenfalls noch jetzt mit Recht sehr geschätzten Werke:

Essay d'Analyse sur les jeux de hazard. Sec. ed. Paris. 1713. mit Briefen von Johann und Nicolas Bernoulli.

Auch ist über diesen Gegenstand zu merken: Uytrekening der Kanssen in het speelen door de Arithmetica en Algebra, beneevens een Verhandeling van Lotteryen en Interest door N. S. Amst. 1716. S. eine Recension hiervon in den Act. Erud. Suppl. T. VII. p. 268.

Sehr wichtig ist: The doctrine of chances by Moivre. London. 1718. und eine frühere kleinere Schrift desselben Verfassers: de mensura sortis, vom Jahre 1711. Moivre's Werke: Annuities on lives. 1724. 1756. betrifft die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Leibrenten, Anwartschaften u. s. f. und gehört daher nicht hierher. Es ist in's Italiänische übersetzt von Greg. Fontana unter dem Titel: Dottrina degli Azzardi etc. Milano. 1776.

Durch mehrere Schriften, welche aber größtentheils der Anwendung angehören, hat sich auch Condorcet ausgezeichnet. Er ist auch Verfasser des Artikels Probabilité in der französischen Encyclopädie. Lacroix führt

Digitized by Google

von ihm an: Elemens du calcul des Probabilités, vorzüglich aber Essai sur l'application de l'Analyse à la probabilité des decisions. Auch von Prevost führt Lacroix Leçons sur le calcul des probabilités an.

Bei Weitem das wichtigste und vollständigste Werk über diesen Gegenstand ist aber

Théorie analytique des probabilités par De Laplace. Trois éd. Paris. 1820.,

eins der tiefsinnigsten Werke in der Mathematik überhaupt, welches auch viele wichtige rein analytische Untersuchungen, vorzüglich über Annäherungsmethoden, enthält. Wer es studiren will, muß schon gute Vorkenntnisse in der Analysis mitbringen. Wir haben Einiges aus diesem scharfsinnigen Werke in diesem Artikel mitgetheilt. Die dritte Ausgabe enthält unter dem Titel Introduction den von Laplace besonders herausgegebenen, und von Tönnies ins Deutsche übersetzten, Essai philosophique sur les probabilités, nach dessen vierter Ausgabe, und drei Supplemente, vorzüglich über die Anwendung auf geodätische Messungen.

Für den ersten Unterricht sind bestimmt:

Bicquilley Rechnung des Wahrscheinlichen, übers. v. Rüdiger. Lpzg. 1788.

Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung von Lacroix, übers. von Unger. Erfurt. 1818.

Von den Verdiensten anderer Mathematiker: Euler, D'Alembert, Johann und Daniel Bernoulli, vorzüglich aber Gauß, ist schon oben die Rede gewesen. Durch Auflösung mehrerer Probleme haben sich auch besonders Lagrange, Trembley, L'Huilier verdient gemacht. Ihre und Anderer akademische Abhandlungen findet man vollständig verzeichnet in Reuss Repertorium commentationum a societatibus literariis editorum. Gott. 1808. T. VII. p. 22 — 29. Die Anwendungen auf Lebensdauer, Leibrenten, Anwartschaften, Zeugnisse u. dergl., politische Arithmetik überhaupt, gehören nicht hierher, da dieser Artikel nur die Gründe der Anwendun-

Digitized by Google

gen enthalten durfte. Das wichtigste deutsche Werk über diese Gegenstände ist noch immer:

Tetens Einleitung in die Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhängen. Lpzg. 1785. Nicht nach Verdienst scheint jedoch bekannt zu seyn: Allgemeine Anleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften. Von J. G. Meyer. 2 Bnde. Kopenhagen. 1822. 1823. Andere Werke über die Anwendungen gehören nicht hierher.

Walze. Gerader Cylinder mit kreisförmiger Grundfläche.

Wälzung. Wälzende Bewegungen nennt man in der Geometrie solche wie die, wodurch z. B. die Cykloiden und Epicykloiden beschrieben werden. M. s. diese Artt.

Wechselschnitt, s. Kegel (9.). Cylinder Thl. I. S. 700.

Wechselswinkel, s. Parallelen (1.).

Wegschaffen, s. Elimination.

Weite des Bogens einer krummen Linie, s. Amplitudo arcus.

Wendungspunkt (punctum flexus contrarii, point d'inflexion). Wenn eine Curve auf beiden Seiten eines Punktes P (Fig. 156.) liegt, und in diesem Punkte ein Wechsel des Concaven und Convexen statt findet, so daß nämlich auf der einen Seite desselben in seiner Nähe die Curve concav, auf der andern Seite convex gegen die Abscissenaxe ist, so heißt der Punkt P aus leicht zu begreifenden Gründen ein Wendungspunkt, woraus auch zugleich erhellen wird, wodurch sich ein solcher Punkt von einer Spitze (Fig. 157.) unterscheidet (s. Rückkehrpunkt). Denkt man sich durch P (Fig. 156.) eine Berührende gezogen, so ist klar, daß die Curve links und rechts von P auf verschiedenen Seiten der Berühren-

Digitized by Google

den liegt, eine Bemerkung, welche für das Folgende von großer Wichtigkeit ist.

1. Die Abscisse des Punctes P sey $= x$, die Ordinate $PQ = y$, die Subtangente $TQ = \frac{y\partial x}{\partial y}$ (Berührende Linie. 12.). Aendere sich nun x um das sehr kleine $i = Qq$, und sey $pq = y'$, $p'q = z$; so ist nach dem Taylor'schen Satze:

$$y' = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \cdots .$$

Aber offenbar

$$\frac{y\partial x}{\partial y} : y = \frac{y\partial x}{\partial y} + i : z ,$$

$$z = y + \frac{\partial y}{\partial x}\cdot\frac{i}{1} .$$

Folglich

$$y' = z + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\cdot\frac{i^2}{1.2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\cdot\frac{i^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\cdot\frac{i^4}{1..4} + \cdots ,$$

Weil es hier offenbar überhaupt nur auf die in der Nähe von P liegenden Punkte der Curve ankommt, so ist es verstattet, i sich als sehr klein zu denken, und es haben folglich z und y' mit y immer einerlei Vorzeichen.

2. Ist nun zuerst $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht $= 0$, und mit z, also auch mit y, von einerlei Vorzeichen, so ist, weil wegen der Kleinheit von i das Zeichen der zu z addirten Reihe bloß von ihrem ersten Gliede abhängt, der absolute Werth von y' für positive und negative i größer als der absolute Werth von z, folglich offenbar die Curve in dem Punkte P gegen die Abscissenaxe conver. Hat aber $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mit z und y entgegengesetztes Vorzeichen, so ist der absolute Werth von y' für positive und negative i kleiner als der absolute Werth von z, und demnach die Curve in dem Punkte P gegen die Abscissenaxe concav. In keinem dieser beiden Fälle findet also ein Wendungspunkt statt, sondern es muß vielmehr, wenn P ein solcher Punkt ist, ein Uebergang der Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ von dem Positiven zum Negativen, oder vom Negativen zum Positiven, statt finden.

Digitized by Google

Die Werthe einer Function gehen aber entweder durch o oder durch $\frac{1}{o}$ vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, über. Um dies deutlich zu übersehen, sey zunächst indem α, β, γ, δ, ... bloß positive Größen bezeichnen, eine beliebige Function =

$$y = A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + Dx^{\gamma} + \ldots ;$$

so ist klar, daß die Werthe dieser Function stetig wachsen und abnehmen, ein Uebergang von dem Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, also bloß durch o statt finden kann. Ist aber

$$y = \frac{A + Bx^{\alpha} + Cx^{\beta} + Dx^{\gamma} + \ldots}{A' + B'x^{\alpha'} + C'x^{\beta'} + D'x^{\gamma'} + \ldots} = \frac{\varphi x}{\varphi' x},$$

wo auch α', β', γ', δ', ... nur positive Größen bezeichnen; so sind, indem y vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergeht, zwei Fälle denkbar. Entweder behält nämlich bei diesem Uebergange der Nenner $\varphi' x$ sein Zeichen und der Zähler φx wechselt dasselbe, oder der Zähler behält das Zeichen, und der Nenner wechselt dasselbe. Im ersten Falle geht offenbar nach dem Vorigen der Zähler, also auch die Function y selbst, durch o vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, über. Im zweiten Falle dagegen geht nach dem Obigen der Nenner durch o, die Function y selbst also durch $\frac{1}{o}$, vom Positiven zum Negativen, oder umgekehrt, über.

Hieraus erhellet nun, daß, wenn P ein Wendungspunkt ist, immer entweder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$, oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{o}$ sey. Man darf dies aber nicht umkehren, da für eine Spitze auch $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$ ist (Rückkehrpunkt, 2.). Vielmehr muß man immer untersuchen, ob der Punkt, an welchem $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = o$ ist, ein Wendungspunkt oder eine Spitze sey. Zu dem Ende muß untersucht werden, ob in diesem Punkte für negative und positive Incremente der Abscisse die Ordinate reelle, oder in einem Falle imaginäre Werthe erhält, immer bloß in der Nähe des in Rede stehenden Punktes. Findet das Erste statt, so ist derselbe ein Wen-

Digitized by Google

dungspunkt; im letztern Falle dagegen eine Spitze, wie leicht erhellet. Man kann, um diese Untersuchung zu erleichtern, den Anfang der Coordinaten auch in den Punkt Q verlegen, und die Ordinate nach steigenden Potenzen der neuen Abscisse entwickeln, wo denn die kleinen positiven und negativen Abscissen selbst die Stelle der obigen Incremente vertreten. M. vergl. Rückkehrpunkt (12.).

3. Sey z. B.

$$y = \frac{ax^2}{a^2 + x^2}$$

die Gleichung der gegebenen Curve, so erhält man leicht:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2a^3x}{(a^2+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2a^5 - 6a^3x^2}{(a^2+x^2)^3}.$$

Setzte man den zweiten Differentialquotienten $= \frac{1}{0}$, so wäre $x^2 + a^2 = 0$, $x = a\sqrt{-1}$, d. i. imaginär, woraus sich also kein Wendungspunkt ergiebt. Setzt man aber diesen Differentialquotienten $= 0$, so ist $2a^5 - 6a^3x^2 = 0$, $3x^2 = a^2$, $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$, welchen beiden Abscissen also Wendungspunkte oder Spitzen entsprechen. Setzt man nun nach der in (2.) angegebenen Vorschrift $x = x' \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$, so ist klar, daß, indem man dem x' positive und negative Werthe beilegt, y nie imaginär wird, und folglich der bestimmte Punkt in der That ein Wendungspunkt ist.

Ueber den Wendungspunkt der Conchoide s. m. diesen Art. Thl. I. S. 535. ff.

4. Bei polaren Coordinaten φ, z ist, wenn wir den Anfangsradius als Axe, den Pol als Anfang der Abscissen annehmen:

$$x = z\cos\varphi, \quad y = z\sin\varphi;$$

$$\partial x = \cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi, \quad \partial y = \sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\sin\varphi\partial z + z\cos\varphi\partial\varphi}{\cos\varphi\partial z - z\sin\varphi\partial\varphi} = \frac{\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} + z\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi}.$$

Differentiirt man nun nach φ, so erhält man nach einigen leichten Reductionen

Digitized by Google

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\varphi} = \frac{z^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{\left(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi\right)^2},$$

Ferner ist auch nach dem Obigen

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi},$$

Folglich, weil

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ist:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{z^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}{\left(\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi\right)^3}.$$

Da nun für den Wendungspunkt der zweite Differentialquotient $= o$, oder $= \infty$; so muß man

$$z^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2 = o,$$

$$z^2\partial\varphi^2 - z\partial^2 z + 2\partial z^2 = o,$$

oder

$$\cos\varphi\frac{\partial z}{\partial\varphi} - z\sin\varphi = o, \text{ tang}\,\varphi = \frac{\partial z}{z\partial\varphi}$$

setzen. Im letzten Falle ist nach dem Obigen offenbar $\frac{\partial x}{\partial y} = o$, also auch $y\frac{\partial x}{\partial y} = o$, d. h. (Berührende Linie. 13.) die Subtangente $= o$, und die Berührende folglich auf dem Anfangsradius oder der Abscissenaxe senkrecht. In diesem Falle muß nun immer besonders untersucht werden, ob die Curve in dem bestimmten Punkte auf beiden Seiten oder nur auf einer Seite der Berührenden liegt, indem nur im ersten Falle dieser Punkt ein Wendungspunkt seyn wird.

Wolf findet in den Elem. Anal. Infin. §. 309. die Gleichung

$$\partial y^2 + \partial x^2 = y\partial^2 y,$$

wo nach unserer Bezeichnung $y = z$, $\partial x = z\partial\varphi$, obige Gleichung also

$$z^2\partial\varphi^2 - z\partial^2 z + \partial z^2 = o$$

Digitized by Google

ist. Er nimmt das Differential ∂x constant, welches nicht angeht, da es von zwei veränderlichen Größen abhängt.

5. Jacob Bernoulli beschäftigt sich in den Act. Erud. 1691. p. 13. Opp. T. I. p. 436. mit dem Wendungspunkte der paraboliſchen Spirale. Die Gleichung dieſer Curve iſt (Spirale. 78.)

$$ar\varphi = (r-z)^2,$$

wenn nur hier z ſtatt des dortigen y geſetzt wird. Alſo

$$ar = -2(r-z)\frac{\partial z}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{ar}{2(r-z)};$$

$$o = -2(r-z)\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + 2\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r-z}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = \frac{a^2 r^2}{4(r-z)^3}.$$

Folglich

$$z^2 - \frac{a^2 r^2 z}{4(r-z)^3} + \frac{a^2 r^2}{2(r-z)^2} = o,$$

$$4(r-z)^3 z^2 - a^2 r^2 z + 2a^2 r^2 (r-z) = o,$$

$$4(r-z)^3 z^2 - 3a^2 r^2 z + 2a^2 r^3 = o,$$

$$4z^5 - 12rz^4 + 12r^2 z^3 - 4r^3 z^2 + 3a^2 r^2 z - 2a^2 r^3 = o,$$

oder, wenn man $r - z' = z$ ſetzt:

$$4z'^5 - 8rz'^4 + 4r^2 z'^3 + 3a^2 r^2 z' - a^2 r^3 = o.$$

Dieſelbe Gleichung findet Jacob Bernoulli a. a. O. (Opp. T. I. p. 437.). Ihre möglichen Wurzeln geben die Ordinaten, bei welchen ein Wendungspunkt oder etwa eine Spitze (ſ. 2.) ſtatt findet. Für die Punkte, wo die Berührende auf dem Anfangsradius ſenkrecht iſt, erhält man aus der Gleichung $\text{tang}\,\varphi = \frac{\partial z}{z\partial \varphi}$ leicht

$$\text{tang}\,\varphi = -\frac{ar}{2z(r-z)},$$

woraus in Verbindung mit der Gleichung $ar\varphi = (r-z)^2$, durch Elimination die entſprechenden φ und z beſtimmt werden müſſen. Aus der Thl. IV. Tab. XXVII. Fig. 40. gezeichneten Geſtalt der Curve erhellet aber leicht, daß bei den auf dem Anfangsradius ſenkrechten Berührenden die Curve nicht auf beiden Seiten dieſer Berührenden liegt, und die entſprechenden Punkte folglich keine Inflexionspunkte ſind.

In dem Art. Spirale (83.) iſt wegen des Wendungspunktes der Parabola helicoides auf dieſen Artikel verwieſen worden.

Digitized by Google

Wesentliche Wurzeln einer Gleichung, s. Gleichung (171.).

Wiederholung in der combinatorischen Analysis, s. Combination (1, I, II. III.); Combinatorische Analysis (23.).

Wiederholungs-Exponent, s. Combination (4.).

Wiederkehrende Reihe, s. Rücklaufende Reihe.

Wiederkehrpunkt, s. Rückkehrpunkt.

Willkührliche Functionen, s. den Art. Partielle Differentialgleichungen. Zur Geschichte Nr. 59. ff.

Willkührlicher Satz, s. Wahlsatz.

Wilsons Theorem, s. Zahl (III. 2. 3.).

Winkel. Wenn zwei gerade Linien AB und AC (Fig. 158.) in einem Punkte A zusammenstoßen, so sind sie offenbar rücksichtlich ihrer Lage verschieden, und die Größe dieser Verschiedenheit, die Größe ihrer Abweichung von einander wird durch den von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmt, welchen man zu näherer Bestimmung gewöhnlich einen ebenen Winkel nennt. Betrachtet man aber die Abweichung der Linie AC von der Linie AB in Bezug auf die gegenseitige Lage näher, so ist klar, daß man dieselbe entweder nach der Richtung $\alpha\beta$ oder nach der Richtung $\alpha'\beta'$ betrachten kann, und daß also zwei in einem Punkte zusammenstoßende gerade Linien eigentlich jederzeit zwei Winkel mit einander einschließen, die auch beim neuern Vortrage der Geometrie gewöhnlich von einander unterschieden werden. Denkt man sich die Linie AC zuerst auf der Linie AB liegend, und dann aufwärts bewegt, so wird AC offenbar immer einmal in eine solche Lage kommen, daß beide Linien in einer geraden Linie liegen, und es erhellet leicht, daß auch in diesem Falle die beiden Linien rücksichtlich ihrer Lage eine gewisse Abweichung von einan-

Digitized by Google

der haben, oder einen gewissen Winkel mit einander einschließen werden. Solche Winkel nennt man gestreckte oder gerade Winkel. Jeder Winkel, welcher kleiner als ein gestreckter ist, heißt ein concaver, jeder Winkel dagegen, welcher größer als ein gestreckter ist, ein convexer Winkel. Zwei in einem Punkte zusammenstoßende gerade Linien schließen demnach immer entweder zwei gestreckte, oder einen concaven und einen convexen Winkel mit einander ein. Alle gestreckte Winkel sind offenbar einander gleich, indem die Linie AC augenscheinlich in jedem Falle, wo sie einen gestreckten Winkel beschrieben hat, einen gleichen Weg zu durchlaufen hat. Die Hälfte eines gestreckten Winkels heißt ein rechter Winkel, so daß also offenbar auch alle rechte Winkel einander gleich sind. Der rechte Winkel wird in der Geometrie durch R bezeichnet. Ein gestreckter Winkel ist also $= 2R$, jeder concave Winkel $< 2R$, jeder convexe Winkel $> 2R$. Die Summe der beiden von zwei in einem Punkte zusammenstoßenden geraden Linien eingeschlossenen Winkel ist demnach immer $\leq 4R$.

Die beiden geraden Linien, welche einen ebenen Winkel einschließen, heißen seine Schenkel, der Punkt, in welchem sie zusammenstoßen, sein Scheitel oder seine Spitze. Die Größe eines Winkels hängt offenbar nicht von der Länge seiner Schenkel ab, sondern bloß von deren Oeffnung oder Abweichung von einander. Bezeichnet wird ein Winkel durch die drei Buchstaben an der Spitze und an den Schenkeln, so daß ersterer in der Mitte steht; durch einen kleinen in die Oeffnung des Winkels gesetzten Buchstaben; oder, wenn an derselben Spitze nicht mehrere Winkel liegen, auch bloß durch den Buchstaben an der Spitze. Zu wünschen wäre die Einführung einer Bezeichnung, durch welche unterschieden würde, ob man den von zwei Linien eingeschlossenen concaven oder convexen Winkel meint. Vielleicht könnte man im letztern Falle einen kleinen Bogen über das Zeichen des Winkels, und im Fall eines gestreckten Winkels einen geraden Strich darüber setzen.

Digitized by Google

Das euclidische System kennt bloß concave Winkel. Die neuere Geometrie kann aber wegen Verallgemeinerung mancher Sätze und Beweise, in den Elementen z. B. schon in der Lehre vom Kreise, der convexen und gestreckten Winkel nicht wohl mehr entbehren. Ein concaver Winkel heißt spitz oder stumpf, jenachdem er kleiner oder größer als ein rechter Winkel ist. Alle concaven Winkel, welche keine rechten Winkel sind, heißen schiefe Winkel. Zwei concave Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemein haben, und deren beide andere Schenkel von der Spitze aus entgegengesetzt in gerader Linie liegen, heißen Nebenwinkel. Jede zwei Nebenwinkel betragen zusammen offenbar immer einen gestreckten Winkel, und sind also = 2R. Winkel am Mittelpunkte oder Centriwinkel heißen in der Lehre vom Kreise alle solche Winkel, deren Spitzen im Centro des Kreises liegen; Winkel an der Peripherie oder Peripheriewinkel sind solche, deren Spitzen in der Peripherie liegen, und deren Schenkel Sehnen des Kreises sind. Die Erklärungen der übrigen ebenen Winkel s. m. an ihren Orten.

Die Einheit des Winkelmaaßes ist wegen seiner unveränderlichen Größe der rechte Winkel. Um aber Brüche möglichst zu vermeiden, theilt man den rechten Winkel in 90 gleiche Theile, welche man Grade nennt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden, diese wieder in 60 Tertien, u. s. f., und bezeichnet diese Maaßtheile durch, °, ′, ″, ‴, wonach Ausdrücke wie z. B. 45° 6′ 17″ 25‴ leicht werden gelesen werden können. Bei der neuen französischen Maaßeinrichtung theilte man den rechten Winkel in 100 Grade, den Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden, u. s. f. Man theilt auch den Kreisquadranten in 90 gleiche Theile, die man ebenfalls Grade nennt, den Grad in 60 Minuten, die Minute in 60 Secunden u. s. f., wie vorher. Denkt man man sich zwischen den Schenkeln eines Winkels aus seiner Spitze als Mittelpunkt einen Kreisbogen beschrieben, so enthält derselbe, wie groß oder klein man auch den Halbmesser annehmen mag, offenbar eben so viele Bogen-Grade,

Digitized by Google

=Minuten, =Secunden u. s. f. als der Winkel Winkel=Grade, =Minuten, =Secunden u. s. f. enthält. Hierauf beruht die Messung der Winkel durch Bogen. Die Bogen=Grade, =Minuten, =Secunden, u. s. f. dienen eigentlich bloß, die in dem entsprechenden Winkel enthaltenen Winkel=Grade, =Minuten, =Secunden u. s. f. zu zählen. Ein rechter Winkel ist also $= 90^0$, ein gestreckter $= 180^0$, jeder concave Winkel $< 180^0$, jeder ~~gebrochene~~ $> 180^0$, jeder spitze Winkel $< 90^0$, jeder stumpfe $> 90^0$; zwei Nebenwinkel sind $= 180^0$.

Stoßen zwei krumme Linien in einer Ebene oder im Raume in einem Punkte zusammen, so ist der von ihnen eingeschlossene Winkel kein anderer, als der von den durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt an die beiden Curven gezogenen Berührenden eingeschlossene ebene Winkel. Die Winkel eines sphärischen Dreiecks z. B. sind die drei ebenen Winkel, welche von den sechs durch die Spitzen des Dreiecks an seine Seiten gezogenen Berührenden an den drei Spitzen eingeschlossen werden.

Die Größe der Abweichung zweier in einer geraden Linie zusammenstoßenden Ebenen von einander, rücksichtlich ihrer gegenseitigen Lage, heißt bei französischen Schriftstellern angle dièdre, welches man etwa durch Flächenwinkel übersetzen mag. Der Neigungswinkel zweier Ebenen gegeneinander ist nach Euclid der ebene Winkel, welchen zwei auf den gemeinschaftlichen Durchschnitt der beiden Ebenen durch einen willkührlichen Punkt desselben in den beiden Ebenen errichtete Perpendikel mit einander einschließen. Den Neigungswinkel einer geraden Linie gegen eine Ebene findet man, wenn man von einem willkührlichen Punkte in jener auf die Ebene ein Perpendikel fällt, und dessen Fußpunkt mit dem Durchschnittspunkte der geraden Linie mit der Ebene durch eine gerade Linie verbindet; es ist der Winkel, welchen diese gerade Linie mit der gegebenen einschließt.

Stoßen mehrere Ebenen in einem Punkte zusammen, so heißt der zwischen ihnen enthaltene, auf der einen Seite unbegrenzte, Raum ein körperlicher Winkel. Seine

Digitized by Google

Seitenzahl bestimmt sich nach der Anzahl der einschließenden Ebenen. Drei Ebenen sind mindestens zur Bildung eines körperlichen Winkels erforderlich. Als Maaß eines solchen Winkels kann man das zwischen ihm enthaltene Stück einer Kugelfläche betrachten, welche aus seiner Spitze mit einem bestimmten Halbmesser, etwa mit dem Radius 1, beschrieben worden ist. Der sphärische Octant kann dann hierbei wieder als Maaßeinheit dienen. M. s. eine zum Theil sich hierauf beziehende Abhandlung von mir in Crelles Journal d. r. u. a. Math. V. 1. S. 37. Auch vergl. man die Bestimmung des Flächeninhaltes sphärischer Dreiecke und Vielecke, denen immer ein bestimmter körperlicher Winkel am Mittelpunkte der Kugel entspricht, dessen Maaß das sphärische Vieleck ist, im Art. Trigonometrie (86. ff.). Euclid zeigt XI. 21. geometrisch, daß die Summe der ebenen Winkel, welche einen körperlichen Winkel einschließen, immer $< 4R$ ist.

Zu vergleichen sind hier die Artt. Berührungswinkel und Trisection des Winkels.

Winkelmaaß, s. Winkel.

Winkelmessung. Auf dem Papier wird ein Winkel am einfachsten und genauesten gemessen, wenn man aus seiner Spitze mit einem beliebigen Radius einen Bogen beschreibt, und dessen Sehne, so wie den Radius, mit einem tausendtheiligen Maaßstabe so genau als möglich mißt. Für den Radius kann man auch größerer Genauigkeit wegen eine beliebige ganze Zahl von Theilen des Maaßstabes annehmen. Ist nun der zu messende Winkel $= \varphi$, der gemessene Radius $= r$, die Sehne $= s$, so erhellet aus einfachen trigonometrischen Gründen sogleich die Richtigkeit der Formel

$$\tfrac{1}{2}s = r \sin \tfrac{1}{2}\varphi, \quad \sin \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{s}{2r},$$

wodurch φ mittelst der trigonometrischen Tafeln gefunden wird. Eine besondere Chordentafel hat Francoeur zu diesem Zwecke in einer kleinen Schrift (La Goniométrie, ou l'art de tracer sur le papier des angles etc.

Digitized by Google

Paris. 1820.) geliefert. Das umgekehrte Verfahren dient, Winkel, deren Größe in Graden, Minuten, Secunden, u. s. f. gegeben ist, auf dem Papiere zu verzeichnen.

Der Transporteur ist ein in seine 180 Grade, auch wohl halbe Grade, eingetheilter Halbkreis von Messing zur Messung und Zeichnung der Winkel auf dem Papier, ein sehr unvollkommnes Instrument, wenn nicht vielleicht ein Vernier damit verbunden ist (s. Theilung. 19.), wodurch aber der Preis sehr erhöhet wird. Die Beschreibung anderer Instrumente zur Winkelmessung gehört nicht in diese Abtheilung unsers Wörterbuchs.

Winkeltheilung. Zur Theilung eines Winkels in gleiche Theile durch Rechnung dienen die im Art. Goniometrie (102.) entwickelten Formeln für $\sin\frac{m}{n}\varphi$ und $\cos\frac{m}{n}\varphi$ durch $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$. Ueber die geometrische Natur solcher Theilungen s. m. den Art. Trisection des Winkels. Auch vergl. man Opp. Joh. Bern. T. I. p. 386. p. 511. Opp. Jac. Bern. T. II. p. 921. Ferner gehört hierher ein Programm von Kästner: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum definientibus, auch abgedruckt in dessen Dissertt. math. et phys. Altenb. 1771. p. 150. Geometrische Abhandlungen. II. S. 241. ff.

Würfel, s. Vieleckige Körper, und Delische Aufgabe.

Wurzel, heißt überhaupt jeder Werth der unbekannten Größe in einer Gleichung. Jeder Werth von x, welcher der Gleichung des nten Grades

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + Mx + N = 0$$

Genüge leistet, heißt eine Wurzel derselben. In dem Art. Unmögliche Größen (32. ff.) ist gezeigt worden, daß jede Gleichung des nten Grades n Wurzeln hat, und nicht mehr. Einige derselben können imaginär seyn; die imaginären Wurzeln sind aber immer paarweise vorhanden (a.

Digitized by Google

a. O. 34.). Methoden, die Wurzeln der Gleichungen zu finden, d. h. die Gleichungen aufzulösen, enthält der Art. Gleichung.

1. Vorzüglich wichtig ist der Fall, wenn die gegebene Gleichung eine reine, d. h. von der Form

$$x^n - N = 0$$

ist. Ueber die allgemeine Auflösung solcher Gleichungen s. m. die Artt. Anwendung der Geometrie auf die Algebra. IV. und Unmögliche Größen (24. ff.), auch Cotesischer Lehrsatz. Die Wurzeln obiger Gleichung, oder auch der Gleichung $x^n = N$, sind alle Werthe von x, welche, auf die nte Potenz erhoben, die Größe N hervorbringen. Dies führt auf den einfachern Begriff der Wurzeln aus Potenzen. Es ist nämlich überhaupt die Wurzel des nten Grades aus N eine Größe, welche, auf die nte Potenz erhoben, N giebt, und wird durch $\sqrt[n]{N}$ bezeichnet. Wurzeln des 2ten, 3ten, 4ten Grades heißen auch Quadrat-, Cubik- und Biquadratwurzeln, und werden durch $\sqrt{N}$, $\sqrt[3]{N}$, $\sqrt[4]{N}$ bezeichnet. Elementare Methoden, dieselben zu finden, s. m. in den besondern Artikeln.

2. Jede mögliche Größe kann durch $1 + x$ dargestellt werden, wie leicht erhellet. Setzen wir nun, die Hindenburgische Bezeichnung der Binomial-Coefficienten (s. diesen Art. 1.) beibehaltend, für jedes willkührliche n und m:

$$^nS = 1 + {}^n\mathfrak{A}x + {}^n\mathfrak{B}x^2 + {}^n\mathfrak{C}x^3 + {}^n\mathfrak{D}x^4 + \ldots$$
$$^mS = 1 + {}^m\mathfrak{A}x + {}^m\mathfrak{B}x^2 + {}^m\mathfrak{C}x^3 + {}^m\mathfrak{D}x^4 + \ldots;$$

so erhält man, wenn man multiplicirt, leicht:

$$^nS.{}^mS = 1 + \left.\begin{matrix} {}^n\mathfrak{A} \\ + {}^m\mathfrak{A} \end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix} {}^n\mathfrak{B} \\ + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{A} \\ + {}^m\mathfrak{B} \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} {}^n\mathfrak{C} \\ + {}^n\mathfrak{B}\,{}^m\mathfrak{A} \\ + {}^n\mathfrak{A}\,{}^m\mathfrak{B} \\ + {}^m\mathfrak{C} \end{matrix}\right\} x^3 + \ldots$$

d. i. nach dem a. a. O. (22.) ganz allgemein bewiesenen Satze von den Binomial-Coefficienten:

$$^nS.{}^mS = 1 + {}^{n+m}\mathfrak{A}x + {}^{n+m}\mathfrak{B}x^2 + {}^{n+m}\mathfrak{C}x^3 + \ldots;$$

oder für jedes n und m:

$$^nS.{}^mS = {}^{n+m}S.$$

Digitized by Google

Nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten, welcher bekanntlich sehr leicht durch bloße Multiplication bewiesen werden kann, ist, wenn n eine positive ganze Zahl ist:

$$^{n}S = (1+x)^{n}.$$

Setzen wir nun, unter derselben Voraussetzung, $m = -n$, so ist

$$^{n}S \cdot {}^{-n}S = {}^{n-n}S = {}^{0}S = 1, \quad {}^{-n}S = \frac{1}{^{n}S} = \frac{1}{(1+x)^{n}}.$$

^{-n}S wird aus ^{n}S erhalten, wenn man $-n$ für n setzt; also muß auch, nämlich in Bezug auf diese Reihen, $\frac{1}{(1+x)^{n}}$ aus $(1+x)^{n}$ erhalten werden, wenn man $-n$ für n setzt. Dies hat auf die sogenannten Potenzen mit negativen Exponenten geleitet. $(1+x)^{-n}$ ist nichts anders, als eine neue Bezeichnung für den Bruch $\frac{1}{(1+x)^{n}}$.

Nach der obigen allgemeinen Relation erhält man leicht:

$$^{n}S \cdot {}^{n}S = (^{n}S)^{2} = {}^{n+n}S = {}^{2n}S,$$
$$^{2n}S \cdot {}^{n}S = (^{n}S)^{3} = {}^{2n+n}S = {}^{3n}S,$$
$$^{3n}S \cdot {}^{n}S = (^{n}S)^{4} = {}^{3n+n}S = {}^{4n}S,$$

u. s. f. u. s. f.

Also für jedes n und jedes ganze positive m:

$$(^{n}S)^{m} = {}^{mn}S.$$

Sey nun $n = \frac{\alpha}{\gamma}$, wo α eine willkührliche positive oder negative ganze Zahl, γ aber eine positive ganze Zahl seyn soll; so ist

$$(^{n}S)^{\gamma} = (^{\frac{\alpha}{\gamma}}S)^{\gamma} = {}^{\frac{\alpha\gamma}{\gamma}}S = {}^{\alpha}S,$$

und folglich offenbar $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ ein Werth von $\sqrt[\gamma]{^{\alpha}S}$. Aber nach dem Obigen $^{\alpha}S = (1+x)^{\alpha}$. Also $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ ein Werth von $\sqrt[\gamma]{(1+x)^{\alpha}}$. Es wird aber $^{\frac{\alpha}{\gamma}}S$ aus ^{n}S erhalten, wenn man $\frac{\alpha}{\gamma}$ für n setzt; also muß auch, immer nämlich in Bezug auf diese Reihen, $\sqrt[\gamma]{(1+x)^{\alpha}}$ aus $(1+x)^{n}$ er-

Digitized by Google

halten werden, wenn man $\frac{\alpha}{\gamma}$ für n setzt. Dies hat auf eine neue Bezeichnung der Wurzeln geführt, indem hiernach

$$\sqrt[\gamma]{(1+x)^\alpha} \text{ und } (1+x)^{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

identische Ausdrücke sind.

Auch ist nun hiernach für jedes n:

$$(1+x)^n = {}^nS,$$

wo aber natürlich in dem Falle, wo n keine ganze Zahl ist, durch ${}^nS$ nur ein bestimmter Werth von $(1+x)^n$ gegeben wird. Daß die vorstehende Gleichung auch dann gilt, wenn n irrational wäre, versteht sich von selbst, da jede irrationale Größe eine rationale Grenze hat. Es ist also für alle n und m:

$$(1+x)^n = {}^nS,\ (1+x)^m = {}^mS;$$
$$(1+x)^n.(1+x)^m = {}^nS.{}^mS = {}^{n+m}S;$$

aber auch

$$(1+x)^{n+m} = {}^{n+m}S;$$

also

$$(1+x)^n.(1+x)^m = (1+x)^{n+m};$$

oder für $1+x=a$, überhaupt:

$$a^n.a^m = a^{n+m},$$

für jedes n und m. Auf dieser Relation beruht bekanntlich die ganze sogenannte Potenzen- und Wurzelrechnung. Man sieht, daß nach dem obigen Beweise diese Relation in dem Falle, wo nicht beide Exponenten ganze Zahlen sind, natürlich nur für die Werthe der Wurzeln gilt, welche die durch S bezeichneten Reihen liefern, d. i. für die Werthe, welche durch den binomischen Lehrsatz gegeben werden. Die folgenden Betrachtungen sollen zeigen, ob und inwiefern obige Relation eine weitere Ausdehnung gestattet.

3. Bezeichnen wir der Kürze wegen auch hier $\sqrt{-1}$ durch i, so folgt durch successive Multiplication aus ganz einfachen trigonometrischen Gründen leicht, daß für jedes $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \ldots$ immer

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi' + i\sin\varphi')(\cos\varphi'' + i\sin\varphi'')\ldots$$
$$= \cos(\varphi+\varphi'+\varphi''+\ldots) + i\sin(\varphi+\varphi'+\varphi''+\ldots$$

ist. Also offenbar auch für jedes ganze positive n:

Digitized by Google

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi .$$

Eben so ist

$$(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)) = \cos(n-n)\varphi + i\sin(n-n)\varphi = 1 ,$$

$$\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = \frac{1}{\cos n\varphi + i\sin n\varphi} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n} ,$$

d. i. nach der Bezeichnung, welche wir in (2.) kennen gelernt haben,

$$\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi) = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{-n} ,$$

so daß also für jedes ganze positive oder negative n:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

ist.

4. Wir betrachten nun im Allgemeinen die Größe $\alpha + \beta i$, unter welcher auch für $\beta = 0$ jede reelle Größe enthalten ist. Daß auf diese Form auch jede imaginäre Größe gebracht werden kann, ist in dem Art. Unmögliche Größen ausführlich gezeigt worden, worauf wir uns hier der Kürze wegen beziehen müssen. Ist $\alpha + \beta i = \alpha' + \beta' i$, so ist $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, weil aus dieser Gleichung

$$\alpha - \alpha' = (\beta - \beta')i, \quad \frac{\alpha - \alpha'}{\beta - \beta'} = i$$

folgt, so daß also, wenn nicht zugleich $\alpha - \alpha' = 0$, $\beta - \beta' = 0$ wäre, eine reelle Größe einer imaginären Größe gleich wäre, welches ungereimt ist. Die Größe $\alpha + \beta i$ läßt sich immer auf die Form

$$\alpha + \beta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

bringen. Aus dieser Gleichung folgt nämlich, wie wir so eben gesehen haben,

$$\alpha = \varrho\cos\varphi, \quad \beta = \varrho\sin\varphi ;$$

und, wenn man quadrirt:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = \varrho^2 ;$$

also $\varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, wo für alle Wurzelgrößen immer die durch den binomischen Lehrsatz gegebenen Werthe sollen gesetzt gedacht werden. Also

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

wodurch φ gegeben ist.

Digitized by Google

5. Den Inbegriff aller Werthe von

$$\sqrt[n]{(\alpha+\beta i)^m} \text{ oder } (\alpha+\beta i)^{\frac{m}{n}}$$

wollen wir durch

$$\sqrt[n]{((\alpha+\beta i))^m} \text{ oder } ((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}$$

bezeichnen. Fassen wir aber nur einen bestimmten Werth in's Auge, so soll nur eine einfache Parenthese gebraucht werden, wie im Art. Unmögliche Größen (24.). Sey

$$\alpha + \beta i = \varrho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

und irgend ein Werth von $(\alpha+\beta i)^{\frac{m}{n}} = x$. Man setze

$$x = r(\cos\psi + i\sin\psi);$$

so ist also

$$\sqrt[n]{(\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi))^m} = r(\cos\psi+i\sin\psi),$$

woraus, wenn man auf beiden Seiten auf die nte Potenz erhebt, augenblicklich:

$$\varrho^m(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m = r^n(\cos\psi+i\sin\psi)^n;$$

d. i., weil m, n ganze Zahlen sind, nach (3.):

$$\varrho^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi) = r^n(\cos n\psi + i\sin n\psi).$$

Also (4.)

$$\varrho^m\cos m\varphi = r^n\cos n\psi,\ \varrho^m\sin m\varphi = r^n\sin n\psi.$$

Folglich, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, dann addirt:

$$\varrho^{2m} = r^{2n},\ \varrho^m = r^n.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn man

$$x = \sqrt[n]{\varrho^m} = \varrho^{\frac{m}{n}}$$

setzt, wo wir wieder den durch den binomischen Lehrsatz gegebenen Werth dieser Wurzelgröße uns genommen denken wollen, welches offenbar verstattet ist. Es ist also auch

$$\cos m\varphi = \cos n\psi,\ \sin m\varphi = \sin n\psi;$$

woraus nach einfachen trigonometrischen Gründen:

$$n\psi = m\varphi + 2k\pi,\ \psi = \frac{m\varphi + 2k\pi}{n}$$

für jedes ganze positive oder negative k. Folglich

$$x = \varrho^{\frac{m}{n}}\left\{\cos\frac{m\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{m\varphi+2k\pi}{n}\right\}$$

Digitized by Google

und folglich für jedes ganze positive oder negative k:

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \quad (3.).$$

Ganz eben so ist

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\cos\frac{\mu\varphi}{\nu}+i\sin\frac{\mu\varphi}{\nu}\right)\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{n}\right).$$

Folglich, wenn man multiplicirt:

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}\cdot((\alpha+\beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\cdot\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\cos\frac{m\varphi}{n}+i\sin\frac{m\varphi}{n}\right)\left(\cos\frac{\mu\varphi}{\nu}+i\sin\frac{\mu\varphi}{\nu}\right)$$
$$\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\varkappa\pi}{\nu}+i\sin\frac{2\varkappa\pi}{\nu}\right).$$

Aber, weil $\varrho^{\frac{m}{n}}$, $\varrho^{\frac{\mu}{\nu}}$ die durch den binomischen Lehrsatz gegebenen Werthe dieser Wurzelgrößen sind, nach (2.)

$$\varrho^{\frac{m}{n}}\cdot\varrho^{\frac{\mu}{\nu}} = \varrho^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}.$$

Also nach (3.), wenn wir der Kürze wegen $k\nu+\varkappa n = k'$ setzen:

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}}((\alpha+\beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left\{\cos\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi+i\sin\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\right\}$$
$$\times\left(\cos\frac{2k'\pi}{n\nu}+i\sin\frac{2k'\pi}{n\nu}\right).$$

Aber nach dem Obigen

$$((\alpha+\beta i))^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}} =$$

$$\varrho^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left\{\cos\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi+i\sin\left(\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}\right)\varphi\right\}$$
$$\times\left(\cos\frac{2k''\pi}{n\nu}+i\sin\frac{2k''\pi}{n\nu}\right),$$

Digitized by Google

da der Nenner von $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu} = \frac{m\nu + \mu n}{n\nu}$ dem Product $n\nu$ gleich ist. Da letztere Gleichung für jedes ganze positive oder negative k'' gilt, so ist obiges Product offenbar ein Werth von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}$, und folglich

$$((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}} . ((\alpha + \beta i))^{\frac{\mu}{\nu}} = ((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}$$

welche Gleichung man aber nur so zu verstehen hat, daß immer, wenn irgend zwei Werthe von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}}$ und $((\alpha + \beta i))^{\frac{\mu}{\nu}}$ in einander multiplicirt werden, ein Werth von $((\alpha + \beta i))^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}}$ erhalten wird; in dieser Beziehung ist also die Relation

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

allgemein, und gilt für jedes m und n.

6. Aus diesen Gleichungen folgen alle übrigen Formeln, auf denen die Rechnung mit Potenzen und Wurzeln beruhet, leicht. Nur hat man dieselben immer in einem ähnlichen Sinne wie vorhergehende zu nehmen. Wir geben nur die Beweise der Hauptsächlichsten. Setzen wir $-n$ für n, so wird

$$a^m . a^{-n} = a^m . \frac{1}{a^n} = a^{m-n},$$

eine ebenfalls sehr bekannte Formel.

Ist nun m eine beliebige, n eine positive ganze Zahl, so ist

$$(a^m)^n = a^m . a^m . a^m \ldots a^m = a^{m+m+\ldots+m} = a^{mn} .$$

Folglich auch

$$(a^m)^{-n} = \frac{1}{(a^m)^n} = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn} = a^{m(-n)} .$$

Ist $n = \frac{\alpha}{\gamma}$, wo α positiv oder negativ seyn kann, γ aber positiv genommen wird, so ist

$$(a^m)^{\frac{\alpha}{\gamma}} = \sqrt[\gamma]{(a^m)^\alpha} = \sqrt[\gamma]{a^{m\alpha}} = a^{\frac{m\alpha}{\gamma}} = a^{m\frac{\alpha}{\gamma}} .$$

Also ist für jedes m und n:

$$(a^m)^n = a^{mn} ,$$

Digitized by Google

Ist m eine beliebige, n eine positive ganze Zahl, und $m = n\alpha$, so ist immer $\sqrt[n]{a^m} = a^\alpha$, weil $(a^\alpha)^n$ nach dem so eben Bewiesenen $= a^{n\alpha} = a^m$ ist.

Diese Bemerkungen über die allgemeinen Formeln der Potenzen- und Wurzelrechnung mögen hinreichen, und wir geben nur noch einige Formeln zur annähernden Berechnung irrationaler Wurzeln. In den hier bewiesenen Sätzen sind auch die allgemeinen Regeln der in den Elementen sogenannten Rechnung mit Wurzelgrößen vollständig enthalten.

7. Zur annähernden Berechnung irrationaler Wurzeln dienen u. A. die in den Artt. Binomischer Lehrsatz (13—19.) und Kettenbruch (53—59.) mitgetheilten Formeln, oder auch die im Art. Umformung der Reihen (27.) bewiesene Gleichung:

$$\sqrt[m]{x} = \left\{1 - \frac{1}{mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right) - \frac{mn-1}{mn \cdot 2mn}\left(\frac{1}{1+x^n}\right)^2 - \cdots\right\}$$
$$\left\{1 + \frac{1}{mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right) + \frac{mn+1}{mn \cdot 2mn}\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2 + \cdots\right\}$$

wo n eine ganz willkührliche Zahl ist, die beliebig angenommen werden kann.

Man kann, um $\sqrt[n]{a}$ zu finden, auch auf folgende Weise verfahren. Man wähle eine Zahl k so, daß $k^n a$ der nten Potenz einer andern Größe α möglichst nahe komme, und setze

$$k^n a = \alpha^n - x, \quad \sqrt[n]{a} = \frac{1}{k}\sqrt[n]{\alpha^n - x}.$$

Soll dieses Verfahren mit Leichtigkeit angewandt werden, so muß man im Besitz ziemlich ausgedehnter Tabellen der Potenzen der Zahlen seyn. Nach dem binomischen Lehrsatze erhält man nun leicht

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{k}\sqrt[n]{\alpha^n\left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right)} = \frac{\alpha}{k}\left(1 - \frac{x}{\alpha^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{\alpha}{k}\left\{1 - \frac{1}{n}\cdot\frac{x}{\alpha^n} - \frac{n-1}{n \cdot 2n}\cdot\frac{x^2}{\alpha^{2n}} - \frac{(n-1)(2n-1)}{n \cdot 2n \cdot 3n}\cdot\frac{x^n}{\alpha^{3n}}\right.$$
$$\left. - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{n \cdot 2n \cdot 3n \cdot 4n}\cdot\frac{x^4}{\alpha^{4n}} - \cdots\right\}.$$

Diese Reihe wird, weil x nach der Annahme gegen α^n

Digitized by Google

sehr klein ist, immer stark convergiren, und daher zur Berechnung bequem seyn. M. s. v. Ettinghausen comb. Anal. Wien. 1826. §. 95—100.

Lambert (Beiträge zur Mathematik. II. S. 152.) giebt folgendes Verfahren. Sey

$$x = (a+b)^n = a^n + na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots.$$

Man multiplicire auf beiden Seiten mit $1 + \frac{by}{a}$, so erhält man

$$x\left(1 + \frac{by}{a}\right) = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3 + \ldots$$
$$+ ya^{n-1}b + nya^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)}{2}ya^{n-3}b^3 + \ldots$$

Nun wird y so bestimmt, daß die b^2 enthaltenden Glieder verschwinden, oder daß

$$\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + nya^{n-2}b^2 = 0$$

wird. Dieß giebt $y = -\frac{n-1}{2}$, und nach gehöriger Substitution:

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2}.\frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2}a^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n+1)}{2}a^{n-3}b^3 - \ldots$$

$$x = \left\{\frac{2a+(n+1)b}{2a-(n-1)b}\right\}a^n - \frac{n(n-1)(n+1)a^{n-2}b^3}{6(2a-(n-1)b)} - \ldots.$$

Das erste Glied dient zur Berechnung der Wurzel, das zweite zur Prüfung des Grades der Genauigkeit. Für $n = \frac{1}{3}$ wird,

$$\sqrt[3]{a+b} = \frac{3a+2b}{3a+b}\sqrt[3]{a} + \frac{2b^3\sqrt[3]{a}}{81a^3+27a^2b} + \ldots.$$

Lambert berechnet a. a. O. nach dieser Formel $\sqrt[3]{\frac{1}{6}\pi}$ bis auf 18 Decimalstellen. Hier Exempel beizubringen ist unnöthig.

8. Wurzeln aus Binomien von der Form $A \pm \sqrt{B}$, wo $\sqrt{B}$ irrational ist, auszuziehen, kommt oft vor, so daß einige Bemerkungen über diesen Gegenstand hier nicht am unrechten Orte seyn werden. Sey

$$\sqrt[n]{(A+\sqrt{B})} = x + \sqrt{y},\ A + \sqrt{B} = (x+\sqrt{y})^n;$$

Digitized by Google

so erhält man nach dem binomischen Lehrsatze mit Anwendung der Hindenburgischen Bezeichnung der Binomial-Coefficienten:

$$A + \sqrt[n]{B} = x^n + {}^nB x^{n-2} y + {}^nD x^{n-4} y^2 + \ldots + \left\{ {}^nA x^{n-1} + {}^nC x^{n-3} y + {}^nE x^{n-5} y^2 + \ldots \right\} \sqrt[n]{y} .$$

Also, wenn man das Rationale dem Rationalen, das Irrationale dem Irrationalen gleich setzt:

$$A = x^n + {}^nB x^{n-2} y + {}^nD x^{n-4} y^2 + \ldots$$
$$\sqrt[n]{B} = \left\{ {}^nA x^{n-1} + {}^nC x^{n-3} y + {}^nE x^{n-5} y^2 + \ldots \right\} \sqrt[n]{y}$$

welches zwei Gleichungen mit den zwei unbekannten Größen x und y sind, durch deren Auflösung diese Größen erhalten werden. Die Elimination führt man am leichtesten auf folgende Art aus. Durch Subtraction erhält man:

$$A - \sqrt[n]{B} = x^n - {}^nA x^{n-1} \sqrt[n]{y} + {}^nB x^{n-2} y - {}^nC x^{n-3} y \sqrt[n]{y} + {}^nD x^{n-4} y^2 - \ldots = (x - \sqrt[n]{y})^n ;$$

woraus auch zugleich erhellet, daß immer zu gleicher Zeit

$$\sqrt[n]{(A \pm \sqrt[n]{B})} = x \pm \sqrt[n]{y}$$

ist. Also

$$(A + \sqrt[n]{B})(A - \sqrt[n]{B}) = (x + \sqrt[n]{y})^n (x - \sqrt[n]{y})^n ;$$
$$A^2 - B = (x^2 - y)^n, \quad \sqrt[n]{(A^2 - B)} = x^2 - y ;$$
$$y = x^2 - \sqrt[n]{(A^2 - B)} .$$

Diesen Werth von y setze man in die rationale Gleichung

$$A = x^n + {}^nB x^{n-2} y + {}^nD x^{n-4} y^2 + \ldots ,$$

wodurch man eine rationale Gleichung des $n$ten Grades erhält, durch deren Auflösung x, und folglich mittelst

$$y = x^2 - \sqrt[n]{(A^2 - B)}$$

auch y bestimmt wird.

9. Ist das gegebene Binomium von der Form

$$\sqrt[n]{A'} \pm \sqrt[n]{B'} ,$$

so wähle man Θ so, daß $\sqrt[n]{A'} . \sqrt[n]{\Theta} = \sqrt[n]{A'\Theta}$ rational, und $\sqrt[n]{B'} . \sqrt[n]{\Theta} = \sqrt[n]{B'\Theta} = \sqrt[n]{B}$ ist; so ist

Digitized by Google

$$\sqrt[n]{(\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'})} \cdot \sqrt[n]{\sqrt{\Theta}} = \sqrt[n]{(A \pm \sqrt{B})} = x \pm \sqrt{y} \quad (8.);$$

$$\sqrt[n]{(\sqrt{A'} \pm \sqrt{B'})} = \frac{x \pm \sqrt{y}}{\sqrt[n]{\sqrt{\Theta}}} = \sqrt[2n]{\frac{x^{2n}}{\Theta}} \pm \sqrt[2n]{\frac{y^n}{\Theta}}.$$

10. Sey z. B. $\sqrt{(A \pm \sqrt{B})}$ zu entwickeln, so ist nach (8.)

$$A = x^2 + y, \; y = x^2 - \sqrt{(A^2 - B)};$$
$$A = 2x^2 - \sqrt{(A^2 - B)};$$
$$x = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}}, \; \sqrt{y} = \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}};$$
$$\sqrt{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{(A^2 - B)}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{(A^2 - B)}}{2}}.$$

So ist z. B., für

$$A + \sqrt{B} = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48},$$
$$A = 7, \; B = 48, \; A^2 - B = 1;$$
$$\sqrt{(7 + 4\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}.$$

Für

$$\sqrt{A'} - \sqrt{B'} = \sqrt{32} - \sqrt{24}$$

ist $A' = 32$, $B' = 24$, $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{64} = 8$, $\Theta = 2$, $A = 8$, $B = B'\Theta = 48$. Also $A^2 - B = 16$, $x = \sqrt{6}$, $y = 2$; $\sqrt{(\sqrt{32} - \sqrt{24})} = \sqrt{\frac{36}{2}} - \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{18} - \sqrt{2}$.

11. Soll man $\sqrt[4]{(A \pm \sqrt{B})}$ entwickeln, so hat man nach (8.) die Gleichungen

$$A = x^4 + 6x^2y + y^2, \; y = x^2 - \mathfrak{A},$$

wenn wir der Kürze wegen $\sqrt[4]{(A^2 - \sqrt{B})} = \mathfrak{A}$ setzen. Also

$$A = 8x^4 - 8x^2\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2, \; 8x^4 - 8x^2\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 - A = 0.$$

Löset man diese Gleichung wie eine quadratische auf, so erhält man

$$x = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}}, \; \sqrt{y} = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}};$$
$$\sqrt[4]{(A \pm \sqrt{B})} = \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} + \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}} \pm \sqrt{\left\{\sqrt{\frac{A + \mathfrak{A}^2}{8}} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\right\}}.$$

Sey z. B. $\sqrt[4]{(113 + 72\sqrt{2})}$ zu finden. Hier ist $A = 113$, $B = 72^2 \cdot 2 = 10368$, $A^2 - B = 2401$, $\sqrt{2401}$

Digitized by Google

$= 49$, $\sqrt[4]{2401} = 7 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}^2 = 162$, $\frac{A+\mathfrak{A}^2}{8} = \frac{81}{4}$, $\sqrt{\frac{A+\mathfrak{A}^2}{8}} = \frac{9}{2}$. Also

$$\sqrt[4]{(113+72\sqrt{2})} = \sqrt{(\tfrac{9}{2}+\tfrac{7}{2})} + \sqrt{(\tfrac{9}{2}-\tfrac{7}{2})} = 1+\sqrt{8} = 1+2\sqrt{2}.$$

12. Für $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})}$ müßte man nach (8.) die Gleichungen

$$A = x^3 + 3xy,\ y = x^2 - \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{(A^2 - B)},$$

d. i. nach der Elimination von y die Gleichung des dritten Grades

$$4x^3 - 3x\sqrt[3]{(A^2 - B)} - A = 0$$

auflösen, und y aus obiger Formel bestimmen. Die Wurzeln höherer Grade führen eben so auf die Auflösung höherer Gleichungen, in welchem Verhältnisse natürlich auch die Schwierigkeit wächst.

M. s. über diesen Gegenstand Neutoni Arithmetica universalis. §. 84. und Castillons Commentar p. 78. Eulers Algebra. Thl. I. Cap. 8.; besonders einen Aufsatz von Hennert in Hindenburgs Archiv der reinen und angew. Math. Neuntes Heft. S. 50.

Wurzelgrößen, s. Wurzel (6.).

Wurzelzeichen, s. Wurzel und Zeichen, mathematische.

Z.

Zähler eines Bruchs, s. Bruch.

Zahl (Numerus). Der Begriff der Zahl entsteht überhaupt durch die Vorstellung des Neben- oder Beieinanderseyns mehrerer Dinge, welche entweder wirklich völlig gleich und gleichartig sind, oder auf deren Verschiedenheit, insofern sie zu einer Zahl vereinigt werden sollen, wenigstens keine Rücksicht genommen wird; also auch, was dasselbe ist, durch die Vorstellung der Wiederholung oder Vervielfachung eines und desselben Dinges, welches im Allge-

Digitized by Google

meinen durch A bezeichnet werden soll. Nun kann man sich aber entweder die durch Wiederholung des A entstandene Größe selbst, oder auch bloß die Menge der Wiederholungen vorstellen. Das Erste heißt eine benannte, concrete oder auch unreine Zahl, und A ihre Einheit; das Zweite wird eine unbenannte, abstracte oder reine Zahl genannt. In jeder benannten Zahl ist folglich eine unbenannte enthalten, und man kann also, wenn jene durch N, diese durch n, die Einheit durch A bezeichnet wird, jede benannte Zahl durch $N = nA$ darstellen, indem durch das bloße Nebeneinandersetzen der Symbole n und A bekanntlich die nmalige Wiederholung oder Vervielfachung der Größe A angedeutet wird. Umgekehrt kann jede unbenannte Zahl als eine benannte betrachtet werden, wenn sie auf eine bestimmte Größe als Einheit bezogen wird.

1. Daß jede benannte Zahl eine Größe (Quantum) ist, und ihr auch eine bestimmte Größe als Eigenschaft zukommt, unterliegt keinem Zweifel. Eben so klar ist es, daß auch jede unbenannte Zahl, in Bezug auf mehr oder minder oftmalige Wiederholung irgend einer willkührlich gedachten Einheit, eine Größe ist, und also auch unbenannte Zahlen rücksichtlich der Größe auf jede Art mit einander verbunden und verglichen werden können. Die Größe einer benannten Zahl $N = nA$ hängt sowohl von der Größe der Einheit A, auf welche sie sich bezieht, als auch von der Größe der in ihr enthaltenen unbenannten Zahl n ab. Ueberhaupt können aber benannte Zahlen nur dann mit einander verglichen werden, wenn die Einheiten, auf welche sie sich beziehen, wenn auch nicht gleich, aber doch gleichartig sind. Zwischen 12 Pfund und 6 Thlr. ist keine Vergleichung möglich; aber wohl zwischen 12 Pfund und 6 Lth. Sollen nun überhaupt, Gleichartigkeit der Einheiten vorausgesetzt, irgend zwei benannte Zahlen $N = nA$, $N' = n'A'$ mit einander verglichen werden; so suche man ein gemeinschaftliches Maaß der Einheiten A und A', welches durch M bezeichnet werden mag. Ist dieses gemeinschaftliche Maaß in A und A' respective m und m' Mal enthalten, so daß $A = mM$, $A' = m'M$ ist; so ist

Digitized by Google

$N = nmM$, $N' = n'm'M$, und die Größe der Zahlen N und N' hängt nun bloß von den unbenannten Zahlen nm und n'm' ab. Man kann also diese statt jener setzen, und mit ihnen alle Rechnungen ausführen, welche mit den benannten Zahlen vorgenommen werden sollten, wenn nur dem ebenfalls als unbenannte Zahl erscheinenden Resultate wieder M als Einheit untergelegt wird. Dieß ist auch der Grund, daß die Arithmetik bei allen ihren Operationen bloß unbenannte Zahlen zum Grunde legt, weil, um mit benannten Zahlen rechnen zu können, bloß noch specielle Regeln zur Reduction der verschiedenen Einheiten auf einander, oder zur Auffindung ihres gemeinschaftlichen Maaßes erforderlich sind, welche aber immer von der besondern Beschaffenheit der in Rechnung genommenen Größen abhängen, und eben deshalb der reinen Arithmetik fremd sind, sich aber immer aus der Natur dieser Größen leicht ergeben, wie schon aus den ersten Elementen des Rechnens bekannt ist.

2. Man pflegt zwischen ganzen und gebrochenen Zahlen oder Brüchen zu unterscheiden. Jene entstehen durch unmittelbare Vervielfachung der Einheit, und sind völlig einerlei mit dem, was wir so eben eine Zahl schlechthin genannt haben. Brüche entstehen durch Theilung der Einheit in gleiche Theile, und Vervielfachung eines der erhaltenen Theile. Liegt hierbei eine bestimmte Einheit zum Grunde, so ist der Bruch benannt, sonst unbenannt. Dieser Unterschied zwischen ganzen Zahlen und Brüchen ist aber durchaus nicht wesentlich, da jeder Bruch, wenn er nur auf eine andere Einheit bezogen wird, auch als ganze Zahl betrachtet werden kann, und umgekehrt. Der Bruch $\frac{n}{m}$ A ist die ganze Zahl n, auf $\frac{1}{m}$ A $=$ A' als Einheit bezogen; die ganze Zahl nA ist der Bruch $\frac{1}{n}$, für nnA $=$ A'' als Einheit. In diesem Artikel werden wir von nun an unter dem Worte Zahl immer die ganze Zahl verstehen.

Vorzüglich bei den ältern Mathematikern findet man sehr viele verschiedene Formen der Zahlen, von denen in einzelnen Artikeln dieses Wörterbuchs besonders gehandelt

Digitized by Google

worden ist, wie z. B. die geraden und ungeraden Zahlen, die Primzahlen, die vollständigen und unvollständigen Zahlen, die befreundeten Zahlen, die figurirten Zahlen, die Polygonal-, Pyramidal- und Pyrgoidal-Zahlen, die Pronikzahlen, u. dergl.

Ueber die Bezeichnung der Zahlen s. m. die Artikel Zahlensystem, Zahlzeichen und Ziffer.

3. Immer hat der abergläubische, dem Wunderbaren gern sich hinneigende Mensch, in gewissen Zahlen geheime übermenschliche Kräfte zu finden geglaubt. Schon bei den ägyptischen Priestern treffen wir die ersten Spuren der Zahlensymbolik. Die Zahl sieben war ihnen heilig, weil der Nil mit sieben Mündungen in's Meer strömt. Pythagoras mag sie auf seinen Reisen von den Aegyptiern gelernt haben, und die Zahlensymbolik ward ein charakteristisches Merkmal seiner Schule. Schon bei den Hebräern heißt schwören siebenen, d. h. bei der Zahl sieben betheuern. Zahlen, die in den Büchern der heiligen Schrift oft vorkommen, sind bei den Völkern der christlichen Zeitrechnung immer für heilig gehalten worden, wie z. B. die Zahl sechs, weil die Genesis lehrt, daß Gott in eben so vielen Tagen die Erschaffung der Welt vollendete. Heilbronner hat manches hierher gehörende in einem besondern Kapitel: De arcanis numerorum qualitatibus, a quibusdam ingeniose, interdum vero superstitiose inventis, seiner Historia Matheseos (p. 746—758.) gesammelt. Er führt z. B. zehn Sprachen an, in denen der Name des höchsten Wesens mit vier Buchstaben geschrieben wird. Von den hierher gehörenden Schriften des Virgilius (Salzburgensis), Clichtoveus, Paulinus, Lindenberg, Petrus Bungus handelt Kästner ausführlich in der Gesch. d. Math. Thl. I. S. 205 ff. Auch gehören hierher des Athanasius Kircher Arithmologia, sive de occultis numerorum mysteriis. Romae. 1665. 4.; Meursius de denario pythagorico; auch ein zwar kurzer, aber nicht uninteressanter Aufsatz in den Blättern für literarische Unterhal-

Digitized by Google

tung. Lpzg. 1827. Nr. 148. 149. Geschichte des Glaubens an die Heiligkeit der Zahl Sieben in F. Gedikes vermischten Schriften. Berlin. 1801. S. 32 — 60. Durch die Ueberschrift des hierher gehörenden Kapitels in Kästners Geschichte der Mathematik: „Gelehrter Tand von Zahlen" mag Zweck und Werth vorstehender Bemerkungen angedeutet seyn.

4. Die ganze Zahlenwissenschaft nennt man gewöhnlich die Arithmetik. In neuerer Zeit sind jedoch zwei wesentlich von einander verschiedene Theile derselben von einander geschieden worden. Den einen größern, am meisten bearbeiteten, könnte man den rechnenden oder calculatorischen nennen, weil der eigentliche Calcul nach allen möglichen Richtungen Hauptzweck desselben ist, seinen Hauptinhalt ausmacht. Unter der Arithmetik im engern Sinne wird namentlich dieser Theil verstanden. Er zerfällt wieder in mehrere einzelne große Wissenschaften, über welche besondere Artikel dieses Wörterbuchs hinreichende Belehrung ertheilen. Der andere Theil der Zahlenwissenschaft dagegen beschäftigt sich, so wie die Geometrie die Eigenschaften der verschiedenen Formen der ausgedehnten Größe untersucht, mit der Aufsuchung der Eigenschaften der Zahlen, d. i. immer der ganzen Zahlen, deren es viele höchst merkwürdige, zum Theil sehr versteckte, giebt. Man nennt diesen Zweig der Arithmetik die Zahlenlehre im engern Sinne, oder auch sehr passend, nach Legendre's Vorgange, die Theorie der Zahlen. Von dieser wichtigen und hohes Interesse habenden Disciplin einen Abriß zu geben, ist der Zweck dieses Artikels. Vollständigkeit ist auf so geringem Raume unerreichbar. Die Sätze ohne Beweise zu geben, möchte wenigen Nutzen haben, und nur höchst unvollständige Belehrung gewähren. Wir geben daher einige der wichtigsten, einflußreichsten und interessantesten Theoreme vollständig mit ihren Beweisen, wodurch der Leser in den Geist der Wissenschaft eingeführt, und zum Studium größerer Werke vorbereitet werden wird.

Digitized by Google

I. Satz des Euclides von den Primzahlen.

1. Wenn jede der beiden Zahlen P, Q kleiner als die Primzahl p ist; so ist das Product PQ nicht durch p theilbar.

Sey, indem man P, r, r′, r″, r‴, ... als Divisoren, und r, r′, r″, r‴, r⁗, ... als die entsprechenden Reste betrachtet,

$$\begin{aligned} p &= Pq + r, \\ P &= rq' + r', \\ r &= r'q'' + r'', \\ r' &= r''q''' + r''', \\ &\text{\&c.} \qquad\qquad \text{\&c.} \end{aligned}$$

wobei zu bemerken, daß r, weil p eine Primzahl und > P ist, positiv und nicht = o ist. Durch Substitution erhält man leicht nach und nach:

$$\begin{aligned} p &= Pq + r \\ &= rqq' + r'q + r \\ &= r'qq'q'' + r''qq' + r'q + r \\ &= r''qq'q''q''' + r'''qq'q'' + r''qq' + r'q + r \\ &\qquad \text{\&c} \qquad\qquad\qquad \text{\&c.} \end{aligned}$$

Würde nie ein Glied der Reihe r, r′, r″, r‴, ... = o, so würden diese Ausdrücke in's Unendliche fortgehen, und folglich p durch eine unendliche Reihe positiver ganzer Zahlen ausgedrückt werden, welches ungereimt ist. Also muß man irgend ein Mal auf einen Rest = o kommen. Dieser Rest sey = $r^{(n+1)}$; so ist die Reihe der ersten Gleichungen begrenzt und folgende:

$$\begin{aligned} p &= Pq + r \\ P &= rq' + r' \\ r &= r'q'' + r'' \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r^{(n-2)} &= r^{(n-1)}q^{(n)} + r^{(n)} \\ r^{(n-1)} &= r^{(n)}q^{(n+1)}. \end{aligned}$$

Also geht $r^{(n)}$ in $r^{(n-1)}$, folglich auch in $r^{(n-2)}$, folglich auch in $r^{(n-3)}$, also endlich auch in p auf. Da nun p eine Primzahl und $r^{(n)}$ offenbar < p ist; so ist $r^{(n)} = 1$.

Digitized by Google

Folglich vorstehende Gleichungen, wenn man sie zugleich alle mit Q vervielfältigt:

$$\begin{aligned} pQ &= PQq + rQ \\ PQ &= rQq' + r'Q \\ rQ &= r'Qq'' + r''Q \\ &\cdots\cdots\cdots \\ r^{(n-2)}Q &= r^{(n-1)}Qq^{(n)} + Q . \end{aligned}$$

Ginge nun p in PQ auf, so müßte es, wegen der ersten Gleichung, da es in pQ aufgeht, offenbar auch in rQ, folglich eben so, wegen der zweiten, in r'Q, und, wegen der dritten, in r''Q aufgehen, u. s. f. Setzt man diesen Schluß fort, so erhellet, daß p in Q aufgehen müßte, welches ungereimt ist, da nach der Voraussetzung p ⫠ Q. Also kann p nicht in PQ aufgehen.

2. Geht die Primzahl p weder in P, noch in Q auf; so geht sie auch in PQ nicht auf.

Sey

$$P = pp' + r, \quad Q = pq' + r' ;$$

wo r < p, r' < p ist; so ist

$$PQ = p^2p'q' + pq'r + pp'r' + rr' .$$

Ginge nun p in PQ auf; so müßte es offenbar auch in rr' aufgehen, welches gegen (1.) ist.

3. Geht also die Primzahl p in PQ auf; so muß sie entweder in P oder in Q aufgehen.

Diesen Satz, welcher in der Zahlenlehre sehr geschätzt wird, hat schon Euclides (VII. 32.). Andere Beweise geben Legendre (Théorie des nombres. Séc. édit. p. 3.), und Gauß (Disquisitiones arithmeticae. p. 8. 9.).

4. Geht die Primzahl p in keiner der Zahlen P, Q, R, S, ... auf; so kann sie auch in PQRS .... nicht aufgehen.

p geht in PQ nicht auf (2.); also auch in PQR nicht (2.); also auch in PQRS nicht (2.); u. s. f.

5. Geht also die Primzahl p in dem Producte PQRS .... auf; so muß sie in einem seiner Factoren aufgehen. Geht

Digitized by Google

sie also in Q, R, S, ... nicht auf; so muß sie in P aufgehen.

6. Ist p mit P, Q, R, S, ... relative Primzahl; so geht p in PQRS .... nicht auf.

Ist p absolute Primzahl; so folgt der Satz aus (4.). Ist dies aber nicht der Fall; so sey $p = p'q$, wo p' eine Primzahl ist. Ginge nun p in PQRS .... auf; so sey

$$\frac{PQRS\ldots.}{p} = N = \frac{PQRS\ldots.}{p'q};$$

also $PQRS\ldots = p'qN$, und es müßte folglich die Primzahl p' in PQRS ... aufgehen, ohne, weil $p = p'q$ mit P, Q, R, S, ... relative Primzahl ist, in einer dieser Zahlen aufzugehen; gegen (4.).

7. Geht p, welches mit P, Q, R, S, ... relative Primzahl ist, in dem Producte $PQRS\ldots \times N$ auf; so muß p in N aufgehen.

Sey wieder $p = p'q$ und p' eine Primzahl;

$$\frac{PQRS\ldots \times N}{p} = N' = \frac{PQRS\ldots \times N'}{p'q},$$

$$\frac{PQRS\ldots \times N}{p'} = qN'.$$

Also geht die Primzahl p', welche, weil $p = p'q$ mit P, Q, R, S, ... relative Primzahl ist, in keiner dieser Zahlen aufgehen kann, in $PQRS\ldots \times N$ auf, und muß folglich in N aufgehen (5.). Sey daher $N = p'N_1$, $q = p''q'$, wo p'' wieder eine Primzahl ist; so ist

$$\frac{PQRS\ldots \times N}{p'q} = N' = \frac{PQRS\ldots \times N_1}{p''q'},$$

$$\frac{PQRS\ldots \times N_1}{p''} = q'N',$$

woraus wie vorher folgt, daß p'' in N_1 aufgehen muß. Sey daher $N_1 = p''N_2$, und jetzt q' selbst eine Primzahl, also nicht weiter zerlegbar; so ist

$$\frac{PQRS\ldots \times N_1}{p''q'} = N' = \frac{PQRS\ldots \times N_2}{q'};$$

folglich, wie vorher, auch N_2 durch q' theilbar, und daher $N_2 = q'N_3$. Aber $N = p'p''q'N_3$, und $p = p'p''q'$; also N durch p theilbar. Daß dieser Beweis allgemein ist, fällt in die Augen.

Digitized by Google

8. Sind p, p' relative Primzahlen, deren jede in P aufgeht; so geht auch pp' in P auf.

Sey $P = pq$, so geht p' in pq, und folglich (7.), weil es mit p relative Primzahl ist, in q auf. Ist also $q = p'q'$; so ist $P = pp'q'$, so daß also pp' in P aufgeht.

9. Sind $p, p', p'', p''', \ldots$ relative Primzahlen, deren jede in P aufgeht; so geht $pp'p''p''' \ldots$ in P auf.

Nach (8.) geht pp' in P auf; pp' und p'' sind relative Primzahlen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, pp' und p'' einen gemeinschaftlichen Primfactor haben müßten, welcher, weil er in pp' aufginge, in p oder p' aufgehen müßte (3.), so daß also p'' und p oder p' nicht relative Primzahlen wären, gegen die Voraussetzung; also geht $pp'p''$ in P auf (8.). Wie man weiter gehen kann, fällt in die Augen.

10. Ist der Bruch $\frac{x}{y}$ auf seine kleinste Benennung gebracht, so sind x, y relative Primzahlen; also ist $\frac{xxx\ldots x}{y} = \frac{x^n}{y}$ keine ganze Zahl (6.). Folglich ist auch $\frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$ keine ganze Zahl, weil, wenn dies der Fall, und $\frac{x^n}{y^n} = z$ wäre, $\frac{x^n}{y} = zy^{n-1}$, d. i. eine ganze Zahl, seyn würde, gegen das so eben Bewiesene.

11. Die Potenz a^n hat keinen andern Primfactor als a, weil jede Primzahl, die in a nicht aufgeht, auch in a^n nicht aufgeht (4.). Geht daher die Primzahl x in a^n auf; so muß x auch in a aufgehen.

12. Giebt es keine Zahl x, welche $= \sqrt[n]{a}$ ist; so giebt es auch keinen dieser Wurzel gleichen rationalen Bruch. Wäre nämlich $\sqrt[n]{a} = \frac{y}{z}$, und dieser Bruch, wie immer angenommen werden kann, auf seine kleinste Benennung gebracht, aber auch nach der Voraussetzung keiner ganzen Zahl gleich; so wäre $\left(\frac{y}{z}\right)^n = a$ doch eine ganze Zahl, gegen (10.). Dieser Satz ist für die strenge Theorie der Irrationalzahlen sehr wichtig.

Digitized by Google

13. Aus den bisherigen Sätzen läßt sich auch mit aller Strenge beweisen, daß jede Zahl nur auf eine einzige Art in Primfactoren zerlegt werden kann.

Sey nämlich $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$, wo a, b, c, ... lauter unter einander ungleiche Primzahlen sind. Könnte nun N noch auf eine andere Art in Primfactoren zerlegt werden, so ist zunächst klar, daß unter derselben keine andern als a, b, c, ... vorkommen können, weil sonst N von einer Primzahl getheilt werden müßte, welche weder in a, noch in b, noch in c, u. s. f. aufginge, welches mit (4.) streitet. Auch kann in dem zweiten Systeme keiner der Primfactoren a, b, c, ... fehlen, weil sonst ebenfalls nach (4.) der fehlende Primfactor nicht in N aufgehen könnte. Demnach könnte der Unterschied der beiden Systeme bloß darin liegen, daß ein Primfactor, z. B. p, in dem einen öfter vorkäme, als in dem andern. Käme nun p in dem einen μ, in dem andern ν Mal vor; so schaffe man, vorausgesetzt, daß $\mu > \nu$, diesen Primfactor aus jedem Systeme ν Mal durch Division weg, wodurch er aus dem einen ganz verschwinden, in dem andern dagegen noch $\mu - \nu$ Mal vorkommen wird. Es würde also die Zahl $\frac{N}{p^\nu}$ sowohl durch p theilbar, als auch (4.) durch p nicht theilbar seyn, welches offenbar ungereimt ist. S. Gauß a. a. O. p. 10.

II. Die Congruenz der Zahlen.

1. Begriff und Zeichen der Congruenz sind von Gauß in die Zahlenlehre eingeführt worden, und für diese Wissenschaft in jeder Beziehung so wichtig, daß die Hauptsätze darüber hier nicht fehlen dürfen.

Wenn die Differenz zweier Zahlen b, c von der Zahl a gemessen wird, so heißen die Zahlen b, c nach dem Modulus a einander congruent, und jede ein Rest der andern. Wird dagegen die Differenz dieser Zahlen von a nicht gemessen, so heißen sie nach dem Modulus a nicht congruent, und jede ein Nichtrest der andern. Diese Begriffe gelten, b und c mögen positiv oder negativ seyn.

Digitized by Google

Der Modulus wird aber immer als positiv angenommen. Die Beziehung der Congruenz zwischen zwei Zahlen wird nach Gauß durch $b \equiv c \pmod{a}$ bezeichnet, wie z. B. $-16 \equiv 9 \pmod{5}$, $-7 \equiv 15 \pmod{11}$, da $(-16-9):5 = -5$, $(-7-15):11 = -2$, oder auch $(9-(-16)):5 = 5$, $(15-(-7)):11 = 2$, d. i. immer eine ganze Zahl ist. 9 heißt ein Rest von -16 für den Modulus 11, 15 ein Nichtrest von -7 für den Modulus 3. Jeder Rest der Zahl a für den Modulus m ist unter der Form $a + km$, wo k irgend eine unbestimmte Zahl bezeichnet, enthalten. Jede Zahl ist sich selbst in Bezug auf einen willkührlichen Modulus congruent, da Null durch jede Zahl theilbar ist.

2. Für irgend eine Zahl a oder $-a$ sey

$$a = mk + r, \quad a = m(k+1) - \varrho;$$
$$-a = -mk - r, \quad -a = -m(k+1) + \varrho;$$

so daß $r < m$, $\varrho < m$ ist. Dann ist

$$a - r = mk, \quad a - (-\varrho) = m(k+1);$$
$$-a - (-r) = -mk, \quad -a - \varrho = -m(k+1).$$

Folglich hat jede Zahl a einen in den Reihen

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots (m-1);$$
$$0, -1, -2, -3, -4, \ldots (m-1);$$

enthaltenen positiven und negativen Rest. Diese beiden Reste reduciren sich aber auf den einen Rest o, wenn a selbst durch den Modulus m theilbar ist. Aus den obigen Gleichungen folgt durch Subtraction leicht

$$o = -m + r + \varrho, \quad r + \varrho = m.$$

Also ist, wenn die Reste r, ϱ ungleich sind, immer einer $< \frac{1}{2}m$, wenn sie aber gleich sind, jeder $= \frac{1}{2}m$. Zugleich erhellet aber auch, daß in jeder der beiden obigen Reihen nicht mehr als ein Rest der Zahl a enthalten seyn kann, indem für den positiven Rest r, da der Bruch $\frac{a-r}{m}$ eine ganze Zahl ist, offenbar keiner der Brüche

$$\frac{a-1}{m} = \frac{a-r+(r-1)}{m},$$
$$\frac{a-2}{m} = \frac{a-r+(r-2)}{m},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;\ \ldots$$

Digitized by Google

$$\frac{a-(r-1)}{m} = \frac{a-r+1}{m},$$
$$\frac{a-(r+1)}{m} = \frac{a-r-1}{m},$$
$$\frac{a-(r+2)}{m} = \frac{a-r-2}{m},$$
. . . . . .
$$\frac{a-(m-1)}{m} = \frac{a-r-(m-1-r)}{m}$$

eine ganze Zahl seyn kann, weil alle zu a — r addirten, oder davon abgezogenen, Größen $< m$ sind. Für den negativen Rest $-\varrho$ ist der Bruch $\frac{a+\varrho}{m}$ eine ganze Zahl, und folglich auf ähnliche Art wie vorher keiner der Brüche

$$\frac{a+1}{m} = \frac{a+\varrho-(\varrho-1)}{m},$$
$$\frac{a+2}{m} = \frac{a+\varrho-(\varrho-2)}{m},$$
. . . . . .
$$\frac{a+(\varrho-1)}{m} = \frac{a+\varrho-1}{m},$$
$$\frac{a+(\varrho+1)}{m} = \frac{a+\varrho+1}{m},$$
$$\frac{a+(\varrho+2)}{m} = \frac{a+\varrho+2}{m},$$
. . . . . .
$$\frac{a+(m-1)}{m} = \frac{a+\varrho+(m-1-\varrho)}{m}$$

eine ganze Zahl.

Die beiden Reste der Zahl a, welche $< m$ sind, sollen die kleinsten Reste derselben genannt werden. Wie sie in jedem Falle leicht gefunden werden können, erhellet aus dem Obigen. Von — 13 sind für den Modulus 5 die beiden kleinsten Reste — 3 und + 2, da $-13 \equiv -5, 2-3$, $-13 \equiv -5.3+2$ ist.

Bei allen folgenden Sätzen über die Congruenz der Zahlen soll immer Identität des Modulus vorausgesetzt werden.

3. Wenn $a \equiv c$, $b \equiv c$; so ist auch $a \equiv b$.

Bezeichnen wir immer den Modulus durch m; so ist

Digitized by Google

$a - c \equiv mk$, $b - c \equiv mk'$, $(a - c) - (b - c) \equiv a - b \equiv m(k - k')$; also $a \equiv b$.

4. Wenn $a \equiv b$, $a' \equiv b'$, $a'' \equiv b''$, $a''' \equiv b'''$, ... ist; so ist auch

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots \equiv b + b' + b'' + b''' + \ldots .$$

Denn es ist nach der Voraussetzung

$$a - b = mk,\ a' - b' = mk',\ a'' - b'' = mk'',\ a''' - b''' = mk''', \ldots;$$

also

$$(a - b) + (a' - b') + (a'' - b'') + (a''' - b''') + \ldots = m(k + k' + k'' + k''' + \ldots),$$

$$(a + a' + a'' + a''' + \ldots) - (b + b' + b'' + b''' + \ldots) = m(k + k' + k'' + k''' + \ldots),$$

$$a + a' + a'' + a''' + \ldots \equiv b + b' + b'' + b''' + \ldots$$

5. Ist $a \equiv b$, $a' \equiv b'$; so ist auch $a - a' \equiv b - b'$.

Denn $a - b \equiv mk$, $a' - b' \equiv mk'$; also $(a - b) - (a' - b') \equiv (a - a') - (b - b') \equiv m(k - k')$, d. i. $a - a' \equiv b - b'$.

6. Ist $a \equiv b$, $a' \equiv b'$, $a'' \equiv b''$, $a''' \equiv b'''$, ...; so ist auch

$$aa'a''a''' \ldots \equiv bb'b''b''' \ldots .$$

Betrachten wir nur den Fall, wenn fünf Congruenzen gegeben sind, weil daran der Beweis schon in seiner Allgemeinheit völlig deutlich werden wird; so erhellet leicht, daß

$$(a - h)a'a''a'''a'''' = aa'a''a'''a'''' - ha'a''a'''a'''',$$
$$b(a' - b')a''a'''a'''' = ba'a''a'''a'''' - bb'a''a'''a'''',$$
$$bb'(a'' - b'')a'''a'''' = bb'a''a'''a'''' - bb'b''a'''a'''',$$
$$bb'b''(a''' - b''')a'''' = bb'b''a'''a'''' - bb'b''b'''a'''',$$
$$bb'b''b'''(a'''' - b'''') = bb'b''b'''a'''' - bb'b''b'''b''''.$$

Wird nun, indem man wieder $a - b \equiv mk$, $a' - b' \equiv mk'$, $a'' - b'' \equiv mk''$, ... setzt, auf beiden Seiten addirt; so erhält man leicht

$$aa'a''a'''a'''' - bb'b''b'''b'''' = m\{ka'a''a'''a'''' + bk'a''a'''a'''' + bb'k''a'''a'''' + bb'b''k'''a'''' + bb'b''b'''k''''\},$$

woraus die behauptete Congruenz unmittelbar folgt.

7. Da für jedes α immer $\alpha \equiv \alpha$ ist (1.); so ist, wenn $a \equiv b$ ist, nach dem vorigen Satze immer auch $\alpha a \equiv \alpha b$.

Digitized by Google

8. Eben so leicht folgt auch aus (6.), daß für jedes positive ganze α, wenn $a \equiv b$ ist, immer auch $a^\alpha \equiv b^\alpha$ seyn muß.

Aus den vorhergehenden Sätzen folgt unmittelbar, daß mit den Congruenzen ähnliche Veränderungen, wie mit den Gleichungen vorgenommen werden können; nämlich durch Addition, Subtraction und Multiplication.

9. Bezeichnen a, b, c, d, ... positive ganze, A, B, C, D, ... ganze Zahlen, so sind, wenn für x in dem Polynom

$$Ax^a + Bx^b + Cx^c + Dx^d + \ldots.$$

irgend zwei congruente Werthe gesetzt werden, die entsprechenden Werthe des Polynoms einander ebenfalls congruent, in Bezug auf denselben Modulus.

Sey $p \equiv q$, so ist $p^a \equiv q^a$, $p^b \equiv q^b$, $p^c \equiv q^c$, $p^d \equiv q^d$, ... (8.), $Ap^a \equiv Aq^a$, $Bp^b \equiv Bq^b$, $Cp^c \equiv Cq^c$, $Dp^d \equiv Dq^d$, ... (7.);

$$Ap^a + Bp^b + Cp^c + Dp^d + \ldots. \equiv Aq^a + Bq^b + Cq^c + Dq^d + \ldots. \quad (4.).$$

10. Ist $a \equiv b$ (Mod. mn); so ist immer auch $a \equiv b$ (Mod. n). Denn $a - b = mnk$, $a - b = n \cdot mk$, also $a \equiv b$ (Mod. n).

11. Ist $a \equiv b$ (Mod. m), $a \equiv b$ (Mod. n), $a \equiv b$ (Mod. p), ...; so ist, wenn m, n, p, ... relative Primzahlen sind, auch $a \equiv b$ (Mod. mnp...).

Da nämlich m, n, p, ... in $a - b$ aufgehen, und relative Primzahlen sind; so muß auch mnp.... in $a - b$ aufgehen (I. 9.), d. h. $a \equiv b$ (Mod. mnp...) seyn.

12. Wenn a, b durch n theilbar, und in Bezug auf den Modulus m congruent sind; so ist, wenn m und n relative Primzahlen sind, immer $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n}$ (Mod. m).

Da nämlich sowohl m, als auch n in $a - b$ aufgeht; so geht, weil m und n relative Primzahlen sind, auch mn in $a - b$ auf (I. 9.), und es ist folglich $a - b = mnk$, $\frac{a}{n} - \frac{b}{n} = mk$, also $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n}$ (Mod. m).

Digitized by Google

13. Ist $a \equiv b$ (Mod. m); so ist, wenn n in a, b, m aufgeht, immer auch $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n}$ (Mod. $\frac{m}{n}$).

Denn es ist $a - b = mk$. Ist nun $a = na'$, $b = nb'$, $m = nm'$; so ist $n(a' - b') = nm'k$, $a' - b' = m'k$, $a' \equiv b'$ (Mod. m'), d. i. $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n}$ (Mod. $\frac{m}{n}$).

14. Sind m, n nicht relative Primzahlen, sondern haben das größte gemeinschaftliche Maaß e; so ist, wenn a, b durch n theilbar, und in Bezug auf m als Modulus congruent sind, immer $\frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n}$ (Mod. $\frac{m}{e}$).

Sey $m = ee'$, $n = ee''$; so ist nach der Voraussetzung $a \equiv b$ (Mod. ee'), $a \equiv b$ (Mod. ee''), da a und b, also auch $a - b$, durch n theilbar ist. Folglich $\frac{a}{e} \equiv \frac{b}{e}$ (Mod. e'), $\frac{a}{e} \equiv \frac{b}{e}$ (Mod. e'') (13.); folglich, weil e', e'' relative Primzahlen sind, $\frac{a}{e} \equiv \frac{b}{e}$ (Mod. e' e'') (11.). Da aber $ee'' = n$ in a und b aufgeht, so geht auch e'' in $\frac{a}{e}$ und $\frac{b}{e}$ auf, so daß also

$$\frac{a}{ee''} \equiv \frac{b}{ee''} \text{ (Mod. e') (13.), d. i. } \frac{a}{n} \equiv \frac{b}{n} \left(\text{Mod. } \frac{m}{e}\right).$$

15. Ist a mit m relative Primzahl, und p, q sind in Bezug auf m als Modulus nicht congruent; so sind auch ap und aq in Bezug auf diesen Modulus nicht congruent.

Wäre $ap \equiv aq$ (Mod. m); so wäre, da a und m relative Primzahlen sind, auch $\frac{ap}{a} \equiv \frac{aq}{a}$ (Mod. m) (12.), d. i. $p \equiv q$ (Mod. m); gegen die Voraussetzung.

16. Einen Ausdruck wie $ax \equiv b$ (Mod. m) nennt man nach Gauß eine Congruenz des ersten Grades. Ein solcher Ausdruck verlangt nämlich, x so zu bestimmen, daß ax mit b in Bezug auf den Modulus m congruent, oder $ax - b$ durch m theilbar wird, woraus man sogleich übersieht, daß dies ein Problem der unbestimmten Analytik, und mit der Auflösung der unbestimmten Gleichungen

Digitized by Google

des ersten Grades einerlei ist, indem sich aus den Bedingungen der Aufgabe unmittelbar die unbestimmte Gleichung des ersten Grades:

$$\frac{ax-b}{m} = y, \quad ax - my = b$$

ergiebt, deren Auflösung in dem Artikel Unbestimmte Analytik ausführlich gelehrt worden ist, so daß wir also dabei hier nicht länger verweilen. Eben so würde bei mehrern unbekannten Größen die Congruenz

$$ax + by \equiv c \,(\text{Mod. } m)$$

auf die unbestimmte Gleichung

$$\frac{ax + by - c}{m} = z, \quad ax + by - mz = c$$

führen, u. s. f. Uebersteigen die Potenzen der unbekannten Größen den ersten Grad, so kann man auf ähnliche Art, wie bei den Gleichungen, Congruenzen verschiedener Grade unterscheiden. Immer wird aber das Problem auf eine Aufgabe der unbestimmten Analytik zurückkommen, woraus zugleich die innige Verwandschaft dieses Theiles der Algebra mit der Theorie der Zahlen erhellet.

17. Soll die Congruenz des ersten Grades

$$Ax + B \equiv C \,(\text{Mod. } p)$$

im Allgemeinen auflösbar seyn, so dürfen A und p kein gemeinschaftliches Maaß haben. Da nämlich $C \equiv C$ ist (1.), so folgt aus der obigen Congruenz leicht durch Subtraction

$$Ax + B - C \equiv o \,(\text{Mod. } p) \quad (5.),$$

d. h. $Ax + B - C$ durch p theilbar. Also läßt sich setzen

$$Ax + B - C = pq .$$

Hätten nun A und p ein gemeinschaftliches Maaß e, so daß $A = eA'$, $p = ep'$ wäre; so wäre

$$eA'x + B - C = ep'q ,$$

$$A'x + \frac{B - C}{e} = p'q ,$$

und folglich auch $B - C$ durch e theilbar. Hätten also A und p ein gemeinschaftliches Maaß, so würde unsere Congruenz nur in dem besondern Falle in ganzen Zahlen auflösbar seyn, wenn auch $B - C$ durch dasselbe Maaß theilbar wäre. Soll unsere Congruenz also im Allgemeinen

Digitized by Google

auflösbar seyn, so dürfen A und p kein gemeinschaftliches Maaß haben.

18. Ist nun p eine nicht in A aufgehende Primzahl, so läßt sich zeigen, daß alle die Congruenz

$$Ax + B \equiv C \text{ (Mod. p)}$$

auflösenden Zahlen, nach demselben Modulus unter einander congruent sind.

Seyen α, β irgend zwei Auflösungen unserer Congruenz, also

$$A\alpha + B \equiv C \text{ (Mod. p)}, \quad A\beta + B \equiv C \text{ (Mod. p)};$$

so folgt durch Subtraction leicht

$$A(\alpha - \beta) \equiv 0 \text{ (Mod. p)} \quad (5.).$$

Also geht die Primzahl p in $A(\alpha - \beta)$, und folglich, weil sie in A nicht aufgeht, in $\alpha - \beta$ auf (I. β.), so daß also

$$\alpha \equiv \beta \text{ (Mod. p)}.$$

Für jede Congruenz des ersten Grades giebt es also, wenn p eine in A nicht aufgehende Primzahl ist, insofern immer nur eine Auflösung, als alle übrigen dieser congruent sind. Es ist merkwürdig, daß dieser Satz sich auf die Congruenzen aller Grade ausdehnen läßt, wie wir jetzt beweisen wollen.

19. Es ist bekanntlich

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{n-2} + \beta_{n-1},$$

und folglich immer $\alpha^n - \beta^n$ durch $\alpha - \beta$ theilbar. Bezeichnen wir nun die Function $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ überhaupt durch $\varphi(n-1)$; so läßt sich leicht zeigen, daß aus der Congruenz

$$A(\alpha^n - \beta^n) + B(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \ldots + M(\alpha^2 - \beta^2) + N(\alpha - \beta) \equiv 0$$

für die Primzahl p als Modulus, wenn α und β nicht congruent sind, immer die Congruenz

$$A\varphi(n-1) + B\varphi(n-2) + \ldots + M\varphi(1) + N \equiv 0$$

folgt. Die gegebene Congruenz läßt sich nämlich offenbar so darstellen:

$$\{A\varphi(n-1) + B\varphi(n-2) + \ldots + M\varphi(1) + N\}(\alpha - \beta) \equiv 0,$$

Digitized by Google

so daß also p in dem Producte

$$\{A\varphi(n-1) + B\varphi(n-2) + \ldots + M\varphi(1) + N\}(\alpha - \beta)$$

aufgehen muß. Da nun α und β nicht congruent sind, so ist $\alpha - \beta$ durch p nicht, und folglich, weil p eine Primzahl ist, nach (I. 3.) der andere Factor durch p theilbar, d. i. in Bezug auf p als Modulus

$$A\varphi(n-1) + B\varphi(n-2) + \ldots + M\varphi(1) + N \equiv o .$$

20. Sey nun, wenn p eine in A nicht aufgehende Primzahl ist, in Bezug auf p als Modulus

$$Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \ldots + Mx + N \equiv o .$$

so läßt sich zeigen, daß es nicht mehr als n Auflösungen dieser Congruenz geben kann, welche, in Bezug auf p als Modulus, nicht unter einander congruent sind.

Es gebe n + 1 nicht unter einander congruente Auflösungen

$$x = \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \mu, \nu$$

der gegebenen Congruenz, so daß also

$$\begin{aligned}
A\alpha^n + B\alpha^{n-1} + C\alpha^{n-2} + \ldots + M\alpha + N &\equiv o ,\\
A\beta^n + B\beta^{n-1} + C\beta^{n-2} + \ldots + M\beta + N &\equiv o ,\\
A\gamma^n + B\gamma^{n-1} + C\gamma^{n-2} + \ldots + M\gamma + N &\equiv o ,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A\mu^n + B\mu^{n-1} + C\mu^{n-2} + \ldots + M\mu + N &\equiv o ,\\
A\nu^n + B\nu^{n-1} + C\nu^{n-2} + \ldots + M\nu + N &\equiv o .
\end{aligned}$$

Aus diesen n + 1 Congruenzen erhält man nach (5.) durch Subtraction unmittelbar die folgenden n neuen Congruenzen:

$$\begin{aligned}
A(\alpha^n - \beta^n) + B(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + \ldots + M(\alpha - \beta) &\equiv o ,\\
A(\alpha^n - \gamma^n) + B(\alpha^{n-1} - \gamma^{n-1}) + \ldots + M(\alpha - \gamma) &\equiv o ,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A(\alpha^n - \mu^n) + B(\alpha^{n-1} - \mu^{n-1}) + \ldots + M(\alpha - \mu) &\equiv o ,\\
A(\alpha^n - \nu^n) + B(\alpha^{n-1} - \nu^{n-1}) + \ldots + M(\alpha - \nu) &\equiv o ,
\end{aligned}$$

und hieraus ferner noch (19.)

$$\begin{aligned}
A\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + B\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} + \ldots + M &\equiv o ,\\
A\frac{\alpha^n - \gamma^n}{\alpha - \gamma} + B\frac{\alpha^{n-1} - \gamma^{n-1}}{\alpha - \gamma} + \ldots + M &\equiv o ,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
A\frac{\alpha^n - \mu^n}{\alpha - \mu} + B\frac{\alpha^{n-1} - \mu^{n-1}}{\alpha - \mu} + \ldots + M &\equiv o ,\\
A\frac{\alpha^n - \nu^n}{\alpha - \nu} + B\frac{\alpha^{n-1} - \nu^{n-1}}{\alpha - \nu} + \ldots + M &\equiv o .
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Setzen wir nun

$$B' = A\alpha + B,$$
$$C' = A\alpha^2 + B\alpha + C,$$
$$D' = A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$L' = A\alpha^{n-2} + B\alpha^{n-3} + C\alpha^{n-4} + \ldots + L,$$
$$M' = A\alpha^{n-1} + B\alpha^{n-2} + C\alpha^{n-3} + \ldots + L\alpha + M;$$

so verwandeln sich durch Entwickelung der Brüche obige Congruenzen in folgende:

$$A\beta^{n-1} + B'\beta^{n-2} + C'\beta^{n-3} + \ldots + L'\beta + M' \equiv o,$$
$$A\gamma^{n-1} + B'\gamma^{n-2} + C'\gamma^{n-3} + \ldots + L'\gamma + M' \equiv o,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A\mu^{n-1} + B'\mu^{n-2} + C'\mu^{n-3} + \ldots + L'\mu + M' \equiv o,$$
$$A\nu^{n-1} + B'\nu^{n-2} + C'\nu^{n-3} + \ldots + L'\nu + M' \equiv o,$$

und es würde also auch für die Congruenz

$$Ax^{n-1} + B'x^{n-2} + C'x^{n-3} + \ldots + L'x + M' \equiv o,$$

wo p eine nicht in A aufgehende Primzahl ist, n nicht unter einander congruente Auflösungen $\beta, \gamma, \delta, \ldots \mu, \nu$ geben. Gebe es also unter den Voraussetzungen des Satzes für eine Congruenz des nten Grades $n+1$ nicht unter einander congruente Auflösungen, so würde es auch für eine Congruenz des $(n-1)$ten Grades n, also für eine Congruenz des $(n-2)$ten Grades $n-1$, u. s. f., für eine Congruenz des ersten Grades zwei untereinander nicht congruente Auflösungen geben, welches mit (8.) streitet. Unser Satz ist also bewiesen.

Ginge p in dem Coeficienten des ersten Gliedes, vielleicht auch noch in denen einiger folgenden Glieder, auf; so könnte man offenbar alle diese Glieder weglassen, wodurch die Congruenz auf einen niedrigern Grad reducirt würde, wo nun p nicht mehr in dem Coeficienten des ersten Gliedes aufgeht. Ginge p in den Coeficienten aller Glieder auf, so wäre die Congruenz identisch.

Einen andern Beweis dieses merkwürdigen und wichtigen Satzes giebt Gauß a. a. O. p. 38., Lagrange in den Mém. de Berlin. 1768. p. 192., Euler in den Nov. Comm. Petrop. XVIII. p. 93. für den besondern Fall $x^n - 1 \equiv o$, Legendre in den Mém. de l'Acad. de Paris. 1785. p. 466.

Digitized by Google

Sind q und q′ zwei zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegende Auflösungen unserer Congruenz; so ist offenbar immer, q und q′ mögen positiv oder negativ seyn, dem absoluten Werthe nach, $q-q' < p$, so daß also p nie in $q-q'$ aufgeht, d. h. nie $q \equiv q'$ ist. Also sind alle Auflösungen unserer Congruenz, welche zwischen den angegebenen Grenzen liegen, unter einander nicht congruent, und ihre Anzahl folglich nie $> n$. Legendre (Théorie des nombres. p. 169.) nennt daher vorzugsweise die zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegenden Auflösungen unserer Congruenz Wurzeln derselben, oder, wenn das gegebene Polynom durch P bezeichnet wird, und e überhaupt eine ganze Zahl bedeutet, Auflösungen oder Wurzeln der unbestimmten Gleichung $\frac{P}{p} = e$. Hat man eine dieser Wurzeln k gefunden, so genügt offenbar auch jede Zahl von der Form $x = k + pz$ dieser unbestimmten Gleichung, oder, was Dasselbe ist, obiger Congruenz, wovon man sich augenblicklich überzeugt, wenn man sich nur diesen Werth von x für x gesetzt, und die Potenzen nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt denkt, indem dadurch augenscheinlich eine ebenfalls durch p theilbare Größe erhalten wird.

Sind q und q′ beide positiv, und $< p$, so ist auch immer $q-q' < p$, folglich $q-q'$ nicht durch p theilbar, d. i. nicht $q \equiv q'$. Also auch die Anzahl aller positiven Wurzeln unserer Congruenz, welche $< p$ sind, nie $> n$.

III. Fermat's und Wilsons Sätze von den Primzahlen.

1. Seyen a und p relative Primzahlen, und

$$(1), (2), (3), (4), \ldots (q)$$

alle Zahlen, welche mit p relative Primzahlen, und $< p$ sind; so können nie zwei Glieder der Reihe

$$(1)a, (2)a, (3)a, (4)a, \ldots (q)a;$$

in Bezug auf p als Modulus einander congruent seyn.

Wäre $(k)a \equiv (k')a$ (Mod. p), so wäre auch $|(k) - (k')|a \equiv 0$ (Mod. p) (II. 5.); also

Digitized by Google

(k) — (k′)|a durch p theilbar. Es ist aber a mit relative Primzahl. Folglich muß (k) — (k′) durch p theilbar seyn (I. 7.). Dies ist aber unmöglich, da, wegen der Voraussetzung, offenbar (k) — (k′) < p ist.

Jeder bei der Division der Glieder obiger Reihe durch bleibende Rest ist mit p relative Primzahl.

Sey z. B. (k)a = pp′ + r, so ist r mit p relative Primzahl, weil, wenn p und r durch die Primzahl Θ > 1 heilbar wären, diese Primzahl auch in (k)a, folglich ntweder in (k) oder in a aufgehen müßte (I. 3.), also ntweder (k) oder a, gegen die Voraussetzung, mit p nicht elative Primzahl wäre.

Da nun nicht zwei Glieder obiger Reihe in Bezug auf einander congruent, also alle bei der Division derselben urch p bleibenden Reste ungleich, alle diese Reste aber < p und mit p relative Primzahlen sind, ihre Anzahl ber = q ist; so können diese Reste keine andern, als ie Zahlen

(1), (2), (3), (4), ... (q)

eyn, ohne Rücksicht auf deren Ordnung in Bezug auf die bige Reihe.

Also sind immer zwei und zwei Glieder der Reihen

(1)a, (2)a, (3)a, (4)a, ... (q)a;
(1), (2), (3), (4), ... (q);

inander congruent, ohne Rücksicht auf die Ordnung, aber uch immer nur je zwei, da nach dem Obigen nie zwei Glieder der ersten Reihe einander congruent sind.

Folglich (II. 6.) ist auch

(1)(2)(3)....(q).$a^q \equiv$ (1)(2)(3)...(q) (Mod. p),
(1)(2)(3)....(q).a^q — (1)(2)(3)...(q) ≡ o (Mod. p),
(1)(2)(3)....(q)|$a^q - 1$| ≡ o (Mod. p).

Es ist aber p mit jedem Gliede der Reihe

(1), (2), (3), (4), ... (q)

elative Primzahl, und muß folglich, da es in

|1)(2)(3) .... (q)|$a^q - 1$|

ufgeht, in $a^q - 1$ aufgehen (I. 7.). In Worten läßt ich dieser Satz so aussprechen:

Digitized by Google

Wenn a und p relative Primzahlen sind, und q die Anzahl der Zahlen bezeichnet, welche $< p$ und mit p relative Primzahlen sind; so ist immer $a^q - 1$ durch p theilbar, oder $a^q \equiv 1 \pmod{p}$.

Zerlegt man p in seine Primfactoren, so daß $p = \alpha^m \beta^n \gamma^h \ldots$ ist; so ist die Anzahl der Zahlen, welche $< p$, und mit p relative Primzahlen sind, d. i. q,

$$= p\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots.$$

$$= \alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-1)\,\gamma^{h-1}(\gamma-1)\ldots.$$

(Theiler einer Zahl. 14.); also immer

$$a^{\alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-1)\,\gamma^{h-1}(\gamma-1)\ldots.} - 1$$

durch p theilbar.

Ist p selbst eine in a nicht aufgehende Primzahl, so sind offenbar

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots. p-1$$

Primzahlen zu p, und alle $< p$; in diesem Falle also $q = p - 1$, und folglich $a^{p-1} - 1$ durch p theilbar, oder $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, wenn, wie gesagt, p eine in a nicht aufgehende Primzahl ist.

Ist z. B. $p = 7$, $a = 12$; so ist $12^6 - 1 = 2985983$, $(12^6 - 1) : 7 = 426569$.

Diesen merkwürdigen, für die Zahlenlehre überaus wichtigen, Satz hat Fermat gefunden (Fermatii Opp. math. Tolosae. 1679. fol. p. 163.), aber einen Beweis nicht gegeben. Den ersten Beweis gab Euler (Comm. Petrop. T. VIII.), einen zweiten in den Comm. nov. Petrop. T. VII. p. 70. Mit letzterem stimmt der von Gauß (Disq. arithm. p. 50.) gegebene dem Wesentlichen nach überein; ersterer, welcher sich auf den binomischen Lehrsatz gründet, findet sich auch in der Théorie des nombres. p. 166. von Legendre. Auch Lambert hat einen ähnlichen Beweis gegeben (Act. Erud. 1769. p. 109.), und ein Beweis von Laplace wird gelegentlich mitgetheilt in Lacroix Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 722. Zwei Beweise von Lejeune Dirichlet findet man in Crelles Journal. T. III.

Digitized by Google

S. 390. Mit dem zweiten, von Lejeune Dirichlet geführten, Beweise stimmt der hier gegebene dem Wesentlichen nach überein; es ist aber hier das Theorem zugleich zu größerer Allgemeinheit erhoben worden (Gauß a. a. O. p. 80.), wodurch seine Anwendung sehr erweitert wird. Auch Leibnitz soll einen Beweis gegeben haben, hat denselben aber nirgends bekannt gemacht; s. Gauß a. a. O. p. 46. in der Note. Mit dem Wilson'schen Theorem zugleich hat endlich auch Lagrange (Mém. de Berlin. 1771. p. 125—137.) den Satz bewiesen, wovon nachher weiter die Rede seyn wird.

Um eine Anwendung des erweiterten Fermat'schen Satzes zu geben, wählen wir eine Aufgabe aus den Annales de Math. T. XIX. p. 256.

Eine aus lauter Neunen und angehängten Nullen bestehende decadische Zahl zu finden, welche durch irgend eine gegebene Zahl theilbar ist.

Die gesuchte Zahl sey

$$Z = \overset{(x)}{9}\,\overset{(x-1)}{9}\,\overset{(x-2)}{9}\ldots\overset{(1)}{9}\,\overset{(0)}{9}\,\overset{(1)}{0}\,\overset{(2)}{0}\ldots\overset{(y)}{0}$$
$$= 9\{1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^x\}.10^y$$
$$= 9.\frac{10^{x+1}-1}{10-1}.10^y = (10^{x+1}-1).10^y.$$

Sey $p = 2^\mu.5^\nu.\alpha^m\beta^n\gamma^h\ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ungleiche Primzahlen sind, welche weder $= 2$, noch $= 5$.

Setzen wir nun

$$x+1 = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-1)\,\gamma^{h-1}(\gamma-1)\ldots$$

so ist nach dem erweiterten Satze von Fermat, da 10 mit $\alpha^m\beta^n\gamma^h\ldots$ relative Primzahl ist, $10^{x+1}-1$ durch $\alpha^m\beta^n\gamma^h\ldots$ theilbar. Ferner setze man,

1) wenn $\nu > \mu$, $\nu = \mu+\lambda$, also $2^\mu.5^\nu = 10^\mu.5^\lambda$ ist, $10^\nu = 10^\mu.5^\lambda.2^\lambda = 10^\mu.10^\lambda = 10^{\mu+\lambda} = 10^\nu$, also $y = \nu$; so ist auch 10^ν durch $10^\mu.5^\lambda = 2^\mu.5^\nu$ theilbar. Ist aber

2) $\mu > \nu$, $\mu = \nu+\lambda'$, $2^\mu.5^\nu = 2^{\nu+\lambda'}.5^\nu = 10^\nu.2^{\lambda'}$; so setze man $10^\nu = 10^\nu.2^{\lambda'}.5^{\lambda'} = 10^\nu.10^{\lambda'} = 10^{\nu+\lambda'} = 10^\mu$; so ist wieder 10^ν durch $10^\nu.2^{\lambda'} = 2^\mu.5^\nu$ theilbar.

Digitized by Google

Bezeichnen wir also überhaupt die größere der beiden Zahlen μ, ν durch $M(\mu, \nu)$, so muß man $y = M(\mu, \nu)$ setzen, damit 10^y durch $2^\mu . 5^\nu$ theilbar werde.

Es ist also für

$$x = \alpha^{m-1}(\alpha-1)\,\beta^{n-1}(\beta-1)\,\gamma^{h-1}(\gamma-1) \ldots - 1,$$
$$y = M(\mu, \nu),$$

immer Z durch $p = 2^\mu . 5^\nu . \alpha^m \beta^n \gamma^h \ldots$ theilbar, und es läßt sich also immer eine aus lauter Neunen und angehängten Nullen bestehende decadische Zahl finden, welche durch die willkührliche Zahl p theilbar ist.

Für $p = 2^2 . 5 . 7^3 : 11$ ist $x = 7^2 . 6 . 11^0 . 10 - 1 = 49 . 60 - 1 = 2940 - 1 = 2939$, $y = M(2, 1) = 2$, also Z bestimmt. Freilich ist in diesem Falle die Anzahl der Neunen sehr groß; aber auch p ist schon von beträchtlicher Größe.

2. Wenn p eine Primzahl ist; so ist immer

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) \equiv -1 \text{ (Mod. p)},$$

oder

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1$$

durch p theilbar.

Gewöhnlich wird der Beweis dieses wichtigen Satzes aus dem Fermat'schen Satze mittelst eines Satzes aus der Differenzenrechnung abgeleitet, wovon nachher weiter die Rede seyn wird, oder es werden dabei Sätze von der Zahl der Auflösungen der unbestimmten Gleichungen oder der Congruenzen des zweiten Grades vorausgesetzt. Der Einmischung der Differenzenrechnung scheint die Zahlenlehre durchaus abhold zu seyn. Ich werde daher hier einen Beweis entwickeln, welcher, mit dem zweiten von Gauß a. a. O. p. 75. gegebenen zwar auf gleiches Princip sich stützend, doch von den dort angewandten Sätzen aus der unbestimmten Analytik, so wie von dem Fermat'schen Satze, völlig unabhängig ist, und bloß auf den einfachsten Sätzen von der Congruenz der Zahlen beruhet, die sich auch leicht in die gewöhnliche arithmetische Sprache übersetzen lassen würden. Wir schicken Alles voraus, was bei dem Beweise nöthig seyn dürfte.

Digitized by Google

1) p ist nach der Voraussetzung eine Primzahl, und liegt bei allen folgenden Congruenzen als Modulus zum Grunde.

2) Ist $q^2 \equiv 1$, so ist $q \equiv \pm 1$. Denn $q^2 - 1 \equiv 0$, $(q-1)(q+1) \equiv 0$ (II. 5.); also geht p in $(q-1)(q+1)$, und folglich, da es eine Primzahl ist, entweder in $q-1$, oder in $q+1$ (I. 3.) auf, so daß also $q \mp 1 \equiv 0$, $q \equiv \pm 1$ ist, immer für p als Modulus.

3) Ist also nicht $q \equiv \pm 1$, so kann auch nicht $q^2 \equiv 1$ seyn.

4) Wenn p' nicht $= 0$ ist; so können nie zwei Glieder der Reihe

$$p-p',\ 2(p-p'),\ 3(p-p'),\ \ldots\ (p-1)(p-p')$$

für p als Modulus einander congruent seyn.

Wäre $k(p-p') \equiv k'(p-p')$, wo $k < p$, $k' < p$ ist; so wäre auch $(k-k')(p-p') \equiv 0$, und folglich $(k-k')(p-p')$, also $k-k'$ oder $p-p'$, durch die Primzahl p theilbar (I. 3.), welches ungereimt ist, da $k-k' < p$, $p-p' < p$ ist.

5) Dividirt man folglich alle Glieder obiger Reihe durch p; so müssen die bleibenden Reste alle verschieden, und können also, da offenbar keiner $= 0$, ihre Anzahl $= p-1$ ist, alle aber $< p$ sind, keine andern als

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots\ p-1$$

seyn, wenn nur von der Ordnung der Glieder dieser Reihe, in Bezug auf die vorhergehende, abstrahirt wird.

6) Also muß es in der Reihe

$$p-p',\ 2(p-p'),\ 3(p-p'),\ \ldots\ (p-1)(p-p')$$

immer ein Glied geben, welches $\equiv 1$ ist, aber auch nur eins, da nie zwei Glieder dieser Reihe einander congruent sind (4.).

7) Dieses Glied kann nicht $(p-p')(p-p') = (p-p')^2$ seyn, wenn nicht $p-p' \equiv \pm 1$ (2,), d. i., da p' immer $< p$, p' entweder $= p-1$, oder $= 1$ ist.

8) Auch kann dieses Glied, wenn p' weder $= p-1$, noch $= 1$ ist, weder $p-p'$, noch $(p-1)(p-p')$

Digitized by Google

seyn, weil im ersten Falle $p - p' \equiv 1$, $p \equiv p' + 1$, also $p' + 1$ durch p theilbar, und folglich $p' + 1 \equiv 0$, $p' \equiv -1$, $p' \equiv p - 1$; im andern aber $(p-1).(p-p') \equiv 1$, $p(p-p') - (p-p') \equiv 1$, $p(p-p') \equiv p - p' + 1$, d. i. $p - p' + 1$ durch p theilbar, oder $p - p' + 1 \equiv 0$, $p \equiv p' - 1$, $p' - 1 \equiv 0$, $p' \equiv 1$, also $p' = 1$ seyn müßte. Man hat bei diesem Beweise nie zu vergessen, daß immer $p' < p$ ist.

9) Ist folglich p' irgend eine Zahl $< p$, nur nicht $= 1$, oder $= p - 1$; so ist in der Reihe

$$2(p-p'),\ 3(p-p'),\ \ldots.\ (p-2)(p-p')$$

immer ein Glied, welches $\equiv 1$, aber auch nur eins (6, 4,).

10) Auch kann, wenn p' und p'' ungleich sind, etwa $p'' > p'$ ist, nie $k(p-p') \equiv k(p-p'')$ seyn, weil sonst $k(p-p'-p+p'') \equiv 0$, d. i. $k(p''-p') \equiv 0$, folglich $k(p''-p)$, also entweder k oder $p''-p$, durch die Primzahl p theilbar seyn müßte (I. 3.), welches ungereimt ist, da $k < p$, $p''-p < p$ ist.

11) Aus allem Vorhergehenden erhellet nun deutlich, daß, wenn man der Zahl p' alle möglichen Werthe von 2 bis $p-2$ giebt, oder überhaupt die Glieder der Reihe

$$2, 3, 4, 5, \ldots. p-2$$

betrachtet, es in dieser Reihe, deren Gliederzahl $= p-3$, d. i. eine gerade Zahl ist, immer je zwei zusammengehörende Glieder geben muß, deren Product $\equiv 1$ ist, oder, wenn man mit Euler und Gauß überhaupt zwei solche Zahlen, deren Product der Einheit congruent ist, Socii oder Gefährten nennt, daß jedes Glied in obiger Reihe immer einen Socius in derselben haben muß, aber, wie sich aus den vorher bewiesenen Sätzen unmittelbar ergiebt, auch nur einen. Denkt man sich nun die $\frac{1}{2}(p-3)$ Producte, deren jedes $\equiv 1$ ist, in einander multiplicirt; so erhält man offenbar das Product aller Glieder der Reihe

$$2, 3, 4, 5, \ldots. p-2;$$

und es ist folglich, da die einzelnen Producte alle $\equiv 1$ sind, nach (II. 6.), auch

$$2.3.4.5.6 \ldots (p-2) \equiv 1.$$

Digitized by Google

Da aber offenbar p in p aufgeht; so ist

$$1.(p-1)+1 \equiv 0,\ 1.(p-1) \equiv -1 \text{ (II. 5.)};$$

also, wenn man multiplicirt,

$$2.3.4.5 \ldots (p-2).1.(p-1) \equiv 1.(-1) \text{ (II. 6.)};$$

d. i. $1.2.3.4.5 \ldots (p-1) \equiv -1$,

oder $1.2.3.4.5 \ldots (p-1)+1$ durch p theilbar, d. z. b. w.

3. Unter Voraussetzung des Fermat'schen Satzes und der Differenzenrechnung, oder der Lehre von den arithmetischen Reihen höherer Ordnungen, die aber der Zahlenlehre gewiß eben so fremd sind, wie das Binomialtheorem, läßt sich unser Satz auch auf folgende Art beweisen. Für $p-1=q$ ist

$$1.2.3.4 \ldots q =$$
$$q^q - \frac{q}{1}(q-1)^q + \frac{q(q-1)}{1.2}(q-2)^q - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}(q-3)^q + \ldots$$

(Arithmetische Reihen höherer Ordnungen. 18. 23.). Diese Reihe bricht mit dem qten Gliede ab, da das $(q+1)$te

$$\frac{q(q-1)(q-2) \ldots 3.2.1}{1.2.3.4 \ldots q}(q-q)^q.(-1)^q$$

schon $=0$ ist. Nach dem binomischen Lehrsatze ist

$$(1-1)^q = 1 - \frac{q}{1} + \frac{q(q-1)}{1.2} - \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3} + \ldots.$$

eine Reihe mit $q+1$ Gliedern, deren letztes, da p eine Primzahl, also $q+1=p$, ungerade ist, vorausgesetzt, daß $p>2$ ist, $=+1$ ist. Zieht man nun die Reihe $(1-1)^q - 1 = -1$ von der ersten Reihe ab; so erhält man

$$1.2.3.4 \ldots q+1$$
$$= q^q - 1 - \frac{q}{1}\{(q-1)^q - 1\}$$
$$+ \frac{q(q-1)}{1.2}\{(q-2)^q - 1\}$$
$$- \frac{q(q-1)(q-2)}{1.2.3}\{(q-3)^q - 1\}$$
$$+ \ldots\ldots$$

Alle Binomialcoefficienten sind, da q eine positive ganze Zahl ist, positive ganze Zahlen, wie aus der Entstehung der Potenz eines Binomiums mit positivem ganzen Expo-

Digitized by Google

nenten augenblicklich erhellet; und nach dem Fermat'schen Satze ist $q + 1$ ein Theiler von

$$q^q - 1, (q-1)^q - 1, (q-2)^q - 1, (q-3)^q - 1, \ldots;$$

da $q + 1$ eine Primzahl, und keine der Zahlen q, $q-1$, $q-2$, $q-3$, ... durch $q + 1$ theilbar ist. Folglich ist offenbar auch

$$1.2.3 \ldots, q+1 = 1.2.3 \ldots (p-1) + 1$$

durch $q + 1 = p$ theilbar, w. z. b. w. Für $p = 2$, $p = 1$ erhellet die Richtigkeit des Satzes von selbst, da $1.1 + 1$ und $1.0 + 1$ durch 2 und 1 theilbar ist.

Dieser in der Zahlenlehre sehr geschätzte Satz kommt zuerst in Waring Meditt. algebr. Ed. 3. p. 380. aber ohne Beweis, vor, und seine Erfindung wird einem gewissen John Wilson zugeschrieben. Zwei Beweise gab Lagrange in den Mém. de Berlin. 1771. p. 125 — 137. Der zweite, auch von Legendre aufgenommene (Théorie des nombres. p. 167.), ist im Wesentlichen mit dem oben zuletzt geführten einerlei, obgleich Lacroix (Traité du calc. diff. et int. T. III. p. 722.) seine Erfindung auch Laplace zuschreibt. Noch einen Beweis hat Euler gegeben (Opuscula analytica. T. I. p. 329.), mit welchem der erste bei Gauß (Disq. arithm. p. 74.) übereinkommt. Auch s. m. Crelles Journal a. a. O.

Der erste von Lagrange gegebene Beweis hat nicht nur manches Eigenthümliche, sondern macht den Satz zugleich auch allgemeiner, und verdient daher in seinen Grundzügen hier noch mitgetheilt zu werden.

Entwickelt man das Product

$$(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+p-1)$$

nach Potenzen von x; so erhält man offenbar eine Reihe von der Form

$$x^{p-1} + A'x^{p-2} + A''x^{p-3} + \ldots + A^{(p-2)}x + A^{(p-1)},$$

wo alle Coefficienten ganze Zahlen sind, und offenbar

$$A^{(p-1)} = 1.2.3.4 \ldots (p-1)$$

ist. Setzt man nun $x + 1$ für x; so wird leicht die Richtigkeit folgender Gleichung erhellen;

Digitized by Google

$$(x+p)\{x^{p-1} + A'x^{p-2} + A''x^{p-3} + \ldots + A^{(p-1)}\}$$
$$= (x+1)\{(x+1)^{p-1} + A'(x+1)^{p-2} + A''(x+1)^{p-3} + \ldots + A^{(p-1)}\},$$

da offenbar jedes dieser beiden Producte

$$= (x+1)(x+2)(x+3)\ldots(x+p)$$

ist.

Entwickelt man nun diese beiden Producte nach Potenzen von x, und setzt die Coefficienten gleicher Potenzen von x einander gleich; so erhält man nach einigen leichten Reductionen, mit Anwendung der im Art. Wahrscheinlichkeitsrechnung (29.) gebrauchten Bezeichnung der Binomialcoefficienten, folgende Gleichungen:

$$A' = \left[\frac{p}{2}\right],$$

$$2A'' = \left[\frac{p}{3}\right] + \left[\frac{p-1}{2}\right]A',$$

$$3A''' = \left[\frac{p}{4}\right] + \left[\frac{p-1}{3}\right]A' + \left[\frac{p-2}{2}\right]A'',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p-1)A^{(p-1)} = \left[\frac{p}{p}\right] + \left[\frac{p-1}{p-1}\right]A' + \left[\frac{p-2}{p-2}\right]A'' + \ldots + \left[\frac{2}{2}\right]A^{(p-2)}.$$

Alle Binomialcoefficienten sind ganze Zahlen, und, weil p eine Primzahl ist, alle Binomial-Coefficienten der pten Potenz durch p theilbar. Denn es ist, vorausgesetzt, daß q nicht $= o$ ist,

$$\left[\frac{p}{p-q}\right] = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(q+1)}{1.2.3\ldots(p-q)} = e$$

eine ganze Zahl; also

$$(p-1)(p-2)\ldots(q+1) = \frac{1.2.3\ldots(p-q).e}{p}$$

eine ganze Zahl, so daß folglich die Primzahl p in $1.2.3\ldots(p-q).e$, und folglich, weil p offenbar in einem Factor von $1.2.3\ldots(p-q)$ aufgeht, in e aufgehen muß, so daß also $\left[\frac{p}{p-q}\right]$ durch p theilbar, wenn q nicht $= o$ ist (I. 5.).

Also geht p in A', folglich auch in 2A'', und demnach, weil $2 < p$ ist, auch in A'' auf (I. 5.); also, wegen der obigen Gleichungen, auch in 3A''', und folglich, weil $3 < p$, in A''', u. s. f., so daß also p in

Digitized by Google

$$A', A'', A''', A'''', \ldots A^{(p-2)}$$

aufgehen wird. Die Formel für $(p-1)A^{(p-1)}$ enthält aber das durch p nicht theilbare Glied $\left[\frac{p}{p}\right] = 1$, so daß also p in $(p-1)A^{(p-1)}$ nicht aufgeht. Es ist aber

$$pA^{(p-1)} - A^{(p-1)} = 1 + A' + A'' + A''' + \ldots + A^{(p-2)},$$
$$A^{(p-1)} + 1 = pA^{(p-1)} - A' - A'' - A''' - \ldots - A^{(p-2)},$$

woraus mittelst des Obigen folgt, daß p immer in $A^{(p-1)} + 1$ aufgehen muß. Es ist aber nach dem Obigen

$$A^{(p-1)} = 1.2.3.4 \ldots (p-1);$$

also geht p in $1.2.3.4 \ldots (p-1)+1$ auf, welches der Wilsonsche Satz ist. Da aber

$$(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+p-1) =$$
$$x^{p-1} + A'x^{p-2} + A''x^{p-3} + \ldots + A^{(p-2)}x + A^{(p-1)},$$

$$(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+p-1) - x^{p-1} + 1 =$$
$$A'x^{p-2} + A''x^{p-3} + \ldots + A^{(p-2)}x + A^{(p-1)} + 1$$

ist; so erhellet aus dem Vorigen, daß die Primzahl p in

$$(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+p-1) - x^{p-1} + 1$$

aufgeht, oder

$$(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+p-1) - x^{p-1} + 1 \equiv 0$$

ist, welches der von Lagrange gefundene allgemeinere Satz ist.

Dies gilt für jedes x. Ist aber x weder $= 0$, noch durch p theilbar; so wird sich unter den Factoren des Products

$$(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+p-1)$$

gewiß immer ein durch p theilbarer finden. Sey $x = py + \varrho$, wo ϱ, da p in x nicht aufgeht, nicht $= 0$ und $< p$ ist; ist nun $\varrho = p - p'$, wo $p' > 0$ und $< p$ ist, so ist $x = py + p - p'$, $x + p' = p(y+1)$, und folglich $x + p'$ ein durch p theilbarer Factor obigen Products. Ist also x nicht durch die Primzahl p theilbar, so ist das Product

$$(x+1)(x+2)(x+3) \ldots (x+p-1),$$

folglich, wegen obiger Congruenz, auch $-x^{p-1} + 1$ oder $x^{p-1} - 1$ durch p theilbar, welches der Fermat'sche Satz ist, so daß also durch diesen schönen Beweis nicht bloß der

Digitized by Google

Wilson'sche und Fermat'sche Satz, sondern auch noch ein allgemeinerer Satz, zugleich gerechtfertigt sind.

4. Ist p keine Primzahl, so ist

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1$$

nicht durch p theilbar. Sey $p = qq'$, wo weder q noch $q' = 1$, aber jeder dieser Factoren $< p$ ist, und sey obige Summe durch p theilbar, oder

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1}{qq'} = e,$$

eine ganze Zahl; so wäre auch

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1}{q} = eq'$$

eine ganze Zahl. Da aber $q < p$ ist, so kommt q unter den Factoren des Products

$$1.2.3.4 \ldots (p-1)$$

nothwendig vor, so daß also auch

$$\frac{1.2.3.4 \ldots (p-1)}{p} = e'$$

eine ganze Zahl, und folglich auch

$$\frac{1}{q} = eq' - e'$$

eine ganze Zahl, also $q = 1$ seyn müßte, welches gegen die Annahme.

5. Hieraus ergiebt sich eine allgemeine Methode, zu prüfen, ob irgend eine Zahl p eine Primzahl ist, oder nicht. Man bilde nämlich die Größe

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) + 1;$$

ist p eine Primzahl oder keine, jenachdem diese Größe durch p theilbar ist, oder nicht. In der Ausübung wird aber diese Methode, wenn p auch nur einigermaßen groß ist, sehr weitläufig. Durch eine weit fortgesetzte Tafel der Permutationszahlen (s. Versetzungen. 2.) würde sich aber, wie hieraus erhellet, leicht eine Tafel der Primzahlen bilden lassen.

6. Durch einfache Rechnung überzeugt man sich von der Richtigkeit folgender Gleichungen:

Digitized by Google

$$\frac{1^2.2.3\ldots(p-2)-1}{p}=1.2.3\ldots(p-2)-\frac{1.2.3\ldots(p-1)+1}{p}$$

$$\frac{1^2.2^2.3\ldots(p-3)-1}{p}=1^2.2.3\ldots(p-3)-\frac{1^2.2.3\ldots(p-2)-1}{p}$$

$$\frac{1^2.2^2.3^2.4\ldots(p-4)-1}{p}=1^2.2^2.3\ldots(p-4)-\frac{1^2.2^2.3\ldots(p-3)+1}{p}$$

$$\frac{1^2.2^2.3^2.4^2.5\ldots(p-5)+1}{p}=1^2.2^2.3^2.4\ldots(p-5)-\frac{1^2.2^2.3^2.4\ldots(p-4)-1}{p}$$

&c. &c.

Hieraus folgt, von dem Wilson'schen Satze ausgehend, durch eine successive Schlußweise, daß die Primzahl p in jeder der folgenden Formeln, deren Gesetz in die Augen fällt, aufgehen muß:

$$1.2.3.4\ldots(p-1)+1,$$
$$1^2.2.3.4\ldots(p-2)-1,$$
$$1^2.2^2.3.4\ldots(p-3)+1,$$
$$1^2.2^2.3^2.4\ldots(p-4)-1,$$
$$1^2.2^2.3^2.4^2.5\ldots(p-5)+1,$$
$$1^2.2^2.3^2.4^2.5^2.6\ldots(p-6)-1,$$

&c. &c.

Hierdurch kann die Prüfung, ob eine willkührliche Zahl p eine Primzahl ist, oder nicht, abgekürzt werden, indem sich mittelst (5.) leicht zeigen läßt, daß p, wenn es keine Primzahl ist, in keiner dieser Formeln aufgehen kann.

7. Für jedes q ist

$$1.2.3.4\ldots(p-q)=$$
$$1.2.3\ldots(p-q-1).p-1.2.3\ldots(p-q-1).q;$$
$$1.2.3\ldots(p-q-1).p=$$
$$1.2.3.4\ldots(p-q)-\{-q.1.2.3\ldots(p-q-1)\};$$

folglich, wenn wir das Product $1.2.3.4\ldots p$ überhaupt durch $\{p\}$ bezeichnen, immer in Bezug auf p als Modulus,

$$\{p-q\}\equiv-q\{p-q-1\}.$$

Folglich, wenn man für q nach und nach $q, q+1, q+2, \ldots p-3, p-2$ setzt:

$$\{p-q\}\equiv -q\{p-q-1\}$$
$$\{p-q-1\}\equiv -(q+1)\{p-q-2\}$$
$$\{p-q-2\}\equiv -(q+2)\{p-q-2\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\{2\}\equiv -(p-2)\{1\}$$
$$\{1\}\equiv -(p-1),$$

Digitized by Google

ie letzte Congruenz erhellet von selbst. Also durch Mul-
plication (II. 6.)

$$1||2|\ldots|p-q-1||p-q|$$
$$\equiv q(q+1)(q+2)\ldots(p-1)|1||2|\ldots|p-q-1|.(-1)^{p-q},$$

o diese Potenz der negativen Einheit nur wegen des Vor-
chens beigefügt worden. Ist nun p eine Primzahl, so
ht es in dem Producte

$$|1||2||3|\ldots.|p-q-1|,$$

leicht erhellet, nicht auf (I. 4.), und es ist folglich
. 12.)

$$|p-q|\equiv q(q+1)(q+2)\ldots(p-1).(-1)^{p-q};$$

o auch, wenn man mit

$$1.2.3.4\ldots(q-1)=\{q-1\}$$

ultiplicirt (II. 6.),

$$.|q-1||p-q|\equiv|p-1|.(-1)^{p-q}.$$

ietzen wir nun

$$q-1=\frac{p-1}{p},\ p-q=p-\frac{p-1}{2}-1=\frac{p-1}{2};$$

erhält man sogleich

$$\left|\frac{p-1}{2}\right|^2\equiv|p-1|.(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

ach dem Wilson'schen Satze ist aber immer

$$)-1|\equiv-1,\ |p-1|.(-1)^{\frac{p-1}{2}}\equiv-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\ \text{(II. 6.)}.$$

so auch (II. 3.)

$$\left|\frac{p-1}{2}\right|^2\equiv-(-1)^{\frac{p-1}{2}};$$

t. $\left|\frac{p-1}{2}\right|^2\equiv-1$, wenn $\frac{p-1}{2}$ eine gerade Zahl, oder p
der Form $4n+1$, und $\left|\frac{p-1}{2}\right|^2\equiv1$, wenn $\frac{p-1}{2}$ eine
gerade Zahl, oder von der Form $4n+3$ ist. In
tern Falle also auch immer (2.2,)

$$\left|\frac{p-1}{2}\right|\equiv\pm1;$$

., wenn p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, so
mmer

Digitized by Google

entweder $\left\{\frac{p-1}{2}\right\} - 1$ oder $\left\{\frac{p-1}{2}\right\} + 1$

durch p theilbar.

Wenn p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, ist also immer

$$\left\{\frac{p-1}{2}\right\}^2 - 1^2$$

durch p theilbar, und man kann folglich in diesem Falle immer leicht zwei Quadrate angeben, deren Differenz durch p theilbar ist.

8. Wenn p eine Primzahl, Q ein Polynom von einem niedrigern Grade als p, und P irgend ein Polynom nten Grades ist, welches in

$$x^{p-1} + pQ - 1$$

aufgeht; so giebt es immer n Werthe von x zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$, welche die Congruenz

$$P \equiv o \text{ (Mod. p)}$$

auflösen, oder das Polynom P durch p theilbar machen. Alle Coefficienten der beiden Polynomien sind, wie immer, ganze Zahlen.

Sey $x^{p-1} + pQ - 1 \equiv PP'$; so ist P' ein Polynom vom Grade $p-n-1$. Nach dem Fermat'schen Satze ist $x^{p-1} - 1$, also auch $x^{p-1} + pQ - 1$ für folgende zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegende Werthe von x durch p theilbar:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \ldots \pm \frac{p-1}{2};$$

da p in keinem dieser Werthe aufgeht. Daß man diese Werthe auch negativ nehmen kann, fällt in die Augen. Ist nämlich $p > 2$, so ist $p-1$ eine gerade Zahl, und folglich x^{p-1} immer positiv. Für $p = 2$ gilt der Satz überhaupt nur dann, wenn man ± 1 als zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegende Werthe von x annimmt, indem dann diese beiden Werthe entweder $x^{p-1} - 1 \equiv o$, oder $x^{p-1} - 1 \equiv -2$, also immer durch $p = 2$ theilbar sind. Die Anzahl der obigen Werthe ist im Allgemeinen $= p-1$, für $p = 2$ wenigsten nicht kleiner. Für alle diese Werthe von x geht also p in PP' auf, d. i., weil p eine Primzahl

Digitized by Google

ist, entweder in P, oder in P'. Nach (II. 20.) ist die Anzahl der Werthe von x zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$, welche die Congruenz $P \equiv o$ auflösen, oder P durch p theilbar machen, nicht $> n$. Wäre nun ihre Anzahl $< n$, z. B. $= n - m$, so würde es nach dem so eben Bewiesenen $p-1-(n-m) = p-n-1+m$ Werthe von x zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ geben, welche die Congruenz $P' \equiv o$ auflößen. Dies ist aber nicht möglich, da P' nur ein Polynom vom Grade $p-n-1$ ist, und demnach nicht mehr als $p-n-1$ Auflösungen der Congruenz $P' \equiv o$ zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ zulassen kann (II. 20.). Also ist unter den obigen Voraussetzungen die Anzahl der zwischen $-\frac{1}{2}p$ und $+\frac{1}{2}p$ liegenden Werthe von x, welche die Congruenz $P \equiv o$ auflösen, oder P durch p theilbar machen, weder $> n$, noch $< n$, d. i. $= n$, w. z. b. w.

9. Wenn p eine Primzahl ist, welche > 2 ist, und in a nicht aufgeht, für irgend einen Werth von x aber $x^2 \equiv a \pmod p$ ist; so ist immer

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod p.$$

Nach der Voraussetzung ist

$$x^2 \equiv a, \text{ also } (x^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p \text{ (II. 8.)},$$

d. i.

$$x^{p-1} \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod p.$$

Folglich auch

$$x^{p-1} - 1 \equiv a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod p \text{ (II. 5.)}.$$

Da nun p in a nicht aufgeht; so kann es, wegen der Congruenz $x^2 \equiv a$, immer für p als Modulus, auch in x^2 nicht aufgehen, weil, wegen dieser Congruenz, bei der Division von x^2 durch p, und a durch p, gleiche Reste bleiben müssen. Also geht auch offenbar p in x nicht auf, so daß also nach dem Fermat'schen Satze

$$x^{p-1} - 1 \equiv o \pmod p.$$

Digitized by Google

Also nach dem Obigen auch

$$a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p}, \quad a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Es ist klar, daß a hier positiv und negativ seyn kann, da der Beweis offenbar für beide Fälle ohne Einschränkung gilt.

10. Ist p eine in a nicht aufgehende Primzahl > 2, und

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p};$$

so muß es immer einen Werth von $x < \frac{1}{2}p$ geben, für welchen

$$x^2 \equiv a \pmod{p}.$$

Da $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, so ist $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar, und man kann folglich

$$a^{\frac{p-1}{2}} - 1 = \alpha p, \quad a^{\frac{p-1}{2}} = \alpha p + 1$$

setzen, wo α eine ganze Zahl bezeichnet. Da nach der Voraussetzung $p > 2$, also $p - 1$ eine gerade Zahl ist, und folglich $= 2q$ gesetzt werden kann; so ist

$$x^{p-1} - a^{\frac{p-1}{2}} = x^{p-1} - \alpha p - 1 = x^{2q} - a^q.$$

Aber

$$x^{2q} - a^q = (x^2 - a)\left|x^{2q-2} + x^{2q-4}a + \ldots + x^2 a^{q-2} + a^{q-1}\right|.$$

Also geht $x^2 - a$ in $x^{2q} - a^q$ auf, und es giebt folglich, da $x^2 - a$ vom zweiten Grade ist, und in $x^{p-1} - \alpha p - 1$ aufgeht, zwei Werthe von x, welche $< \frac{1}{2}p$ sind, für welche $x^2 - a \equiv 0 \pmod{p}$, $x^2 \equiv a \pmod{p}$ (8.). Da diese beiden Werthe von x sich jedoch nur rücksichtlich des Zeichens unterscheiden (8.), und x^2 immer positiv ist; so fallen sie in einen zusammen.

11. Ist also, wenn p eine in a nicht aufgehende Primzahl > 2 ist, für keinen Werth von x die Größe $x^2 - a$ durch p theilbar, oder $x^2 \equiv a \pmod{p}$; so kann auch nicht

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p},$$

Digitized by Google

er $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar seyn (10.). Nun ist

$$a^{p-1} - 1 = \left\{a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right\}\left\{a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right\},$$

id nach dem Fermat'schen Satze $a^{p-1} - 1$ durch p, nach

m so eben Bewiesenen aber $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ nicht durch p

eilbar; also muß in diesem Falle $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theil-

r, oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)}$$

yn (I. 3.).

12. Ist umgekehrt

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)},$$

id p wie immer eine nicht in a aufgehende Primzahl >2; kann es keinen Werth von x geben, für welchen $x^2 - a$ urch p theilbar, oder

$$x^2 \equiv a \text{ (Mod. p)}$$

Wäre nämlich, für irgend einen Werth von x,

$$x^2 \equiv a \text{ (Mod. p)};$$

wäre

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p) (9.)},$$

er $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar. Folglich könnte, da

> 2 ist, nicht $a^{\frac{p-1}{2}} - 1 + 2 = a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch eilbar, d. i. nicht

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)}$$

, wie doch angenommen wurde.

13. Ist demnach p eine nicht in a aufgehende Prim-

> 2, so geht p in $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ auf, oder es ist

V.

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p)};$$

wenn es einen Werth von x giebt, für welchen p in $x^2 - a$ aufgeht, oder

$$x^2 \equiv a \text{ (Mod. p)}$$

ist (9.). Dagegen geht p in $a^{\frac{p-1}{2}} + 1$ auf, oder es ist

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)},$$

wenn es keinen Werth von x giebt, für welchen $x^2 - a$ durch p theilbar, oder

$$x^2 \equiv a \text{ (Mod. p)}$$

ist (11.).

Nennen wir nun mit Gauß alle Zahlen, welche in Bezug auf eine gewisse Zahl als Modulus irgend einem Quadrate congruent werden können, wo sich also immer ein Quadrat finden läßt, welches, durch den Modulus dividirt, denselben Rest giebt, wie die Zahl selbst, durch den Modulus dividirt, quadratische Reste des Modulus; alle die Zahlen dagegen, bei denen es keine solche Beziehung giebt, nicht quadratische Reste des Modulus (residua quadratica und non residua quadratica); so läßt sich vorstehender höchst merkwürdiger Satz auch so ausdrücken:

Wenn p eine in a nicht aufgehende Primzahl > 2 ist; so ist immer

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (Mod. p)},$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem a quadratischer Rest, oder nicht quadratischer Rest von p ist.

Auch erhellet aus dem Vorhergehenden unmittelbar die Richtigkeit folgender Sätze:

Ist p eine in a nicht aufgehende Primzahl > 2, so ist a quadratischer Rest oder nicht quadratischer Rest von p, je nachdem

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1 \text{ Mod. p} \quad (10.),$$

Digitized by Google

oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)} \quad (12.)$$

ist.

Um noch ein Beispiel zu der vorhergehenden wichtigen Theorie zu geben, so sey $p = 5$, $a = 9$. Dann ist

$$a^{\frac{p-1}{2}} = 9^2 = 81; \quad a^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 80;$$

also durch 5 theilbar, oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. 5)}.$$

Es ist aber auch, für $x = 3$, $x^2 - a = 9 - 9 = 0$ durch 5 theilbar. Für $a = 8$ dagegen wäre

$$a^{\frac{p-1}{2}} = 8^2 = 64, \quad a^{\frac{p-1}{2}} + 1 = 65;$$

also durch 5 theilbar, oder

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. 5)};$$

Also kann es keinen Werth von x geben, für welchen $x^2 - 8$ durch 5 theilbar, oder $x^2 \equiv 8$ (Mod. 5) ist. Ist a selbst ein Quadrat, so folgt aus dem Fermat'schen Satze leicht, daß immer $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. p), oder $a^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar ist.

Nach dem Wilson'schen Theorem ist immer

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) \equiv -1 \text{ (Mod. p)};$$

Also

$$1.2.3.4 \ldots (p-1) \equiv \mp a^{\frac{p-1}{2}} \text{ (Mod. p)},$$

und das obere oder untere Zeichen zu nehmen, je nachdem a quadratischer oder nicht quadratischer Rest von p ist.

Hier schließen wir nun einen der wichtigsten und merkwürdigsten Sätze der ganzen Zahlenlehre an.

Digitized by Google

IV. Der Satz von der Reciprocität, oder der Fundamentalsatz in der Lehre von den quadratischen Resten von Gauß und Legendre.

1. Wenn p eine Primzahl, a eine durch p nicht theilbare Zahl ist; so bezeichnet Legendre den bei der Division von $a^{\frac{p-1}{2}}$ durch p bleibenden Rest durch $\left(\frac{a}{p}\right)$. Mit Hülfe dieser Bezeichnung läßt der Satz von der Reciprocität sich so ausdrücken:

Wenn p, q zwei ungleiche ungerade Primzahlen sind; so sind, wenn p, q nicht beide von der Form $4n+3$ sind, die Reste $\left(\frac{p}{q}\right)$ und $\left(\frac{q}{p}\right)$ entweder beide $= +1$, oder beide $= -1$; sind aber p, q beide von der Form $4n+3$; so ist immer der eine dieser beiden Reste $= +1$, der andere $= -1$. Im ersten Falle ist also immer $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, im andern $\left(\frac{p}{q}\right) = -\left(\frac{q}{p}\right)$.

Mittelst des Zeichens der Congruenz läßt sich dieser wichtige Satz so ausdrücken:

Wenn p, q zwei ungleiche ungerade Primzahlen sind; so ist, wenn nicht beide von der Form $4n+3$ sind, immer

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (Mod. q)}, \quad q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (Mod. p)};$$

wenn aber beide von der Form $4n+3$ sind,

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (Mod. q)}, \quad q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mp 1 \text{ (Mod. p)}.$$

Daß beide Ausdrücke des Satzes einerlei sind, fällt in die Augen. Zum Beweise schicken wir folgendes Lemma voraus.

2. Wenn p irgend eine ungerade in a nicht aufgehende Primzahl ist; so wird ein Theil der bei der Division von

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots \frac{p-1}{2}a$$

Digitized by Google

durch p bleibenden Reste, deren jeder natürlich $< p$ ist, $< \frac{1}{2}p$, ein Theil dagegen $> \frac{1}{2}p$ seyn. Bezeichnen wir nun die Reste der ersten Art durch

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\lambda;$$

die der andern durch

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots \beta_\mu;$$

so ist nach Legendre's Bezeichnung,

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu,$$

dieser Rest nämlich $= +1$, oder $= -1$, jenachdem μ gerade oder ungerade ist; oder, was dasselbe ist,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\mu \text{ (Mod. p)}.$$

Zuerst erhellet, daß die obigen Reste alle unter einander ungleich sind. Wären nämlich irgend zwei einander gleich, und folglich die entsprechenden Glieder der gegebenen Reihe, welche wir durch ka und k'a bezeichnen wollen, einander congruent, so daß

$$ka \equiv k'a \text{ (Mod. p)}$$

wäre; so wäre auch

$$(k - k')\, a \equiv o \text{ (Mod. p)};$$

folglich $(k - k')a$ durch die Primzahl p theilbar, welches aber nicht möglich ist, da sowohl a nach der Voraussetzung durch p nicht theilbar, als auch $k < \frac{1}{2}p$, $k' < \frac{1}{2}p$, $k - k' < \frac{1}{2}p$, und demnach ebenfalls durch p nicht theilbar ist (I. 2.).

Folglich sind auch die Differenzen

$$p - \beta_1;\ p - \beta_2,\ p - \beta_3,\ \ldots\ p - \beta_\mu$$

alle untereinander ungleich, und jede $< \frac{1}{2}p$, da die Reste

$$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \ldots \beta_\mu$$

alle $> \frac{1}{2}p$ sind. Auch läßt sich leicht zeigen, daß keine dieser Differenzen einem der Reste

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\lambda$$

gleich ist. Seyen nämlich α und β zwei allgemeine Glieder der beiden in Rede stehenden Reihen von Resten, welche

Digitized by Google

respective den Gliedern ka und k'a der gegebenen Reihe entsprechen mögen; so erhellet leicht, daß

$$ka \equiv \alpha \text{ (Mod. p)}, \; k'a \equiv \beta \text{ (Mod. p)} .$$

Also

$$(k+k')a \equiv \alpha + \beta \text{ (Mod. p) (II. 4.)} .$$

Könnte nun $p - \beta = \alpha$, $p = \alpha + \beta$ seyen; so wäre

$$(k+k')a \equiv p \text{ (Mod. p)} ,$$

und folglich $(k+k')a$ durch p theilbar, welches unmöglich ist, da

$$k < \tfrac{1}{2}p, \; k' < \tfrac{1}{2}p, \; k + k' < p ,$$

also, so wie nach der Voraussetzung auch a, durch die Primzahl p nicht theilbar ist. Also kann nie $p - \beta = \alpha$ seyn.

Da folglich alle Glieder der beiden Reihen

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \alpha_\lambda ;$$

$$p-\beta_1, p-\beta_2, p-\beta_3, p-\beta_4, \ldots p - \beta_\mu ;$$

unter einander ungleich sind, jedes $< \frac{1}{2}p$, und ihre Anzahl überhaupt $= \lambda + \mu = \frac{1}{2}(p-1)$ ist; so können diese Größen keine andern, als

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots \frac{p-1}{2}$$

seyn, wenn nur von der Ordnung der einzelnen Glieder abstrahirt wird. Also ist

$$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \ldots \alpha_\lambda \, (p-\beta_1)(p-\beta_2)(p-\beta_3)\ldots(p-\beta_\mu)$$

$$= 1.2.3.4.5 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right) .$$

Denkt man sich das erste Product entwickelt; so erhält man, wenn x eine ganze Zahl bezeichnet, offenbar eine Gleichung von folgender Form:

$$px + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\lambda \, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_\mu \cdot (-1)^\mu$$

$$= 1.2.3.4.5 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right) ,$$

woraus sich unmittelbar

$$1.2.3.4.5 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)$$

$$\equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\lambda \, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_\mu \cdot (-1)^\mu$$

Digitized by Google

ergiebt, immer für p als Modulus. Da aber die Differenzen zwischen den Größen

$$a, 2a, 3a, 4a, \ldots \frac{p-1}{2}a$$

und ihren entsprechenden Resten offenbar durch p theilbar, folglich diese Größen den entsprechenden Resten congruent sind; so ist (II. 6. 7.)

$$a.2a.3a.4a \ldots \frac{p-1}{2}a \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\lambda \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_\mu,$$

$$a.2a.3a.4a \ldots \frac{p-1}{2}a.(-1)^\mu \equiv \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\lambda \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_\mu.(-1)^\mu;$$

also auch (II. 3.) nach dem Obigen

$$a.2a.3a.4a \ldots \frac{p-1}{2}a.(-1)^\mu \equiv 1.2.3.4 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right),$$

$$\text{u. i. } 1.2.3.4 \ldots \frac{p-1}{2}.a^{\frac{p-1}{2}}.(-1)^\mu \equiv 1.2.3.4 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right).$$

Da nun aber der Modulus p eine offenbar in

$$1.2.3.4 \ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)$$

nicht aufgehende Primzahl ist; so ist, wenn man auf beiden Seiten mit diesem Producte dividirt nach (II. 12.)

$$a^{\frac{p-1}{2}}.(-1)^\mu \equiv 1, \quad a^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{2\mu} \equiv 1.(-1)^\mu \quad \text{(II. 7.)}$$

d. i., weil $(-1)^{2\mu}$ immer $= 1$ ist, $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^\mu$ (Mod. p), oder, nach Legendre's Bezeichnung, $\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^\mu$, d. h. der bei der Division von $a^{\frac{p-1}{2}}$ durch p bleibende Rest $= (-1)^\mu$, w. z. b. w.

3. Fermats Satz ist aus diesem Satze eine unmittelbare Folge. Da nämlich μ gerade und ungerade seyn kann, so wird nach dem Bewiesenen p immer entweder in

$$a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \text{ oder in } a^{\frac{p-1}{2}} - 1,$$

Digitized by Google

folglich immer in

$$(a^{\frac{p-1}{2}}+1)(a^{\frac{p-1}{2}}-1)=a^{p-1}-1$$

aufgehen, welches der Fermat'sche Satz. Daß dieser Satz auch für $p=2$ gilt, erhellet leicht, da in diesem Falle $a^{p-1}-1=a-1$, also, da $p=2$ in a nach der Voraussetzung nicht aufgeht, $a^{p-1}-1$ eine gerade Zahl, und folglich durch $p=2$ theilbar ist.

4. Man bezeichne nun, wie schon im Artikel Theiler einer Zahl (17.), die größte in x enthaltene ganze Zahl durch $G(x)$, so daß also immer $x-G(x)$ ein positiver echter Bruch ist, welcher nur dann $=0$ wird, wenn x selbst eine ganze Zahl ist. ka und k'a seyen zwei beliebige Vielfache von a, und α, β die entsprechenden Reste, wobei übrigens Alles wie in (2.) bleibt; so ist nach dieser Bezeichnung

$$\frac{ka}{p}-G\left(\frac{ka}{p}\right)=\frac{\alpha}{p},\quad \frac{k'a}{p}-G\left(\frac{k'a}{p}\right)=\frac{\beta}{p}.$$

Aber $\alpha<\frac{1}{2}p$, $\beta>\frac{1}{2}p$, jedoch $\beta<p$; also

$$\frac{ka}{p}-G\left(\frac{ka}{p}\right)<\tfrac{1}{2},\quad \frac{k'a}{p}-G\left(\frac{k'a}{p}\right)>\tfrac{1}{2};$$
$$\frac{2ka}{p}<2G\left(\frac{ka}{p}\right)+1,\quad \frac{2k'a}{p}>2G\left(\frac{k'a}{p}\right)+1$$
$$<2G\left(\frac{k'a}{p}\right)+2.$$

Folglich, wie leicht erhellet,

$$G\left(\frac{2ka}{p}\right)=2G\left(\frac{ka}{p}\right),\quad G\left(\frac{2k'a}{p}\right)=2G\left(\frac{k'a}{p}\right)+1;$$
$$G\left(\frac{2ka}{p}\right)-2G\left(\frac{ka}{p}\right)=0,\quad G\left(\frac{2k'a}{p}\right)-2G\left(\frac{k'a}{p}\right)=1.$$

Eine Gleichung von der Art dieser beiden kann nun in Bezug auf jedes Vielfache von a in der Reihe in (2.) gebildet werden. Die Anzahl aller dieser Gleichungen ist $=\lambda+\mu$. Unter ihnen kommen λ vor, deren rechte Seite $=0$, den gegen μ, deren rechte Seite $=1$ ist, und durch Addition aller dieser Gleichungen erhält man also:

$$\left.\begin{aligned}&G\left(\frac{2a}{p}\right)+G\left(\frac{4a}{p}\right)+G\left(\frac{6a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)\\&-2G\left(\frac{a}{p}\right)-2G\left(\frac{2a}{p}\right)-2G\left(\frac{3a}{p}\right)-\ldots-2G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}\right)\end{aligned}\right\}=\mu.$$

Digitized by Google

Es kommt aber, wie auch schon aus (2.) erhellet, hier nicht sowohl auf den absoluten Werth von μ, sondern bloß darauf an, ob μ gerade oder ungerade ist, so daß man also in dieser Beziehung kürzer

$$G\left(\frac{2a}{p}\right)+G\left(\frac{4a}{p}\right)+G\left(\frac{6a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)=\mu$$

setzen kann, wodurch der Zweck, den wir hier im Auge haben, völlig erreicht wird. Um den wirklichen Werth von μ zu erhalten, müßte man sich freilich der unverkürzten Formel bedienen. Hat man μ, so ist auch λ gefunden, weil $\lambda+\mu=\frac{1}{2}(p-1)$ ist.

5. Unsere Formel ist aber noch einiger Abkürzungen fähig. Zu dem Ende ist zunächst zu bemerken, daß immer

$$G\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)+G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1$$

ist. Sey nämlich $a=mp+\Theta$; so erhält man leicht

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=mp+\Theta-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+\frac{(2k+1)\Theta}{p},$$

Setzt man nun

$$\frac{(2k+1)\Theta}{p}=G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p};$$

so wird

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-\frac{\varrho}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-1+\frac{p-\varrho}{p},$$

$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p}.$$

Also, weil $\varrho<p$, $p-\varrho<p$ ist,

$$G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

$$\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

woraus, wenn man addirt, die zu beweisende Formel augenblicklich folgt.

Digitized by Google

folglich immer in

$$(a^{\frac{p-1}{2}}+1)(a^{\frac{p-1}{2}}-1)=a^{p-1}-1$$

aufgehen, welches der Fermat'sche Satz. Daß dieser Satz auch für $p=2$ gilt, erhellet leicht, da in diesem Falle $a^{p-1}-1=a-1$, also, da $p=2$ in a nach der Voraussetzung nicht aufgeht, $a^{p-1}-1$ eine gerade Zahl, und folglich durch $p=2$ theilbar ist.

4. Man bezeichne nun, wie schon im Artikel Theiler einer Zahl (17.), die größte in x enthaltene ganze Zahl durch $G(x)$, so daß also immer $x-G(x)$ ein positiver echter Bruch ist, welcher nur dann $=0$ wird, wenn x selbst eine ganze Zahl ist. ka und k'a seyen zwei beliebige Vielfache von a, und α, β die entsprechenden Reste, wobei übrigens Alles wie in (2.) bleibt; so ist nach dieser Bezeichnung

$$\frac{ka}{p}-G\left(\frac{ka}{p}\right)=\frac{\alpha}{p},\quad \frac{k'a}{p}-G\left(\frac{k'a}{p}\right)=\frac{\beta}{p}.$$

Aber $\alpha<\frac{1}{2}p$, $\beta>\frac{1}{2}p$, jedoch $\beta<p$; also

$$\frac{ka}{p}-G\left(\frac{ka}{p}\right)<\tfrac{1}{2},\quad \frac{k'a}{p}-G\left(\frac{k'a}{p}\right)>\tfrac{1}{2};$$
$$\frac{2ka}{p}<2G\left(\frac{ka}{p}\right)+1,\quad \frac{2k'a}{p}>2G\left(\frac{k'a}{p}\right)+1$$
$$<2G\left(\frac{k'a}{p}\right)+2.$$

Folglich, wie leicht erhellet,

$$G\left(\frac{2ka}{p}\right)=2G\left(\frac{ka}{p}\right),\quad G\left(\frac{2k'a}{p}\right)=2G\left(\frac{k'a}{p}\right)+1;$$
$$G\left(\frac{2ka}{p}\right)-2G\left(\frac{ka}{p}\right)=0,\quad G\left(\frac{2k'a}{p}\right)-2G\left(\frac{k'a}{p}\right)=1.$$

Eine Gleichung von der Art dieser beiden kann nun in Bezug auf jedes Vielfache von a in der Reihe in (2.) gebildet werden. Die Anzahl aller dieser Gleichungen ist $=\lambda+\mu$. Unter ihnen kommen λ vor, deren rechte Seite $=0$, dagegen μ, deren rechte Seite $=1$ ist, und durch Addition aller dieser Gleichungen erhält man also:

$$\left.\begin{array}{l}G\left(\frac{2a}{p}\right)+G\left(\frac{4a}{p}\right)+G\left(\frac{6a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)\\ -2G\left(\frac{a}{p}\right)-2G\left(\frac{2a}{p}\right)-2G\left(\frac{3a}{p}\right)-\ldots-2G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}\right)\end{array}\right\}=\mu.$$

Digitized by Google

Es kommt aber, wie auch schon aus (2.) erhellet, hier nicht sowohl auf den absoluten Werth von μ, sondern bloß darauf an, ob μ gerade oder ungerade ist, so daß man also in dieser Beziehung kürzer

$$G\left(\frac{2a}{p}\right)+G\left(\frac{4a}{p}\right)+G\left(\frac{6a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)=\mu$$

setzen kann, wodurch der Zweck, den wir hier im Auge haben, völlig erreicht wird. Um den wirklichen Werth von μ zu erhalten, müßte man sich freilich der unverkürzten Formel bedienen. Hat man μ, so ist auch λ gefunden, weil $\lambda+\mu=\frac{1}{2}(p-1)$ ist.

5. Unsere Formel ist aber noch einiger Abkürzungen fähig. Zu dem Ende ist zunächst zu bemerken, daß immer

$$G\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)+G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1$$

ist. Sey nämlich $a=mp+\Theta$; so erhält man leicht

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=mp+\Theta-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-\frac{(2k+1)\Theta}{p}$$

$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+\frac{(2k+1)\Theta}{p},$$

Setzt man nun

$$\frac{(2k+1)\Theta}{p}=G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p};$$

so wird

$$\frac{(p-2k-1)a}{p}=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-\frac{\varrho}{p}$$

$$=a-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)-1+\frac{p-\varrho}{p},$$

$$\frac{(2k+1)a}{p}=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right)+\frac{\varrho}{p}.$$

Also, weil $\varrho<p$, $p-\varrho<p$ ist,

$$G\left(\frac{(p-2k-1)a}{p}\right)=a-1-(2k+1)m-G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

$$\left(\frac{(2k+1)a}{p}\right)=(2k+1)m+G\left(\frac{(2k+1)\Theta}{p}\right),$$

woraus, wenn man addirt, die zu beweisende Formel augenblicklich folgt.

Digitized by Google

6. p kann, als eine ungerade Primzahl, nur von einer der beiden Formen $4n+1$, $4n+3$ seyn. Wir unterscheiden daher folgende zwei Fälle:

1) $p = 4n + 1$.

Die abgekürzte Reihe für μ in (4.) hat $\frac{1}{2}(p-1) = 2n$ Glieder. Die n ersten Glieder sind:

$$G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{4a}{p}\right) + G\left(\frac{6a}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{2na}{p}\right);$$

die n letzten Glieder

$$G\left(\frac{(2n+2)a}{p}\right) + G\left(\frac{(2n+4)a}{p}\right) + G\left(\frac{(2n+6)a}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)$$

$$= a - 1 - G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right) + a - 1 - G\left(\frac{(2n-3)a}{p}\right) + a - 1 - G\left(\frac{(2n-5)a}{p}\right) \ldots\ldots + a - 1 - G\left(\frac{a}{p}\right) \quad (\text{§. 5.})$$

$$= n(a-1) - G\left(\frac{a}{p}\right) - G\left(\frac{3a}{p}\right) - G\left(\frac{5a}{p}\right) - \ldots - G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right).$$

Folglich, da $n = \frac{1}{2}.4n = \frac{1}{2}(p-1)$ ist,

$$\mu = \tfrac{1}{2}(p-1)(a-1) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{4a}{p}\right) + G\left(\frac{6a}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{2na}{p}\right) - G\left(\frac{a}{p}\right) - G\left(\frac{3a}{p}\right) - G\left(\frac{5a}{p}\right) - \ldots - G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right).$$

Da es aber, wie schon erinnert, bloß darauf ankommt, ob μ gerade oder ungerade ist; so kann man zu diesem Ausdrucke auch

$$2G\left(\frac{a}{p}\right) + 2G\left(\frac{3a}{p}\right) + 2G\left(\frac{5a}{p}\right) + \ldots + 2G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right)$$

addiren, wodurch man erhält:

Digitized by Google

$$\mu = \tfrac{1}{4}(p-1)(a-1) + G\left(\frac{a}{p}\right) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{3a}{p}\right) + \cdots,$$
$$\cdots + G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right) + G\left(\frac{2na}{p}\right),$$

hne Rückſicht auf den wirklichen Werth von μ, immer ur in der Beziehung, ob μ gerade oder ungerade iſt, wor- uf es hier allein ankommt.

2) $p = 4n + 3$.

Die abgekürzte Reihe für μ in (4.) hat $\frac{1}{4}(p-1) = 2n+1$ Glieder, alſo in dieſem Falle immer ein Mit- lglied. Die n erſten Glieder ſind:

$$G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{4a}{p}\right) + G\left(\frac{6a}{p}\right) + \cdots + G\left(\frac{2na}{p}\right);$$

as Mittelglied iſt:

$$G\left(\frac{(2n+2)a}{p}\right);$$

ie n letzten Glieder ſind:

$$G\left(\frac{(2n+4)a}{p}\right) + G\left(\frac{(2n+6)a}{p}\right) + G\left(\frac{(2n+8)a}{p}\right) + \cdots + G\left(\frac{(p-1)a}{p}\right)$$
$$= a - 1 - G\left(\frac{(2n-1)a}{p}\right)$$
$$+ a - 1 - G\left(\frac{(2n-3)a}{p}\right)$$
$$+ a - 1 - G\left(\frac{(2n-5)a}{p}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a - 1 - G\left(\frac{a}{p}\right) \quad (\text{ſ. } 5.);$$

ransformirt man nun das Mittelglied auf ähnliche Art; erhält man

$$G\left(\frac{(2n+2)a}{p}\right) = a - 1 - G\left(\frac{(2n+1)a}{p}\right);$$

nd folglich, da die Anzahl der letzten Glieder, vom Mit- liede an, $= n + 1 = \frac{1}{4}(p+1)$ iſt:

$$= \tfrac{1}{4}(p+1)(a-1) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{4a}{p}\right) + G\left(\frac{6a}{p}\right) + \cdots + G\left(\frac{2na}{p}\right)$$
$$- G\left(\frac{a}{p}\right) - G\left(\frac{3a}{p}\right) - G\left(\frac{5a}{p}\right) - G\left(\frac{7a}{p}\right) - \cdots - G\left(\frac{(2n+1)a}{p}\right),$$

Digitized by Google

oder, wenn man wieder das doppelte der abgezogenen Zahl addirt, indem es bloß darauf ankommt, ob μ gerade oder ungerade ist,

$$\mu = \tfrac{1}{4}(p+1)(a-1) + G\left(\frac{a}{p}\right) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{3a}{p}\right) + \ldots$$

$$\ldots + G\left(\frac{2na}{p}\right) + G\left(\frac{(2n+1)a}{p}\right).$$

Ist a ungerade; so ist $a-1$, also auch, da $\frac{1}{2}(p-1)$ und $\frac{1}{2}(p+1)$ ganze Zahlen sind, $\frac{1}{4}(p \mp 1)(a-1)$ eine gerade Zahl, so daß also beide eben gefundenen Formeln auf

$$\mu = G\left(\frac{a}{p}\right) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{3a}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}\right)$$

reducirt werden können, weil für $p = 4n+1$, $p-1 = 4n$, $\frac{1}{2}(p-1) = 2n$, dagegen für $p = 4n+3$, $p-1 = 4n+2$, $\frac{1}{2}(p-1) = 2n+1$ ist. Ist a gerade, also $a-1$ ungerade; so ist $\frac{1}{4}(p \mp 1)(a-1)$ gerade oder ungerade, je nachdem $\frac{1}{4}(p \mp 1)$ gerade oder ungerade ist. Daher kann man in diesem Falle

$$\mu = \tfrac{1}{4}(p \mp 1) + G\left(\frac{a}{p}\right) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{3a}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}\right)$$

setzen, und das Zeichen ist immer so zu nehmen, daß $\frac{1}{4}(p \mp 1)$ eine ganze Zahl ist.

7. Sind nun p, q zwei ungleiche ungerade Primzahlen, die Einheit ausgeschlossen; so geht natürlich keine in der andern auf, und es ist folglich, wenn ν eine ähnliche Bedeutung hat, wie bisher μ, nach (2.) immer

$$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \text{ (Mod. p)}, \quad p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\nu} \text{ (Mod. q)}.$$

Da p und q beide ungerade sind, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\mu = G\left(\frac{q}{p}\right) + G\left(\frac{2q}{p}\right) + G\left(\frac{3q}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)q}{p}\right),$$

$$\nu = G\left(\frac{p}{q}\right) + G\left(\frac{2p}{q}\right) + G\left(\frac{3p}{q}\right) + \ldots + G\left(\frac{\frac{1}{2}(q-1)p}{q}\right),$$

$$\mu + \nu = G\left(\frac{q}{p}\right) + G\left(\frac{2q}{p}\right) + G\left(\frac{3q}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)q}{p}\right)$$

$$+ G\left(\frac{p}{q}\right) + G\left(\frac{2p}{q}\right) + G\left(\frac{3p}{q}\right) + \ldots + G\left(\frac{\frac{1}{2}(q-1)p}{q}\right),$$

Digitized by Google

d. h. nach dem Vorhergehenden nichts anders, als $\mu + \nu$ ist eine gerade oder ungerade Zahl, jenachdem die Größe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gerade oder ungerade ist, indem es hier immer nur auf ein solches Kriterium ankommt.

Setzen wir nun

$$\frac{q}{p} = x,\ p = 2p' + 1;\ q = 2q' + 1,\ \frac{p}{q} = \frac{1}{x};$$

so erhält obige Formel folgende Gestalt:

$$\mu + \nu = G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x) + G\left(\frac{1}{x}\right) + G\left(\frac{2}{x}\right) + G\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + G\left(\frac{q'}{x}\right).$$

Zugleich wollen wir, welches offenbar, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet ist, annehmen, daß q die kleinere der beiden gegebenen Primzahlen p, q ist; so ist also x immer ein echter Bruch, und folglich $G(x) = 0$.

Ferner ist

$$p'x = \frac{p'q}{p} = \frac{\frac{1}{2}(p-1)(2q'+1)}{p} = \frac{2pq' - 2q' + p - 1}{2p}$$
$$= q' + \frac{p - (q-1) - 1}{2p} = q' + \frac{p-q}{2p}.$$

Folglich ist, weil nach der Annahme $p - q$ positiv und $< p$ ist, $G(p'x) = q'$. Hieraus, und aus dem Obigen sieht man nun, daß die Glieder der Reihe

$$Z = G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x)$$

von 0 bis q' wachsen. Um aber diese Glieder noch näher zu bestimmen, nehme man die Größen

$$m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots m_q,$$

so an, daß

$$m_1 x = 1,\ m_2 x = 2,\ m_3 x = 3, \ldots m_q,\ x = q'$$

wird, welches offenbar immer möglich ist; so erhellet leicht, daß keiner dieser Factoren eine ganze Zahl seyn kann. Sey überhaupt

$$m_z x = z,\ m_z = \frac{z}{x} = z \cdot \frac{1}{x} = \frac{pz}{q};$$

so geht, weil p eine Primzahl, und nach dem Vorhergehenden z höchstens $= q'$, also $< q$ ist, die Primzahl q weder in p, noch in z, also auch nicht in pz auf (I. 2.), so

Digitized by Google

daß also mz nie eine ganze Zahl seyn kann. Sey nun allgemein

$$G(m_z) = M_z;$$ so ist

$$m_z > M_z,\ m_z < M_z + 1;$$

$$m_z x > M_z x,\ m_z x < (M_z+1)x;$$

d. i., da allgemein

$$m_z x = z$$

ist,

$$z > M_z x,\ z < (M_z + 1)x.$$

Also können die Glieder der Reihe

$$G(x),\ G(2x),\ G(3x),\ \ldots\ G(M_z x)$$

höchstens den Werth $z - 1$ haben. Dagegen erhellet auch leicht, daß

$$G((M_z+1)x) = z$$

ist. Denn es ist

$$z > M_z x,\ z < (M_z+1)x;$$

aber x ein echter Bruch; also $1 > x$, und folglich

$$z+1 > M_z x + x,\ z+1 > (M_z+1)x.$$

Demnach

$$z < (M_z+1)x,\ z+1 > (M_z+1)x;$$

also offenbar

$$G((M_z+1)x) = z.$$

Aus dem Bisherigen ergiebt sich nun unmittelbar die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$G(x) = G(2x) = G(3x) = \ldots = G(M_1 x) = 0,$$
$$G((M_1+1)x) = G((M_1+2)x) = \ldots = G(M_2 x) = 1,$$
$$G((M_2+1)x) = G((M_2+2)x) = \ldots = G(M_3 x) = 2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$G((M_{q'-1}+1)x) = G((M_{q'-1}+2)x) = \ldots = G(M_{q'} x) = q'-1,$$
$$G((M_{q'}+1)x) = G((M_{q'}+2)) = \ldots = G(M_{q'+1} x) = q'.$$

Es ist aber

$$m_{q'+1} x = q' + 1,\ M_{q'+1} = G(m_{q'+1}).$$

Also

$$m_{q'+1} > M_{q'+1},\ m_{q'+1} < M_{q'+1} + 1;$$
$$m_{q'+1} x > M_{q'+1} x,\ m_{q'+1} x < (M_{q'+1}+1)x;$$
$$q'+1 > M_{q'+1} x,\ q'+1 < (M_{q'+1}+1)x;$$
$$M_{q'+1} < \frac{q'+1}{x},\ M_{q'+1} + 1 > \frac{q'+1}{x};$$

$$M_{q'+1} = G\left(\frac{q'+1}{x}\right).$$

Digitized by Google

Aber

$$\frac{q'+1}{x} = p' + \frac{p+q}{2q},$$

wie leicht erhellen wird; und, da $p > q$, $p+q > 2q$ ist, $\frac{p+q}{2q}$ ein unechter Bruch; also

$$G\left(\frac{q'+1}{x}\right) > p', \; M_{q'+1} > p'.$$

Setzt man nun q' für $q'+1$, so erhält man wie vorher

$$M_{q'} = G\left(\frac{q'}{x}\right).$$

Aber

$$\frac{q'}{x} = p' - \frac{p-q}{2q};$$

folglich, weil $p > q$, also $\frac{p-q}{2q}$ ein positiver Bruch ist,

$$G\left(\frac{q'}{x}\right) < p', \; M_{q'} < p'.$$

Also ist auch

$$M_{q'} + 1 \text{ nicht} > p'.$$

In der Reihe

$$M_{q'}+1, \; M_{q'}+2, \; M_{q'}+3, \; \ldots \; M_{q'+1}$$

ist also das niedrigste Glied nicht $> p'$, das höchste dagegen $> p'$; folglich muß in dieser Reihe immer ein Glied vorkommen, welches $= p'$ ist, so daß man also die letzte der obigen Reihen mit diesem Gliede abgebrochen denken, und statt jener Reihe kürzer

$$G((M_{q'}+1)x) = G((M_{q'}+2)x) = \ldots = G(p'x) = q'$$

schreiben kann. Dies vorausgesetzt, so ist die Anzahl der Glieder der obigen Reihen für jede einzeln nach der Ordnung

$$M_1, \; M_2 - M_1, \; M_3 - M_2, \; \ldots \; M_{q'} - M_{q'-1}, \; p' - M_{q'}.$$

Folglich, wenn man die obigen Reihen zu einander addirt, da

$$Z = G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x)$$

gesetzt worden ist,

Digitized by Google

$$\begin{aligned} Z = 0.M_1 &+ 1.(M_2 - M_1) \\ &+ 2.(M_3 - M_2) \\ &+ 3.(M_4 - M_3) \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &+ (q'-1)\,(M_{q'} - M_{q'-1}) \\ &+ q'(p' - Mq') \\ = p'q' - M_1 - M_2 - M_3 - \ldots - M_{q'-1} - M_{q'}&. \end{aligned}$$

Aber überhaupt

$$M_x = G(m_x) = G\left(\frac{x}{x}\right);$$

also

$$\begin{aligned} Z &= p'q' - G\left(\frac{1}{x}\right) - G\left(\frac{2}{x}\right) - G\left(\frac{3}{x}\right) - \ldots - G\left(\frac{q'}{x}\right) \\ &= G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x); \\ p'q' &= G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x) \\ &\quad + G\left(\frac{1}{x}\right) + G\left(\frac{2}{x}\right) + G\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + G\left(\frac{q'}{x}\right). \end{aligned}$$

Oben ist aber gefunden

$$\begin{aligned} \mu + \nu &= G(x) + G(2x) + G(3x) + \ldots + G(p'x) \\ &\quad + G\left(\frac{1}{x}\right) + G\left(\frac{2}{x}\right) + G\left(\frac{3}{x}\right) + \ldots + G\left(\frac{q'}{x}\right); \end{aligned}$$

also ist, insofern es bloß darauf ankommt, ob $\mu + \nu$ gerade oder ungerade ist,

$$\mu + \nu = p'q' = \tfrac{1}{2}(p-1).\tfrac{1}{2}(q-1) = \tfrac{1}{4}(p-1)(q-1),$$

so daß also $\mu + \nu$ gleichzeitig mit $\frac{1}{4}(p-1)(q-1)$ gerade und ungerade ist.

8. Hieraus, in Verbindung mit dem bewiesenen Lemma, folgt unmittelbar der Satz von der Reciprocität. Nach diesem Lemma ist nämlich

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv (-1)^{\nu} \text{ (Mod. } q), \quad q^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \text{ (Mod. } p).$$

Sind nun p, q beide von der Form $4n+1$, oder nur eine dieser beiden Primzahlen; so ist, da $\frac{1}{2}(4n+1-1) = 2n$ eine gerade Zahl ist, immer auch das Product

$$\tfrac{1}{4}(p-1).\tfrac{1}{4}(q-1) = \tfrac{1}{4}(p-1)(q-1),$$

d. i. nach dem Obigen $\mu + \nu$, eine gerade Zahl, so daß also μ und ν entweder beide gerade, oder beide ungerade, die Potenzen $(-1)^{\nu}$, $(-1)^{\mu}$ also entweder beide $= +1$, oder beide $= -1$ sind; also

Digitized by Google

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{q}, \quad q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p};$$

welches der erste Theil des Satzes von der Reciprocität ist.

Sind aber p, q beide von der Form

$$4n+3; \text{ so ist } \tfrac{1}{2}(4n+3-1) = 2n+1,$$

d. i. eine ungerade Zahl. Folglich ist auch

$$\tfrac{1}{2}(p-1)\tfrac{1}{2}(q-1) = \tfrac{1}{4}(p-1)(q-1),$$

da beide Factoren ungerade sind, eine ungerade Zahl, und folglich auch $\mu+\nu$ ungerade, d. i. immer eine der beiden Zahlen μ, ν gerade, die andere ungerade, folglich die Potenzen $(-1)^{\nu}$, $(-1)^{\mu}$ immer einander entgegengesetzt, und daher

$$p^{\frac{q-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{q}, \quad q^{\frac{p-1}{2}} \equiv \mp 1 \pmod{p};$$

welches der zweite Theil des Satzes von der Reciprocität ist.

Da das Erste statt findet, wenn $\mu+\nu$ gerade, das Zweite, wenn $\mu+\nu$ ungerade ist; so lassen sich mit Anwendung der von Legendre gebrauchten Bezeichnung beide Fälle auf folgende Art zusammenfassen:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right) \cdot (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)(q-1)}$$

9. Gauß hat in den Disq. arithm. p. 132. den Satz auf folgenden merkwürdigen Ausdruck gebracht:

Wenn p eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist, so ist p; wenn aber p eine Primzahl von der Form $4n+3$ ist, so ist $-p$ quadratischer Rest oder nicht quadratischer Rest einer jeden Primzahl q, welche, positiv genommen, quadratischer Rest, oder nicht quadratischer Rest von p ist.

Sey zuerst p von der Form $4n+1$. Ist nun q eine Primzahl, welche quadratischer Rest von p ist; so muß es ein gewisses Quadrat geben, welches, für p als Modulus, $\equiv q$ ist, nach dem oben mitgetheilten Begriffe des quadratischen Restes. Folglich ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ (III. 9.). Also bei obiger Form von p nach dem Satze von der Re-

Digitized by Google

ciprocität $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. q). Folglich giebt
ein Quadrat, welchem p in Bezug auf q als Mo
lus congruent ist (III. 10.), d. i. p ist quadratischer R
von q. Ist aber q nicht quadratischer Rest von p; so
$q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (Mod. p) (III. 11.); also nach dem Sa
von der Reciprocität im vorliegenden Falle auch $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv -$
(Mod. q). Folglich p nicht quadratischer Rest v
q (III. 12.).

Ferner sey p von der Form $4n+3$, und zuerst q v
der Form $4n+1$. Ist q quadratischer Rest von p;
ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. p) (III. 9.). Also nach dem Sa
von der Reciprocität in diesem Falle auch $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv$
(Mod. q). Da aber $\frac{q-1}{2} = 2n$ eine gerade Zahl
so ist $p^{\frac{q-1}{2}} = (-p)^{\frac{q-1}{2}}$; also auch $(-p)^{\frac{q-1}{2}} \equiv$
(Mod. q). Folglich $-p$ quadratischer Rest von q (III. 10
Ist q nicht quadratischer Rest von p; so ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -$
(Mod. p) (III. 11.) Folglich nach dem Satze von d
Reciprocität $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1$ (Mod. q), und demnach
wie vorher, auch $(-p)^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1$ (Mod. q). M
$-p$ nicht quadratischer Rest von q (III. 12.). Ist al
auch q von der Form $4n+3$, und zuerst quadratisch
Rest von p; so ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. p) (III. 9.). M
in diesem Falle nach dem Satze von der Reciprocität $p^{\frac{q-1}{2}}$
$\equiv -1$ (Mod. q). Da nun aber $\frac{q-1}{2} = 2n+1$ eine
ungerade Zahl ist; so ist $(-p)^{\frac{q-1}{2}} = -p^{\frac{q-1}{2}}$; also
eben so, wie $p^{\frac{q-1}{2}} + 1$ durch q theilbar ist, natürlich auch

Digitized by Google

$(-p)^{\frac{q-1}{2}} - 1$ durch q theilbar, d. i. $(-p)^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. q). Folglich —p quadratischer Rest von q (III. 10.). Ist endlich q nicht quadratischer Rest von p; so ist $q^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (Mod. p) (III. 11.), und folglich nach dem Satze von der Reciprocität in diesem Falle $p^{\frac{q-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. q). Also, ganz wie vorher, $(-p)^{\frac{q-1}{2}} \equiv -1$ (Mod. q), d. i. — p nicht quadratischer Rest von q (III. 12.).

10. Unter vorstehender Gestalt macht der Satz die Grundlage der für die Zahlenlehre so wichtigen Theorie der quadratischen Reste. Unter der ersten Gestalt kommt er zuerst in Legendre Recherches d'Analyse indeterminée. Hist. de l'Ac. des Sc. 1785. p. 465. sqq. vor, aber nur mit einem unvollständigen Beweise versehen. Legendre nennt ihn den Satz von der Reciprocität. Unter der zweiten Form hat ihn Gauß in die Zahlenlehre eingeführt, und (a. a. O. Sect. IV. V.) auf doppelte Art streng bewiesen. Gauß nennt den Satz den Fundamentalsatz in der Lehre von den quadratischen Resten, und hat noch vier andere Beweise gegeben in den Abhandlungen: Summatio quarundam serierum singularium. Comm. Soc. Gotting. recent. Vol. I. und Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampliationes novae. Gotting. 1818. In letzterer Abhandlung (p. 4.) führt Gauß als Grund seiner vielfältigen Bemühungen um diesen Satz auch den an, daß er dadurch zu einer zur Untersuchung der cubischen und biquadratischen Reste geschickten Methode zu gelangen geglaubt habe, welches ihm auch endlich gelungen sey. Die Resultate dieser für die Zahlenlehre höchst wichtigen Arbeit hat Gauß der Göttingischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt, und in einer besondern Abhandlung bekannt gemacht. M. s. auch einige Bemerkungen von Jacobi über diesen wichtigen Gegenstand in Crelles Journal. II. 1. S. 66. Legendre hat den Satz in der Théorie des nombres. p. 198—

Digitized by Google

207; p. 386—393 auf doppelte Art bewiesen. Der erste Beweis ist, wie der Vf. selbst gesteht, nicht völlig genügend; der zweite gehört Gauß, und ist mit dem hier mitgetheilten im Ganzen übereinstimmend. Ich habe mich aber bemüht, diesen, des Scharfsinnes seines berühmten Erfinders völlig würdigen, Beweis so deutlich als möglich darzustellen, weshalb er nicht selten erläuternde Zusätze erhalten hat. Die Formeln, auf denen der Beweis vorzüglich beruht, gestatten auch noch manche andere wichtige Anwendungen, worüber wir nun noch Einiges mittheilen. Neuerlich hat auch Cauchy einen schönen Beweis dieses merkwürdigen Satzes gegeben, mit vielen wichtigen Anwendungen. M. s. Férussac Bulletin des sc. math. Septembre. 1829. p. 205.

11. -1 ist quadratischer Rest jeder Primzahl von der Form $4n+1$, nicht quadratischer Rest jeder Primzahl von der Form $4n+3$.

Sey $p = 4n+1$, $\frac{p-1}{2} = 2n$; so ist $(-1)^{2n}$ positiv, folglich $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$ (Mod. p). Also -1 quadratischer Rest von $p = 4n+1$ (III. 10.). Ist aber $p = 4n+3$, $\frac{p-1}{2} = 2n+1$; so ist $(-1)^{2n+1}$ negativ, also $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1$ (Mod. p), und folglich -1 nicht quadratischer Rest von $p = 4n+3$ (III. 12.).

Man kann diesen Satz auch so ausdrücken: Wenn p eine Primzahl von der Form $4n+1$ ist; so giebt es immer ein Quadrat x^2, für welches x^2+1 durch p theilbar ist; ist aber p eine Primzahl von der Form $4n+3$; so giebt es kein Quadrat x^2, für welches x^2+1 durch p theilbar ist. Unter dieser Form haben Euler und Lagrange den Satz auf verschiedene Arten bewiesen; s. Gauß a. a. O. pp. 61. 108.

12. Setzen wir in (2.) $a = 2$; so ist a gerade; folglich, wenn in (6.) die Primzahl $p > 2$ angenommen wird, $\mu = \frac{1}{4}(p+1)$, da

Digitized by Google

$$G\left(\frac{a}{p}\right)+G\left(\frac{2a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}\right)=$$
$$=G\left(\frac{a}{p}\right)+G\left(\frac{2a}{p}\right)+\ldots+G\left(\frac{p-1}{p}\right)=0$$

ist. Es ist also μ mit $\frac{1}{4}(p\mp1)$ gleichzeitig gerade und ungerade. Das zweideutige Zeichen muß wie in (6.) bestimmt werden. Sey nun

$$1,\ p=8n+1;\ \text{so ist } \tfrac{1}{4}(p-1)=2n,$$

also auch μ, eine gerade Zahl. Folglich

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ (\text{Mod. } p)\ (2.).$$

Aber auch $\frac{p-1}{2}=4n$, eine gerade Zahl. Also auch

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ (\text{Mod. } p).$$

Demnach sowohl $+2$, als auch -2 ein quadratischer Rest von p (III. 10.).

$$2,\ p=8n+3,\ \tfrac{1}{4}(p+1)=2n+1,$$

μ ungerade; also

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ (\text{Mod. } p)\ (2.).$$

Aber $\frac{p-1}{2}=4n+1$, ungerade; also $(-2)^{\frac{p-1}{2}}=-2^{\frac{p-1}{2}}$, und folglich, so wie $2^{\frac{p-1}{2}}+1$ durch p theilbar ist, auch $(-2)^{\frac{p-1}{2}}-1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv 1\ (\text{Mod. } p).$$

Folglich $+2$ nicht quadratischer Rest von p (III. 12.); aber -2 quadratischer Rest von p (III. 10.).

$$3,\ p=8n+5,\ \tfrac{1}{4}(p-1)=2n+1,$$

μ ungerade, folglich

$$2^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ (\text{Mod. } p)\ (2.),$$

Aber $\frac{p-1}{2}=4n+2$, gerade; also auch

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1\ (\text{Mod. } p).$$

Digitized by Google

Folglich sowohl + 2, als auch — 2, nicht quadratischer Rest von p.

4) $p = 8n+7$, $\frac{1}{4}(p+1) = 2n+2$,

μ gerade; also

$$2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p) (2.)}.$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 4n+3$, ungerade; also $(-2)^{\frac{p-1}{2}} = -2^{\frac{p-1}{2}}$, und folglich, so wie $2^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar ist, auch $(-2)^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)}.$$

Folglich + 2 quadratischer Rest von p (III. 10.), — 2 nicht quadratischer Rest von p (III. 12.).

13. Setzen wir ferner $a = 3$; so ist, weil nun ungerade, in (6.)

$$\mu = G\left(\frac{a}{p}\right) + G\left(\frac{2a}{p}\right) + G\left(\frac{3a}{p}\right) + \ldots + G\left(\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p}\right)$$

zu setzen. Aber für $a = 3$

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p} = 1 + \frac{p-3}{2p},$$

$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-1)a}{p} = 1 + \frac{p-9}{2p},$$

$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-2)a}{p} = 1 + \frac{p-15}{2p},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-q)a}{p} = 1 + \frac{p-3-6q}{2p}.$$

Denkt man sich nun q so bestimmt, daß $p-3 > 6q$, $p-3 < 6(q+1)$ ist; so werden die zu der Einheit addirten Brüche in den folgenden Gliedern alle negativ, so daß also alle in diesen Gliedern enthaltenen Ganze $= 0$ sind, und folglich $\mu = q+1$ ist. Sey nun p eine Primzahl, und

1) $p = 12n+1$, $p-3 = 12n-2 = 6.(2n-1)+4$. Also $q = 2n-1$, $q+1 = 2n$, und folglich μ eine gerade Zahl. Also

Digitized by Google

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p) (2.)}.$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 6n$, eine gerade Zahl. Also auch

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p)}.$$

Folglich sowohl + 3 als — 3 ein quadratischer Rest von p (III. 10.).

2) $p = 12n + 7$, $p - 3 = 12n + 4 = 6.2n + 4$, $q = 2n$, $q + 1 = 2n + 1$. Also μ eine ungerade Zahl. Folglich

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p) (2.)}.$$

Auch ist $\frac{p-1}{2} = 6n + 3$, eine ungerade Zahl, $(-3)^{\frac{p-1}{2}} = -3^{\frac{p-1}{2}}$. So wie nun $3^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theilbar, ist, so ist auch $(-3)^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p)}.$$

Demnach ist 3 nicht quadratischer Rest von p (III. 12.), aber — 3 ist quadratischer Rest von p (III. 10.).

3) $p = 12n + 5$, $p - 3 = 12n + 2 = 6.2n + 2$, $q = 2n$, $q + 1 = 2n + 1$; also μ ungerade. Folglich

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p) (2.)}.$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 6n + 2$, gerade. Also auch

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)}.$$

Folglich sowohl + 3, als — 3, nicht quadratischer Rest von p (III. 12.).

4) $p = 12n + 11$, $p - 3 = 12n + 8 = 6.(2n + 1) + 2$, $q = 2n + 1$, $q + 1 = 2n + 2$, μ gerade. Folglich

Digitized by Google

$$3^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. p) (2.)},$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 6n + 5$, ungerade; also $(-3)^{\frac{p-1}{2}} = -3^{\frac{p-1}{2}}$. So wie nun $3^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar ist, so ist auch $(-3)^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. p)}.$$

Folglich + 3 quadratischer Rest von p (III. 10.), −3 nicht quadratischer Rest von p (III. 12.).

14. Bei größeren Primzahlen wird die Untersuchung natürlich weitläufiger, läßt sich jedoch immer ausführen. Sey z. B. a = 5; so ist

$$\frac{\frac{1}{2}(p-1)a}{p} = 2 + \frac{p-5}{2p},$$
$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-1)a}{p} = 2 + \frac{p-15}{2p},$$
$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-2)a}{p} = 2 + \frac{p-25}{2p},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-q)a}{p} = 2 + \frac{p-5-10q}{2p},$$
$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-(q+1))a}{p} = 1 + \frac{3p-5-10(q+1)}{2p},$$
$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-(q+2))a}{p} = 1 + \frac{3p-5-10(q+2)}{2p},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{(\frac{1}{2}(p-1)-(q+q'))a}{p} = 1 + \frac{3p-5-10(q+q')}{2p}.$$

Nehmen wir also q und q′ so, daß

$$p-5 > 10q,\ p-5 < 10(q+1);$$
$$3p-5 > 10(q+q'),\ 3p-5 < 10(q+q'+1);$$
$$3p-5-10q > 10q',\ 3p-5-10q < 10(q'+1);$$

ist; so werden alle folgenden zu der Einheit addirten Brüche negativ, und folglich $\mu = 2(q+1) + q'$ (6.), also, da es bloß auf ein Kriterium ankommt, ob μ gerade oder ungerade ist, $\mu = q'$.

Digitized by Google

Sey nun z. B. die Primzahl p von der Form $20n + 11$; so ist $p - 5 = 20n + 6 = 10.2n + 6$, $q = 2n$, $3p - 5 = 60n + 28$, $3p - 5 - 10q = 40n + 28 = 10.(4n+2) + 8$, $q' = 4n + 2$; also μ gerade, und folglich

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (2,) .$$

Aber $\frac{p-1}{2} = 10n + 5$. Also $(-5)^{\frac{p-1}{2}} = -5^{\frac{p-1}{2}}$, und es ist folglich, so wie $5^{\frac{p-1}{2}} - 1$ durch p theilbar ist, auch $(-5)^{\frac{p-1}{2}} + 1$ durch p theilbar, d. i.

$$(-5)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 .$$

Folglich $+5$ quadratischer Rest, -5 nicht quadratischer Rest von $p = 20n + 11$.

Für $p = 20n + 17$ ist $p - 5 = 20n + 12 = 10.(2n+1) + 2$, $q = 2n + 1$, $3p - 5 = 60n + 46$, $3p - 5 - 10q = 40n + 36 = 10.(4n+3) + 6$, $q' = 4n + 3$, μ ungerade. Also

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \ (2,) .$$

$\frac{p-1}{2} = 10n + 8$ ist gerade. Also

$$(-5)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 .$$

Folglich weder $+5$ noch -5 quadratischer Rest von $p = 20n + 17$.

Für $p = 20n + 1$ ist $p - 5 = 20n - 4 = 10.(2n-1) + 6$, $q = 2n - 1$, $3p - 5 = 60n - 2$, $3p - 5 - 10q = 40n + 8 = 10.4n + 8$, $q' = 4n$, $\frac{p-1}{2} = 10n$. Also sowohl μ als $\frac{p-1}{2}$ gerade. Folglich

$$5^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \ (2,), \quad (-5)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 .$$

Demnach $+5$ und -5 quadratischer Rest von $p = 20n + 1$.

Digitized by Google

Ganz auf ähnliche Weise kann man alle Formen

$$p = 20n + 1, +3, +7, +9, +11, +13, +17, +19;$$

untersuchen.

15. Sowohl ± 3, als auch ± 5, so wie überhaupt jede Primzahl p ist quadratischer Rest von 2; da offenbar $1^2 \mp p$ durch 2 theilbar ist. Eben so ist jede Zahl $\pm x$ quadratischer Rest von sich selbst, da offenbar $x^2 \mp x$ durch x theilbar ist. Also ist ± 3 quadratischer Rest von 3, ± 5 quadratischer Rest von 5.

In Bezug auf die quadratischen Reste der zusammengesetzten Zahlen beweisen wir noch folgende Sätze.

16. Wenn p eine Primzahl > 2 ist, die in a nicht aufgeht; so ist a quadratischer Rest, oder nicht quadratischer Rest von p^n, jenachdem a quadratischer Rest oder nicht quadratischer Rest von p ist.

Ist a quadratischer Rest von p; so giebt es ein Quadrat α^2, für welches $\alpha^2 - a$ durch p theilbar, oder $\alpha^2 \equiv a \pmod{p}$ ist. Um ein Quadrat zu finden, welches $\equiv a \pmod{p^n}$ ist, wollen wir überhaupt $\alpha^2 \equiv a \pmod{p^m}$ setzen, wobei wir annehmen, daß $n > m$, aber nicht $> 2m$. Die Wurzel des gesuchten Quadrats sey $\pm \alpha + p^m x$, so daß also

$$\alpha^2 \pm 2\alpha p^m x + p^{2m} x^2 \equiv a \pmod{p^n},$$

oder, weil n nicht $> 2m$, also $p^{2m} x^2$ durch p^n theilbar ist, offenbar

$$\alpha^2 \pm 2\alpha p^m x \equiv a \pmod{p^n};$$
$$a - \alpha^2 \equiv \pm 2\alpha p^m x \pmod{p^n}.$$

Da nun $\alpha^2 \equiv a \pmod{p^m}$; so ist $a - \alpha^2$ durch p^m theilbar, und man kann also $a - \alpha^2 = p^m q$ setzen, woraus

$$p^m q \equiv \pm 2\alpha p^m x \pmod{p^n}.$$

Also auch, da p^m und p^n das größte gemeinschaftliche Maaß p^m haben, nach (II. 14.)

$$q \equiv \pm 2\alpha x \pmod{p^{n-m}}.$$

Man muß also x so bestimmen, daß $q \mp 2\alpha x$ durch p^{n-m} theilbar wird, und hat folglich die unbestimmte Gleichung des ersten Grades

Digitized by Google

$q \mp 2ax = p^{n-m}y$, $q = p^{n-m}y \pm 2ax$.

aufzulösen. Die Auflösung dieser Gleichung in ganzen Zahlen ist aber jederzeit möglich. Denn nach der Voraussetzung ist die Primzahl $p > 2$, und geht in $\alpha^2 - a$ auf, müßte also, wenn sie in α oder α^2 aufginge, auch in a aufgehen, welches gegen die Voraussetzung ist, so daß also p und 2α offenbar relative Primzahlen sind. Die Größe x kann also immer bestimmt werden (M. v. d. Art. Unbestimmte Analytik. 1.). So wie man hier von p^m zu p^n überging, wo n nicht $> 2m$; so kann man von p zu p^2, von p^2 zu p^4, von p^4 zu p^8 übergehen, u. s. f., so daß also überhaupt a quadratischer Rest von p^n ist, wenn a quadratischer Rest von p ist. Ist aber α nicht quadratischer Rest von p, so kann auch a nicht quadratischer Rest von p^n seyn, weil, wenn p^n in $z^2 - a$ aufginge, offenbar auch p in $z^2 - a$ aufgehen, und folglich a quadratischer Rest von p seyn würde.

17. Geht p in a auf, so daß $a = p^\alpha a'$, wo a' nicht mehr durch p theilbar ist; so muß man drei Fälle unterscheiden:

1) Wenn $\alpha =$ oder $> n$ ist; so ist offenbar a durch p^n theilbar; also $a \equiv o^2$ (Mod. p^n), d. i. a quadratischer Rest von p^n.

2) Ist $\alpha < n$ und ungerade, $= 2\gamma + 1$; so ist a nicht quadratischer Rest von p^n.

Wäre nämlich $x^2 \equiv a \equiv p^{2\gamma+1} a'$ (Mod. p^n); so wäre $x^2 - p^{2\gamma+1} a'$ durch p^n, also auch, da $2\gamma + 1 < n$ ist, durch $p^{2\gamma+1}$ theilbar. Folglich wäre auch x^2 durch $p^{2\gamma+1}$, und also x durch $p^{\gamma+1}$ theilbar, weil, wenn x bloß durch die Potenz $p^{\gamma+1-\delta}$ theilbar wäre, auch x^2 bloß durch die Potenz $p^{2\gamma+1-(2\delta-1)}$ theilbar seyn würde. Demnach müßte also auch x^2 durch $p^{2\gamma+2}$, und, da $2\gamma + 2$ nicht $> n$ ist, auch $p^{2\gamma+1} a'$ durch $p^{2\gamma+2}$, d. i. a' durch p theilbar seyn, welches gegen die Annahme. Also ist a nicht quadratischer Rest von p^n.

3) Ist $\alpha < n$ und gerade; so ist a quadratischer Rest, oder nicht quadratischer Rest von p^n, jenachdem a' quadratischer Rest, oder nicht quadratischer Rest von p ist.

Digitized by Google

Ist nämlich a' quadratischer Rest von p; so ist es auch quadratischer Rest von $p^{n-\alpha}$ (16.). Setzen wir nun $x^2 \equiv a' \pmod{p^{n-\alpha}}$; so geht $p^{n-\alpha}$ in $x^2 - a'$, also auch p^n in $p^\alpha x^2 - p^\alpha a'$ auf, oder es ist $p^\alpha x^2 \equiv p^\alpha a' \equiv a \pmod{p^n}$, d. i., weil $p^\alpha x^2$ ein Quadrat ist, a quadratischer Rest von p^n. Ist aber a' nicht quadratischer Rest von p, so kann auch $a = p^\alpha a'$ nicht quadratischer Rest von p^n seyn. Wäre nämlich $x^2 \equiv p^\alpha a' \pmod{p^n}$; so ist, weil $\alpha < n$, $x^2 - p^\alpha a'$, also auch x^2 durch p^α theilbar, und folglich, für $\alpha = 2\gamma$, $\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2$ eine ganze Zahl. Da nun $x^2 - p^{2\gamma} a'$ durch p^n theilbar ist; so ist offenbar auch $\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2 - a'$ durch $p^{n-2\gamma}$, also um so mehr $\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2 - a'$ durch p theilbar, d. i. $\left(\frac{x}{p^\gamma}\right)^2 \equiv a' \pmod{p}$, oder a' quadratischer Rest von p, gegen die Voraussetzung. Folglich ist a nicht quadratischer Rest von p^n.

18. Der Werth $p = 2$ ist vorher ausgeschlossen worden. Wir müssen also für denselben noch einige Bestimmungen beifügen.

1) Jede Zahl ist ein quadratischer Rest von 2. Denn es erhellet leicht, daß $(2x)^2 \mp 2\alpha$, $(2x+1)^2 \mp (2\alpha+1)$ durch 2 theilbar, also

$$(2x)^2 \equiv \pm 2\alpha \pmod{2}, \quad (2x+1)^2 \equiv \pm (2\alpha+1) \pmod{2};$$

d. i. $\pm 2\alpha$ und $\pm (2\alpha+1)$ ein quadratischer Rest von 2 ist.

2) Jede ungerade Zahl von der Form $4\alpha + 1$ ist quadratischer Rest, jede ungerade Zahl von der Form $4\alpha+3$ nicht quadratischer Rest von $2^2 = 4$.

Denn $(2x+1)^2$ ist von der Form $4y + 1$, also offenbar $(2x+1)^2 \equiv 4\alpha+1 \pmod{4}$, oder $4\alpha+1$ quadratischer Rest von 4. Daß $4\alpha + 3$ keinem geraden Quadrate in Bezug auf den Modulus 4 congruent seyn kann, versteht sich von selbst. Eben so wenig kann aber auch $(2x+1)^2 \equiv 4\alpha+3 \pmod{4}$ seyn, da $(2x+1)^2 - (4\alpha+3)$ offenbar von der Form $4(y-\alpha)-2$, also nicht durch 4 theilbar ist. Folglich ist $4\alpha + 3$ nicht quadratischer Rest von 4.

Digitized by Google

3) $8\alpha + 1$ ist immer ein quadratischer Rest von $2^3 = 8$. Denn $(4x + 1)^2$ ist von der Form $8y + 1$, also offenbar $(4x + 1)^2 - (8\alpha + 1)$ durch 8 theilbar, d. i. $(4x + 1)^2 \equiv 8\alpha + 1 \pmod 8$, oder $8\alpha + 1$ quadratischer Rest von 8.

4) Sey $a^2 \equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^m}$ und $m > 2$; so kann man sich n so genommen denken, daß $n > m$, aber nicht $> 2m - 2$ ist, welches für $m = 2$ nicht möglich wäre, da dann $2m - 2$ auch $= 2$. Ich behaupte nun, daß es ein Quadrat giebt, welches $\equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^n}$. Man setze die Wurzel dieses Quadrats $= \pm a + 2^{m-1}x$; so ist also

$$a^2 \pm 2^m ax + 2^{2m-2}x^2 \equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^n}.$$

Also, da n nicht $> 2m - 2$, auch

$$a^2 \pm 2^m . ax \equiv 8\alpha + 1 \pmod{2^n}.$$

Aber nach der Voraussetzung

$$(8\alpha + 1) - a^2 = 2^m . q;$$

also $\pm 2^m . ax \equiv 2^m . q \pmod{2^n}$, und folglich, da $n > m$, offenbar auch

$$\pm ax \equiv q \pmod{2^{n-m}}.$$

Man muß also x so bestimmen, daß $q \mp ax$ durch 2^{n-m} theilbar ist, d. h. die unbestimmte Gleichung des ersten Grades

$$q \mp ax = 2^{n-m} . y, \quad q = 2^{n-m} . y \pm ax$$

auflösen. Diese Auflösung ist aber möglich, da 2^{n-m} und a relative Primzahlen sind. Denn, ginge 2 in a auf, so müßte es, da dann auch 2 in a^2 aufginge, und nach der Voraussetzung 2^m in $a^2 - (8\alpha + 1)$ aufgeht, auch in $8\alpha + 1$ aufgehen, welches unmöglich ist. Also ist $8\alpha + 1$ quadratischer Rest von 2^n. Da nun $8\alpha + 1$ wirklich quadratischer Rest von 2^3 ist, wo $3 > 2$; so ist $8\alpha + 1$ quadratischer Rest aller höhern Potenzen bis $2^{6-2} = 2^4$, folglich wieder alle Potenzen bis $2^{8-2} = 2^6$, $2^{12-2} = 2^{10}$, $2^{20-2} = 2^{18}$, $2^{36-2} = 2^{34}$, u. s. f. überhaupt von jeder höhern Potenz als 2^3.

5) Die ungeraden Zahlen von der Form $8\alpha + 3$, $8\alpha + 5$, $8\alpha + 7$ sind dagegen nicht quadratische Reste von

Digitized by Google

2^3, oder einer höhern Potenz der 2, welches augenblicklich daraus erhellet, daß das Quadrat jeder ungeraden Zahl von der Form $4x + 1$ oder $4x + 3 = 4(x+1) - 1 = 4y - 1$ von der Form $8x + 1$ ist, und demnach offenbar nie ein ungerades Quadrat einer der Zahlen $8\alpha + 3$, $8\alpha + 5$, $8\alpha + 7$ in Bezug auf den Modulus 8 congruent werden kann, eben so wenig, wie ein gerades Quadrat.

6) Für die durch 2 theilbaren Zahlen finden die in (17.) gegebenen Bestimmungen ihre Anwendung.

19. Ist nun der Modulus m eine zusammengesetzte Zahl, $= pqrs \ldots$, wo p, q, r, ... ungleiche Primzahlen, oder Potenzen ungleicher Primzahlen sind; so fällt sogleich in die Augen, daß, wenn a ein quadratischer Rest von m ist, a auch ein quadratischer Rest von p, q, r, ... seyn wird; und daß folglich umgekehrt, wenn a nicht quadratischer Rest von einer der Größen p, q, r, ... ist, a auch nicht quadratischer Rest von m seyn kann. Auch läßt sich behaupten, daß a quadratischer Rest von m ist, wenn a quadratischer Rest von p, q, r, ... ist. Um dies zu beweisen, nehmen wir zuerst an, daß m bloß zwei Factoren p, q habe, und nach der Annahme

$$\alpha^2 \equiv a \ (\text{Mod. } p), \ \beta^2 \equiv a \ (\text{Mod. } q)$$

sey. Man bestimme nun x so, daß

$$x \equiv \alpha \ (\text{Mod. } p), \ x \equiv \beta \ (\text{Mod. } q),$$

eine Bestimmung, welche immer möglich ist, indem nämlich obige Congruenzen auf die unbestimmten Gleichungen des ersten Grades

$$x - \alpha = py, \ x - \beta = qz;$$

und diese wieder auf

$$\alpha - \beta = qz - py,$$

deren Auflösung, da p, q, relative Primzahlen sind, immer möglich ist (Unbestimmte Analytik. 1.), führen. Ist nun x den obigen Bedingungen gemäß bestimmt; so führen die gegebenen und gefundenen Congruenzen leicht auf

$$x^2 \equiv \alpha^2 \equiv a \ (\text{Mod. } p), \ x^2 \equiv \beta^2 \equiv a \ (\text{Mod. } q)$$

(II. 8.), so daß also $x^2 - a$ sowohl durch p, als durch q, folglich, weil p, q relative Primzahlen sind, auch

Digitized by Google

urch pq theilbar, und demnach $x^2 \equiv a$ (Mod. pq), oder $x^2 \equiv a$ (Mod. m), d. i. a quadratischer Rest von n ist. Von zwei Factoren schließt man nun leicht auf drei, u. s. f., woraus die Allgemeinheit des Satzes folgt.

20. Mit Hülfe der bisher bewiesenen Sätze ist man im Stande, in allen Fällen über die quadratischen Reste der einfachen und zusammengesetzten Zahlen mit Sicherheit zu urtheilen, obgleich wir wegen weiterer Ausführung dieser wichtigen Lehre auf die Disq. arithm. Sect. IV. von Gauß verweisen müssen. Wir schließen mit folgenden merkwürdigen Sätzen:

+ 2 ist quadratischer Rest jeder Zahl, welche weder durch 4, noch durch Primzahlen von der Form $8n+3$, $8n+5$ theilbar ist; von allen andern nicht quadratischer Rest.

Denkt man sich eine Zahl m von der angegebenen Beschaffenheit in ihre Primfactoren zerlegt; so ist das Product von der Form $2.(8n+1)^{\alpha}.(8n+7)^{\beta}$. Nun ist 2 quadratischer Rest von 2 (15.), von $8n+1$ und $8n+7$ (12.), also, da 2 durch $8n+1$ und $8n+7$ nicht theilbar ist, auch von $(8n+1)^{\alpha}$, $(8n+7)^{\beta}$ (16.), folglich auch von $2.(8n+1)^{\alpha}.(8n+7)^{\beta}$, d. i. von m (19.). Ist aber m z. B. durch $8n+3$ theilbar; so ist, weil 2 nicht quadratischer Rest von $8n+3$ ist (12.), 2 auch nicht quadratischer Rest von m (16. 19.). Eben so in andern Fällen.

Auf ähnliche Art überzeugt man sich von der Richtigkeit des folgenden Theorems:

— 2 ist quadratischer Rest jeder Zahl, welche weder durch 4, noch durch eine Primzahl von der Form $8n+5$ oder $8n+7$ theilbar ist; von jeder andern nicht quadratischer Rest.

Von 4 ist weder + 2, noch — 2, quadratischer Rest, da, x mag gerade oder ungerade seyn, offenbar weder x^2-2, noch x^2+2 durch 4 theilbar seyn kann.

+ 3 ist quadratischer Rest aller Zahlen, welche weder durch 4, noch durch 9, noch durch eine Primzahl von der

Digitized by Google

Form $12n+5$ oder $12n+7$ theilbar ist; von allen andern nicht quadratischer Rest.

Ist m von der angegebenen Beschaffenheit, so ist es, in seine Primfactoren zerlegt, von der Form $2.3.(12n+1)^{\alpha}.(12n+11)^{\beta}$. Es ist aber 3 quadratischer Rest von 2 (18. 1.), von 3 (15.), von $12n+1$, $12n+11$ (13.), von $(12n+1)^{\alpha}$, $(12n+11)^{\beta}$ (16.); also von dem obigen Product (19.), d. i. von m. Ist aber z. B. m durch 9 theilbar; so ist, weil offenbar 3 nicht quadratischer Rest von 9 ist, wie leicht aus (17. 2.) erhellet, auch 3 nicht quadratischer Rest von m (19.); und eben so in andern Fällen.

— 3 ist quadratischer Rest aller Zahlen, welche weder durch 8, noch durch 9, noch durch eine Primzahl von der Form $12n+5$ oder $12n+11$, d. i. von der Form $6n+5$, theilbar ist; von allen übrigen Zahlen ist — 3 nicht quadratischer Rest.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet auf ähnliche Art, wie vorher.

Der Erfinder dieser merkwürdigen Sätze ist Fermat (Opp. mathem. T. II. p. 857.). Lagrange und Euler haben zuerst Beweise derselben gegeben, in den Mém. de Berlin. 1775. p. 349. 351. 352. und den Nov. Comm. Petrop. T. VIII. p. 105. Auch s. m. Euleri Opuscula analytica. T. I. p. 259.

V. Form der Divisoren der Formel $t^2 + au^2$.

1. Die Form der Divisoren dieser Formel ist an sich so merkwürdig, und für viele Untersuchungen in der Zahlehre so wichtig, daß die hierher gehörenden Grundsätze hier nicht fehlen dürfen.

2. a bezeichnet jede gegebene positive oder negative Zahl, und t, u sind zwei unbestimmte Größen, denen alle positiven und negativen ganzen Zahlen als Werthe beigelegt werden können, nur mit der Bedingung, daß t

Digitized by Google

nd u relative Primzahlen sind. Wären nämlich t und u
icht relative Primzahlen, sondern z. B. $t = \Theta t'$, $u = \Theta u'$; so wäre

$$t^2 + au^2 = \Theta(\Theta t'^2 + a\Theta u'^2),$$

lso $t^2 + au^2$ durch Θ theilbar, so daß man also, da Θ
de Zahl bezeichnen kann, t und u immer so bestimmen
nnte, daß $t^2 + au^2$ durch jede willkührliche Zahl theil-
ar wäre, folglich, ohne die Beschränkung, daß t und u
lative Primzahlen sind, von gar keiner besondern Form
er Divisoren der Formel $t^2 + au^2$ die Rede seyn könnte.

3. Zwei zusammengehörende Divisoren unserer For-
nel seyen p und p_1, so daß also

$$t^2 + au^2 = pp_1$$

st. Zunächst erhellet, daß p (und eben so natürlich auch
p_1) mit u relative Primzahl ist. Wäre nämlich die Prim-
ahl Θ ein gemeinschaftlicher Divisor von p und u, so
äre auch

$$t^2 = pp_1 - au^2,$$

lso, da Θ eine Primzahl ist, auch t durch Θ theilbar
(I. 3.), und t und u wären folglich, gegen die vorher fest-
esetzte Bedingung, nicht relative Primzahlen. Also ist
ie Auflösung der unbestimmten Gleichung des ersten
Grades

$$t = px + uq$$

in ganzen Zahlen jederzeit möglich (Unbestimmte Analytik.
1.). Man kann also

$$t = px + uq$$

setzen, welches, in die Gleichung

$$t^2 + au^2 = pp_1$$

für t gesetzt,

$$px^2 + 2uxq + \frac{(q^2+a)u^2}{p} = p_1$$

giebt. Also muß

$$\frac{(q^2+a)u^2}{p}$$

eine ganze Zahl seyn, oder p in $(q^2+a)u^2$, folglich
auch, weil p und u nach dem Obigen relative Primzah-
len sind, in $q^2 + a$ aufgehen (I. 7.), so daß man also

Digitized by Google

$$\frac{q^2+a}{p} = r,\ px^2 + 2uxq + ru^2 = p_1$$

setzen kann. Von dieser Form sind also, da p_1 jed Factor von $t^2 + au^2$ bedeuten kann, alle Divisoren d ser Formel. Zugleich erhellet, daß x und u immer relat Primzahlen. Wäre nämlich, wenn Θ wieder eine Pri zahl bezeichnet, x und u durch Θ theilbar, so würde Θ a in p_1, folglich auch in

$$t^2 + au^2 = pp_1,$$

also, da Θ in u aufgeht, auch in t^2, und folglich auch t (I. 3.) aufgehen, so daß also t und u gegen die Vo ausseţung nicht relative Primzahlen wären. Die beid zusammengehörenden Divisoren p und p_1 unserer Form sind also immer von der Form

$$p_1 = px^2 + 2uxq + ru^2,$$
$$p = p_1x_1^2 + 2ux_1q_1 + r_1u^2.$$

Auch folgt aus der obigen Darstellung unmittelbar, d jeder Factor von $t^2 + au^2$ immer auch ein Divisor einfachern Formel $q^2 + a$ oder $t^2 + a$ ist, welcht u der vorhergehenden entspringt, wenn man $u = 1$ seţt, s daß man also den Factoren der Formel $t^2 + au^2$ auch d einfachere Form

$$px^2 + 2xq + r$$

geben kann.

4. Eben so kann man auch umgekehrt leicht zeigen, daß, wenn p und q so bestimmt sind, daß $\frac{q^2+a}{p} = r$, eine ganze Zahl ist, immer p und

$$p_1 = px^2 + 2uxq + ru^2$$

zusammengehörende Divisoren der Formel $t^2 + au^2$ sind. Denn es ist

$$pp_1 = p^2x^2 + 2uxpq + pru^2;$$

aber $q^2 + a = rp$; also

$$pp_1 = p^2x^2 + 2uxpq + q^2u^2 + au^2 = (px + qu)^2 + au^2,$$

d. i. wenn

$$px + qu = t$$

geseţt wird,

$$pp_1 = t^2 + au^2.$$

Digitized by Google

folglich p und p_1 zusammengehörende Divisoren von $z^2 + au^2$.

Kann man überhaupt p, q so bestimmen, daß $\frac{q^2+a}{p}$ eine ganze Zahl ist; so kann man zugleich q immer so bestimmen, daß es $\frac{1}{2}p$ nicht übersteigt. Ist nämlich q^2+a durch p theilbar; so ist auch für jedes z

$$\frac{(q-pz)^2+a}{p} = \frac{q^2+a}{p} + pz^2 - 2qz$$

eine ganze Zahl. Nimmt man nun für z die ganze Zahl, welche dem Bruche $\frac{q}{p}$ am nächsten kommt; so ist, wie leicht erhellet, immer entweder $\frac{q}{p} - z \leqq \frac{1}{2}$, oder $z - \frac{q}{p} \leqq \frac{1}{2}$, jenachdem $z \gtrless \frac{q}{p}$ ist. Also $q - pz \leqq \frac{1}{2}p$ oder $pz - q \leqq \frac{1}{2}p$, folglich der positive Werth von $q - pz \leqq \frac{1}{2}p$, so daß also $q - pz = q'$ immer so bestimmt werden kann, daß $q'^2 + a$ durch p theilbar, und q' nicht $> \frac{1}{2}p$ ist.

5. Lagrange (Mém. de Berlin. 1773.) hat gezeigt, daß überhaupt die Formel

$$py^2 + 2qxy + rx^2$$

immer so transformirt werden kann, daß der mittlere Coefficient 2q keinen der beiden äußern p, r übersteigt.

Wir wollen annehmen, daß 2q einen der beiden äußern, z. B. p, welches willkührlich ist, da obige Formel in Bezug auf p, r eine ganz symmetrische Form hat, übersteige, und daß p_1 wenn 2q beide äußere Coefficienten übersteigt, der kleinere von beiden sey. Die ganze Zahl, welche dem Bruche $\frac{q}{p}$ am nächsten kommt, sey $= n$; so können folgende Fälle eintreten:

$$n - \frac{q}{p} = 0,\ 2np - 2q = 0;$$

$$n - \frac{q}{p} \leqq \frac{1}{2},\ 2np - 2q \leqq p;$$

$$\frac{q}{p} - n \leqq \frac{1}{2},\ 2q - 2np \leqq p;$$

und der absolute Werth von $2np - 2q$ übersteigt also den Werth des Coefficienten p nicht. Auch ist zu bemerken, daß, für $2q > p$, n nicht $= 0$ seyn kann, weil $\frac{q}{p} > \frac{1}{2}$, und

Digitized by Google

folglich die dem Bruche $\frac{q}{p}$ am nächsten kommende ganze Zahl nothwendig > 0 ist. Ist aber $2q \leqq p$, also $\frac{q}{p} \leqq \frac{1}{2}$, so ist $n = 0$ zu setzen, wie leicht erhellet.

Man setze nun $y = y' - nx$; so wird die gegebene Größe

$$\begin{aligned} &= p(y'^2 - 2ny'x + n^2x^2) + 2q(y' - nx)x + rx^2 \\ &= py'^2 - 2(pn - q)xy' + (pn^2 - 2nq + r)x^2 \\ &= py'^2 - 2q'xy' + r'x^2 , \end{aligned}$$

für $q' = pn - q$, $r' = pn^2 - 2nq + r$; und es ist in dieser transformirten Formel nach dem Obigen $2q'$ nicht $> p$.

Zugleich erhellet, daß immer

$$pr' - q'^2 = pr - q^2$$

ist. Denn es ist

$$\begin{aligned} pr' - q'^2 &= p(pn^2 - 2nq + r) - (pn - q)^2 \\ &= pr - q^2 + p^2n^2 - p^2n^2 - 2npq + 2npq . \end{aligned}$$

Auch ist $q' < q$. Denn $2q > p$, $p \leqq 2q'$, $2q > 2q'$, $q > q'$.

So lange also in einer Formel der obigen Form der mittlere Coefficient größer als einer der beiden äußern ist, kann man diese Formel immer in eine andere transformiren, in welcher der mittlere Coefficient diesen äußern Coefficienten nicht mehr übersteigt, und in jeden zwei solchen Formeln ist allgemein

$$p_{n-1}r_n - q_n^2 = p_{n-1}r_{n-1} - q^2_{n-1} ,$$

und $q_n < q_{n-1}$, wenn $2q_{n-1}$, $2q_n$ die mittlern Coefficienten sind, und $2q_{n-1} > p_{n-1}$ ist.

Wendet man nun die so eben gelehrte Transformation an, so lange der mittlere Coefficient noch größer als einer der beiden äußern ist, und bezeichnet die successiven mittlern Coefficienten durch $2q$, $2q'$, $2q''$, $2q'''$, ...; so ist

$$q, q', q'', q''', q'''', \ldots .$$

eine abnehmende Reihe. Käme man nie auf eine transformirte Formel, in welcher der mittlere Coefficient keinen der beiden äußern übersteigt; so würde obige Reihe in's Unendliche fortlaufen, welches ungereimt ist, da alle Glie-

Digitized by Google

der derselben endliche ganze Zahlen sind. Man muß folglich immer irgend einmal auf eine transformirte Formel kommen, in welcher der mittlere Coefficient keinen der beiden äußern übersteigt. In diesem Falle wird dann, wie schon oben erwähnt, die ganze Zahl $n = o$, und q, r behalten ihre absoluten Werthe, wie aus den für q' und r' gefundenen Ausdrücken unmittelbar folgt.

Die gegebene Formel sey z. B.

$$35y^2 + 172xy + 210x^2 ;$$

so ist $172 > 35$, $p = 35$, $2q = 172$, $q = 86$, $\frac{q}{p} = \frac{86}{35}$, $n = 2$, $q' = 70 - 86 = -16$, $r' = 140 - 344 + 210 = 6$. Also die transformirte Formel:

$$35y'^2 + 32xy' + 6x^2 .$$

Hier ist noch $32 > 6$. Also $p = 6$, $2q = 32$, $q = 16$, $r = 35$, $\frac{q}{p} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$, $n = 3$, $q' = 18 - 16 = 2$, $r' = 54 - 96 + 35 = -7$, und demnach die transformirte Formel:

$$6x'^2 - 4y'x' - 7y'^2 ,$$

wo nun $4 < 6$, $4 < 7$, wie verlangt wurde.

6. In der Formel

$$px^2 + 2uxq + ru^2$$

in (3.) sind x und u relative Primzahlen (3.). Verwandelt man nach (5.) diese Formel in

$$px'^2 + 2ux'q + r'u^2 ,$$

wo also $x = x' - nu$ gesetzt werden muß; so erhellet leicht, daß auch in der transformirten Formel x' und u relative Primzahlen sind, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, der gemeinschaftliche Factor auch in x aufgehen müßte, so daß also x und u nicht relative Primzahlen wären. Auch ist nach dem Vorigen immer

$$pr' - q'^2 = pr - q^2, \text{ und } q' < q .$$

Folglich sind offenbar auch bei öfterer Anwendung voriger Transformation in der endlich resultirenden Formel die unbestimmten Größen relative Primzahlen, wovon man sich durch einen leichten Schluß überzeugt.

7. Man unterscheide nun zwei Fälle, jenachdem a in

Digitized by Google

der Formel $t^2 + au^2$ positiv oder negativ ist. Die beiden Formen seyen, indem man c immer als positiv annimmt,

$$t^2 + cu^2 \text{ und } t^2 - cu^2 .$$

Die Formen der Divisoren dieser beiden Formeln sind

$$px^2 + 2qxu + \left(\frac{c+q^2}{p}\right)u^2 ,$$

$$px^2 + 2qxu - \left(\frac{c-q^2}{p}\right)u^2 ;$$

oder

$$px^2 + 2qxu + ru^2 ,$$

für $r = \frac{c+q^2}{p}$, $pr - q^2 = c$; und

$$px^2 + 2qxu - ru^2 ,$$

für $r = \frac{c-q^2}{p}$, $pr + q^2 = c$. Denkt man sich nun diese Factoren nach (5.) transformirt; so ist in beiden

$$2q \gtrless p, \; 2q \gtrless r .$$

Also $4q^2 \gtrless pr$, $q^2 \gtrless \frac{1}{4}pr$. Aber im ersten Falle $pr = c + q^2$; also

$$q^2 \gtrless \tfrac{1}{4}(c+q^2), \; 3q^2 \gtrless c, \; q \gtrless \sqrt{\tfrac{1}{3}c}.$$

Im zweiten Falle ist $q^2 \gtrless \frac{1}{4}(c-q^2)$, $5q^2 \gtrless c$, $q \lesssim \sqrt{\frac{1}{5}c}$. Die Größen x und u sind immer relative Primzahlen.

Die Divisoren der Formel $t^2 + au^2$, unter der Voraussetzung, daß t und u relative Primzahlen sind, heißen wegen ihrer hier bewiesenen Form quadratische Divisoren. Alle Factoren obiger Formel, und folglich auch der einfachen Formel $t^2 + a$, haben die quadratische Form.

VI. Einige Sätze von den Primzahlen, als Folgerungen aus dem Vorhergehenden.

1. Jeder Divisor der Formel $t^2 + u^2$ ist, wenn t und u relative Primzahlen sind, die Summe zweier Quadrate, oder von der Form $x^2 + y^2$, so daß auch x und y relative Primzahlen sind.

Die vorher (V. 5.) gelehrte Transformation schon aus-

Digitized by Google

eführt gedacht, sind alle Divisoren der Formel $t^2 + u^2$ on der Form

$$px^2 + 2qxy + ry^2,$$

nd es ist, da hier $c = 1$ (V. 7.),

$$pr - q^2 = 1, q < r\frac{1}{2} \text{ (V. 7.)}.$$

olglich, da q eine ganze Zahl ist, offenbar $q = 0$; also $r = 1$, und folglich $p = 1$, $r = 1$, da p und r eben- lls ganze Zahlen sind. Dadurch verwandelt sich die obige orm der Divisoren hier in $x^2 + y^2$, und x, y sind re- tive Primzahlen, wie schon vorher (V. 6.) allgemein be- iesen worden.

2. Jede Primzahl von der Form $4n + 1$ ist die Summe zweier Quadrate.

Sey $4n + 1 = \gamma$; so ist

$$x^{\gamma-1} - 1 = x^{4n} - 1 = (x^{2n} - 1)(x^{2n} + 1).$$

Da nun $x^{2n} + 1$ in $x^{\gamma-1} - 1$ aufgeht; so giebt es im- er 2n Werthe von x zwischen $-\frac{1}{2}\gamma$ und $+\frac{1}{2}\gamma$, welche ie Congruenz

$$x^{2n} + 1 \equiv 0 \text{ (Mod. } \gamma)$$

uflösen (III. 8.), oder für welche $x^{2n} + 1$ durch $\gamma = 4n + 1$ theilbar wird. Es ist aber $x^{2n} + 1 = (x^n)^2 + 1^2$, ie Summe zweier Quadrate, oder von der Form $t^2 + u^2$. lso ist auch jeder Theiler von $x^{2n} + 1$, d. i. auch die rimzahl $4n + 1$, von der Form $x^2 + y^2$ (1.), oder die Summe zweier Quadrate.

So ist z. B. $13 = 4.3 + 1 = 9 + 4$, $29 = 7.4 + 1 = 25 + 4$, $37 = 4.9 + 1 = 36 + 1$, $73 = 18.4 + 1 = 64 + 9$.

Da $8n + 1 = 4.2n + 1$, $8n + 5 = 4.(2n + 1) + 1$ t; so ist auch jede Primzahl von der Form $8n + 1$ oder n + 5 die Summe zweier Quadrate.

Diesen Satz hat Fermat gefunden, s. Primzahl (13.).

3. Jede Primzahl von der Form $8n + 1$ hat zu glei- er Zeit die Formen

$$x^2 + y^2, x^2 + 2y^2, x^2 - 2y^2.$$

Sey $8n + 1 = \gamma$. Aus dem so eben Bewiesenen

Digitized by Google

wissen wir schon, daß $8n+1$ immer von der Form x^2+y^2 ist (2.). Nun ist

$$x^{\gamma-1}-1=x^{8n}-1=(x^{4n}-1)(x^{4n}+1),$$

d. i. $x^{\gamma-1}-1$ durch $x^{4n}+1$ theilbar. Folglich giebt es zwischen $-\frac{1}{2}\gamma$ und $+\frac{1}{2}\gamma$ nach (III. 8.) $4n$ Werthe von x, für welche $x^{4n}+1$ durch γ theilbar wird. Aber

$$x^{4n}+1=(x^{2n}-1)^2+2.(x^n)^2,$$

wo x^n und $x^{2n}-1$ relative Primzahlen sind, weil ein gemeinschaftlicher Theiler derselben offenbar auch in x^{2n}, folglich auch in 1 aufgehen müßte, und demnach nur die Einheit selbst seyn könnte. Also ist $x^{4n}+1$ unter der Form t^2+cu^2, für $c=2$, enthalten, und der Factor $\gamma=8n+1$ demnach von der Form

$$px^2+2qxy+ry^2,$$

wo $q<\sqrt{\frac{2}{3}}$, d. i., weil q eine ganze Zahl ist, $q=0$, $pr=q^2+c$, $pr=2$ (V. 7.); also immer entweder $p=1$, $r=2$, oder $p=2$, $r=1$, und folglich $8n+1$ immer von der Form x^2+2y^2. Es ist aber auch

$$x^{4n}+1=(x^{2n}+1)^2-2(x^n)^2,$$

wo auf ähnliche Art wie vorher erhellet, daß x^n und $x^{2n}+1$ relative Primzahlen sind, also $x^{4n}+1$ auch unter der Form t^2-cu^2, für $c=2$, enthalten ist. Folglich $q<\sqrt{\frac{2}{3}}$, d. i. $q=0$, $pr=2$ (V. 7.). Folglich ist entweder $p=1$, $r=2$, oder $p=2$, $r=1$. Da nun alle Divisoren der Formel t^2-cu^2 von der Form

$$px^2+2qxy-ry^2$$

sind; so ist auch $8n+1$ von dieser Form, oder, wenn man für p, q, r ihre Werthe setzt, von der Form x^2-2y^2 oder $2x^2-y^2$. Diese beiden Formen reduciren sich aber auf eine, da immer

$$2x^2-y^2=(2x-y)^2-2(x-y)^2,$$

folglich eine Zahl von der zweiten Form immer auch von der ersten Form ist.

Es ist z. B. $73=8^2+3^2=1^2+2.6^2=9^2-2.2^2=2.7^2-5^2$, $17=1^2+4^2=3^2+2.2^2=5^2-2.2^2=2.3^2-1^2$, $41=4^2+5^2=3^2+2.4^2=7^2-2.2^2=2.5^2-3^2$.

Digitized by Google

4. Jede Primzahl von der Form $8n + 3$ ist von der Form $x^2 + 2y^2$.

Sey wieder $8n + 3 = \gamma$; also

$$x^{\gamma-1} - 1 = x^{8n+2} - 1 = (x^{4n+1} - 1)(x^{4n+1} + 1),$$

Setzt man nun $x = 2$; so wird,

$$2^{\gamma-1} - 1 = |2.(2^{2n})^2 - 1||2^{4n+1} + 1|.$$

Da nun $2^{\gamma-1} - 1$ immer durch γ theilbar ist (III, 1.); so muß entweder $2.(2^{2n})^2 - 1$, oder $2^{4n+1} - 1$ durch γ theilbar seyn (I. 3.). Fände das Erste statt, so müßte natürlich auch $1 - 2.(2^{2n})^2$ durch γ theilbar seyn, und γ müßte folglich ganz wie in (3.) von der Form $x^2 - 2y^2$ oder $2x^2 - y^2$, oder, weil diese beiden Formen nur eine bilden (3.), überhaupt z. B. von der Form $x^2 - 2y^2$ seyn. Daß dies aber nicht möglich ist, läßt sich so zeigen. Wäre nämlich $\gamma = 8n + 3 = x^2 - 2y^2$; so ist, da $2y^2$ gerade, aber $8n + 3$ ungerade ist, auch x^2 ungerade. Sey daher $x = 2z + 1$; so ist

$$x^2 = 4z^2 + 4z + 1 = 4z(z+1) + 1$$
$$= 8.\frac{z(z+1)}{2} + 1 = 8\nu + 1,$$

wenn wir $\frac{z(z+1)}{2}$, welches offenbar eine ganze Zahl ist, $= \nu$ setzen. Jedes ungerade Quadrat ist also von der Form $8\nu + 1$, jedes gerade von der Form 4ν. Also ist auch y^2 entweder von der Form $4\nu'$ oder $8\nu' + 1$. Im ersten Falle ist

$$x^2 - 2y^2 = 8\nu + 1 - 8\nu'$$
$$= 8(\nu - \nu') + 1;$$

im andern dagegen

$$x^2 - 2y^2 = 8\nu + 1 - 2(8\nu' + 1)$$
$$= 8(\nu - 2\nu' - 1) + 7;$$

in keinem Falle also von der Form $8n + 3$. Also kann auch $8n + 3$ nicht von der Form $x^2 - 2y^2$, also auch nicht von der Form $2x^2 - y^2$ (3.), und demnach auch $2.(2^{2n})^2 - 1$ nicht durch γ theilbar seyn. Also ist $2^{4n+1} + 1 = 1 + 2.(2^{2n})^2$ durch $\nu = 8n + 3$ theilbar, woraus ganz wie in (3.) folgt, daß jede Primzahl von der Form $8n + 3$ von der Form $x^2 + 2y^2$ ist.

Z. B. $11 = 3^2 + 2.1^2$, $19 = 1^2 + 2.3^2$.

Digitized by Google

5. Jede Primzahl von der Form $8n+7$ ist von der Form x^2-2y^2.

Sey $\gamma = 8n+7$; so ist

$$2^{\gamma-1}-1 = 2^{8n+6}-1 = (2^{4n+3}-1)(2^{4n+3}+1),$$

immer durch γ theilbar (III. 1.). Da nun

$$2^{4n+3}+1 = 1^2+2.(2^{2n+1})^2$$

ist; so würde γ, wenn $2^{4n+3}+1$ durch γ theilbar wäre, ganz auf ähnliche Art wie in (3.) bei einem ähnlichen Fall von der Form x^2+2y^2 seyn. Da aber $2y^2$ gerade und $8n+7$ ungerade ist; so ist auch x^2 ungerade, folglich von der Form $8\nu+1$ (4.). Also entweder

$$x^2+2y^2 = 8\nu+1+8\nu' = 8(\nu+\nu')+1,$$

oder

$$x^2+2y^2 = 8\nu+1+2(8\nu'+1) = 8(\nu+2\nu')+3;$$

folglich in keinem Fall von der Form $8n+7$. Demnach kann γ in $2^{4n+3}+1$ nicht aufgehen, und muß also in $2^{4n+3}-1$ oder $1-2^{4n+3} = 1-2.(2^{2n+1})^2$ aufgehen. Hieraus folgt ganz wie in (3.), daß jede Primzahl von der Form $8n+7$ von der Form x^2-2y^2 oder $2x^2-y^2$ ist, welche zwei Formen sich aber auf die eine x^2-2y^2 reduciren (3.). Z. B. $23 = 5^2-2.1^2 = 2.4^2-3^2$, $47 = 7^2-2.1^2 = 2.6^2-5^2$.

6. Es sind also

1) die Primzahlen von den Formen $8n+1$, $8n+5$ ausschließlich von der Form x^2+y^2;

2) die Primzahlen von den Formen $8n+1$, $8n+3$ ausschließlich von der Form x^2+2y^2; und

3) die Primzahlen von den Formen $8n+1$, $8n+7$ ausschließlich von der Form x^2-2y^2.

Die Primzahlen von der Form $8n+1$ vereinigen alle drei Formen in sich.

Die Erfindung aller dieser Sätze verdanken wir Fermat, worüber der Art. Primzahl (13. 14. 16.) zu vergleichen. Beweise haben aber zuerst Euler (s. a. a. O.) und Lagrange (Mém. de Berlin. 1774.) gegeben.

7. Sey a eine Primzahl von der Form $4n+1$, und

Digitized by Google

irgend eine ungerade Zahl, aber Divisor der Formel $x^2 + au^2$, oder, was Dasselbe ist (V. 3.), der Formel $x^2 + a$; so ist immer $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}$, wenn A von der Form $4n+1$, dagegen $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}$, wenn A von der Form $4n+3$ ist.

Seyen α, β irgend zwei Primzahlen, die erste von der Form $4n+1$, die andern von der Form $4n+3$, aber beide Divisoren von $x^2 + a$; so ist also

$$x^2 \equiv -a \pmod{\alpha}, \quad x^2 \equiv -a \pmod{\beta}.$$

Folglich, da α, β in der Primzahl a natürlich nicht aufgehen, nach (III. 9.)

$$(-a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad (-a)^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\beta}.$$

Da aber $\frac{\alpha-1}{2}$ gerade, $\frac{\beta-1}{2}$ ungerade ist; so ergiebt sich hieraus leicht

$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\beta}.$$

Folglich, weil weder a, α noch a, β beide von der Form $4n+3$ sind, nach dem Satze von der Reciprocität (IV. 1.)

$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad \alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a};$$

$$a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\beta}, \quad \beta^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}.$$

Sey nun A in seine Primfactoren zerlegt, so daß

$$A = \alpha\alpha'\alpha'' \ldots \beta\beta'\beta'' \ldots,$$

wo α, α', α'', ... lauter Primzahlen von der Form $4n+1$; β, β', β'', ... lauter Primzahlen von der Form $4n+3$ bezeichnen. Ist nun A von der Form $4n+1$, so ist die Anzahl der Primfactoren der letztern Gattung immer gerade. Wäre diese Anzahl nämlich ungerade, z. B. $= 2m+1$; so wäre der von den durch 4 nicht theilbaren Theilen der einzelnen Primfactoren herührende Theil von A offenbar

$$\equiv 3^{2m+1} = (4-1)^{2m+1} = 4e + \frac{2m+1}{1}.4 - 1$$
$$= 4(e+2m) + 3,$$

Digitized by Google

wenn e eine ganze Zahl bezeichnet, und man sich nur di Potenz des Binomiums 4 — 1 nach dem binomischen Lehr satze entwickelt denkt. Also wäre A offenbar von de Form 4n + 3, da es doch von der Form 4n + 1 seyn sol Ist dagegen A von der Form 4n + 3; so ist die Anzahl de durch β bezeichneten Primfactoren ungerade, weil, wen sie $= 2m$ wäre, der oben bezeichnete Theil des Pro ducts aller Primfactoren offenbar

$$= 3^{2m} = (4-1)^{2m} = 4e - \frac{2m}{1}.4 + 1$$
$$= 4(e-2m) + 1;$$

und daher A selbst von der Form 4n + 1 seyn würde. Die vorausgesetzt, haben wir nun nach dem Obigen

$$\alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}, \quad \beta^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. a)};$$
$$\alpha'^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}, \quad \beta'^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. a)};$$
$$\alpha''^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}, \quad \beta''^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. a)};$$
&c. &c. &c. &c.

Also, wenn man multiplicirt, nach (II. 6.)

$$\alpha^{\frac{a-1}{2}}.\alpha'^{\frac{a-1}{2}}.\alpha''^{\frac{a-1}{2}} \ldots \beta^{\frac{a-1}{2}}.\beta'^{\frac{a-1}{2}}.\beta''^{\frac{a-1}{2}} \ldots$$
$$\equiv (-1).(-1).(-1).(-1) \ldots \text{ (Mod. a)}$$

d. i.

$$A^{\frac{a-1}{2}} \equiv (-1).(-1).(-1).(-1) \ldots \text{ (Mod. a)}.$$

Ist nun A von der Form 4n + 1; so ist die Anzahl der Factoren des Products auf der rechten Seite gerade, und folglich in diesem Falle

$$A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)};$$

ist aber A von der Form 4n + 3; so ist die Anzahl dieser Factoren ungerade, und folglich

$$A^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. a)};$$

w. z. b. w.

Digitized by Google

8. Wenn a eine Primzahl von der Form $4n+3$, und irgend ein ungerader Divisor der Formel t^2+au^2 oder x^2+a ist; so ist immer $A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}$.

Seyen wieder α, β zwei Primzahlen, respective von der Form $4n+1$ und $4n+3$, beide Divisoren von t^2+a; so ist, wie vorher,

$$(-a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad (-a)^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\beta};$$
$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\beta}.$$

Da aber hier a, α nicht beide von der Form $4n+3$, dagegen a, β beide von der Form $4n+3$ sind, so ist nach dem Satze von der Reciprocität

$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad \alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a};$$
$$a^{\frac{\beta-1}{2}} \equiv -1 \pmod{\beta}, \quad \beta^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}.$$

Sey nun wieder

$$A = \alpha\alpha'\alpha'' \ldots\ldots \beta\beta'\beta'' \ldots\ldots,$$

wo aber, weil A nach der Voraussetzung ungerade ist, kein Primfactor $= 2$ ist, welches wegen der Anwendung des Satzes von der Reciprocität nothwendig ist (IV. 1.); so ist

$$A^{\frac{a-1}{2}} = \alpha^{\frac{a-1}{2}} \cdot \alpha'^{\frac{a-1}{2}} \cdot \alpha''^{\frac{a-1}{2}} \ldots \beta^{\frac{a-1}{2}} \cdot \beta'^{\frac{a-1}{2}} \cdot \beta''^{\frac{a-1}{2}} \ldots\ldots$$
$$\equiv 1 \pmod{a} \text{ (II. 6.)}.$$

9. Sey jetzt a eine Primzahl von der Form $4n+1$, und α, α', α'', α''' seyen Primzahlen respective von der Form $8n+1$, $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$, alle aber Divisoren von t^2+2au^2 oder x^2+2a; so ist nach (III. 9.)

$$(-2a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha}, \quad (-2a)^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha'},$$
$$(-2a)^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha''}, \quad (-2a)^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv 1 \pmod{\alpha'''};$$

oder, weil die Exponenten der Potenzen nach der Ordnung gerade, ungerade, gerade, ungerade sind,

Digitized by Google

$$(2a)^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha), \quad (2a)^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \alpha'),$$
$$(2a)^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha''), \quad (2a)^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \alpha''').$$

Aber (IV. 12.)

$$2^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha), \quad 2^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \alpha'),$$
$$2^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \alpha''), \quad 2^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha''').$$

Folglich offenbar

$$a^{\frac{\alpha-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha), \quad a^{\frac{\alpha'-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } \alpha'),$$
$$a^{\frac{\alpha''-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \alpha'), \quad a^{\frac{\alpha'''-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } \alpha''');$$

wovon man sich mittelst (II. 6.) und der vorigen Congruenzen leicht durch einen indirecten Schluß überzeugt.

Folglich nach dem Satze von der Reciprocität

$$\alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } a), \quad \alpha'^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. } a),$$
$$\alpha''^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } a), \quad \alpha'''^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \text{ (Mod. } a).$$

Ist nun A irgend eine Zahl von den Formen $8n+1$, $8n+3$, dagegen B eine Zahl von den Formen $8n+5$, $8n+7$, beide aber Divisoren von $t^2 + 2au^2$ oder $x^2 + 2a$; so ist, wenn A in seine Primfactoren zerlegt wird, die Anzahl der Primfactoren von den Formen $8n+5$, $8n+7$ gerade, bei B dagegen die Anzahl der Primfactoren von diesen Formen ungerade, wovon man sich leicht auf folgende Art überzeugt.

Jede Potenz der 3 ist entweder von der Form $8n+1$ oder von der Form $8n+3$, welches offenbar von den ersten Potenzen der 3 gilt, da $3 = 8.0+3$, $9 = 8.1+1$, $27 = 8.3+3$, $81 = 8.10+1$ ist. Dieses Gesetz gelte nun überhaupt für 3^k, so daß $3^k = 8n+1 = 8n'+3$ ist; so ist $3^{k+1} = 24n+3 = 24n'+9 =$

Digitized by Google

$3n+3 = 8.(3n+1)+1$. Folglich das Gesetz allgemein.

Jede Potenz der 5 ist entweder von der Form $8n+1$ oder $8n+5$, wie z. B. $5 = 8.0+5$, $25 = 8.3+1$, $25 = 8.15+5$, $625 = 8.78+1$. Sey $5^k = n+1 = 8n'+5$; so ist $5^{k+1} = 40n+5 = 8n'+25 = 8.5n+5 = 8.(5n'+3)+1$, und das Gesetz also allgemein. Eben so überzeugt man sich leicht, daß jede Potenz der 7 entweder von der Form $n+1$, oder von der Form $8n+7$ ist. Zugleich erhellet auch, daß die ungeraden Potenzen von 3, 5, 7, respective von der Form $8n+3$, $8n+5$, $8n+7$, die geraden dagegen von der Form $8n+1$ sind.

Wäre nun die Anzahl der in A enthaltenen Primfactoren von den Formen $8n+5$, $8n+7$ ungerade; so wäre, wegen des Vorigen, das Product dieser Factoren offenbar entweder von der Form $8n+5$ oder $8n+7$. Das Product der Primfactoren von den Formen $8n+1$, $8n+3$ ist entweder von der Form $8n+1$ oder $8n+3$. Also das Product aller Primfactoren von A, d. i. A, entweder von den Formen $8n+5$, $8n+7$, oder $8n+15 = 8n'+7$, $8n+21 = 8n'+5$, also nicht von der Form $8n+1$ oder $8n+3$, von welchen Formen A doch nur seyn soll. Also ist die Anzahl der Primfactoren von den Formen $8n+5$, $8n+7$ gerade, und demnach, wegen obiger Congruenzen nach (II. 6.)

$$A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \text{ (Mod. a)}.$$

Wäre in B die Anzahl der Primfactoren von den Formen $8n+5$, $8n+7$ gerade, so wäre das Product dieser Primfactoren entweder von der Form $8n+1$, oder von der Form $8n+35 = 8n'+3$. Das Product der Primfactoren von der Form $8n+1$, $8n+3$ hat dieselben Formen. Folglich ist offenbar auch das Product aller Primfactoren entweder von der Form $8n+1$ oder $8n+3$, da doch B nur von den Formen $8n+5$ oder $8n+7$ seyn soll. Also ist die Anzahl der Primfactoren von den Formen $8n+5$,

Digitized by Google

$8n+7$ in diesem Falle ungerade, und demnach wegen obiger Congruenzen nach (II. 6.)

$$B^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}.$$

10. Alles Vorhergehende bleibe unverändert, a aber sey eine Primzahl von der Form $4n+3$; so folgt nun aus den ersten Congruenzen in (9.) nach dem Satze von der Reciprocität

$$a^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}, \quad a'^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a},$$
$$a''^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}, \quad a'''^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}.$$

Sey nun A von den Formen $8n+1$, $8n+7$, B von den Formen $8n+3$, $8n+5$; so ist in Bezug auf A die Anzahl der Primfactoren von der Form $8n+3$, $8n+5$, gerade, in Bezug auf B dagegen ungerade, wovon man sich leicht auf ähnliche Art wie vorher überzeugt. Also in diesem Falle wieder

$$A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}, \quad B^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}.$$

11. Aus (9.) und (10.) ergiebt sich nun folgender Lehrsatz:

Ist a eine Primzahl von der Form $4n+1$ und A ein Divisor der Formel t^2+2au^2 von der Form $8n+1$, $8n+3$, B dagegen ein Divisor dieser Formel von der Form $8n+5$, $8n+7$; so ist

$$A^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}, \quad B^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a};$$

und dieselben Congruenzen finden statt, wenn a eine Primzahl von der Form $4n+3$, die Divisoren A, B der Formel t^2+2au^2 dagegen von den Formen $8n+1$, $8n+7$, und $8n+3$, $8n+5$ sind.

Digitized by Google

II. Ueber die Auflösung der Congruenen $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1 \pmod{a}$, $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1 \pmod{a}$, wenn a eine ungerade Primzahl ist.

1. In Bezug auf die erste Congruenz kann man für jedes y^2 setzen, wenn a nicht darin aufgeht, indem unter dieser Voraussetzung nach dem Fermat'schen Satze (III. 1.) $x^{\frac{a-1}{2}} = y^{a-1} \equiv 1$ ist. Also sind

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$$

Werthe von x. Ist nun überhaupt $y^2 = ap + r$, wo $< a$, ein Glied dieser Reihe; so erhellet, wenn e überhaupt die ganze Zahl bezeichnet, mittelst des binomischen Lehrsatzes leicht, daß $x^{\frac{a-1}{2}} = (ap + r)^{\frac{a-1}{2}} = ae + r^{\frac{a-1}{2}}$, also $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv r^{\frac{a-1}{2}}$ ist; aber $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$; also auch $r^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$. Bezeichnen wir nun den bei der Division von y^2 durch a bleibenden Rest überhaupt durch ϱy^2; so haben wir folgende $\frac{a-1}{2}$ Wurzeln unserer Congruenz:

$$\varrho 1, \varrho 4, \varrho 9, \varrho 16, \varrho 25, \ldots \varrho\left(\frac{a-1}{2}\right)^2,$$

deren jede $< a$ und positiv ist. Auch überzeugt man sich leicht, daß alle diese Wurzeln ungleich sind. Wäre nämlich, wenn y^2 und z^2 irgend zwei Glieder der erstern Reihe bezeichnen,

$$y^2 = ap + r, \quad z^2 = aq + r,$$

so daß nämlich die bei der Division von y^2 und z^2 durch a bleibenden Reste einander gleich wären; so wäre

$$y^2 - z^2 = a(p - q) = (y - z)(y + z),$$

und folglich dieses Product, also auch, da a eine Primzahl ist, entweder $y - z$, oder $y + z$ durch a theilbar (I. 3.), welches nicht möglich ist, da $y < \frac{1}{2}a$, $z < \frac{1}{2}a$, also immer $y - z$ sowohl, als auch $y + z < a$ ist. Die übrigen $\frac{a-1}{2}$ Wurzeln sind also alle positiven Wurzeln unserer Congruenz, die $< a$ sind (II. 20.).

Digitized by Google

Wollte man nur ungerade Werthe von x haben, behalte man in obiger Reihe die ungeraden Werthe b und addire zu den geraden a; so erhält man $\frac{a-1}{2}$ ungera Wurzeln unserer Congruenz, deren jede offenbar nic $> 2a-1$ ist, da die ursprünglichen Wurzeln alle $< a$ si Ist überhaupt α eine Wurzel unserer Congruenz; so auch $az+\alpha$ für jedes z eine Wurzel, da

$$(az+\alpha)^{\frac{a-1}{2}} = a^{\frac{a-1}{2}}z + \alpha^{\frac{a-1}{2}},$$

$$(az+\alpha)^{\frac{a-1}{2}} \equiv \alpha^{\frac{a-1}{2}}; \text{ aber } \alpha^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1;$$

also auch $(az+\alpha)^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$. Ist α eine ungerade W zel, so ist auch überhaupt $2az+\alpha$ eine ungerade Wurz

Sey z. B. $a = 13$, $\frac{a-1}{2} = 6$; so erhält man leic

Quadrate: 1, 4, 9, 16, 25, 36;
Reste: 1, 4, 9, 3, 12, 10;
Ungerade Wurzeln: 1, 17, 9, 3, 25, 23.

Also die Wurzeln überhaupt:

$$x = 13z + \{1, 4, 9, 3, 12, 10;$$

die ungeraden Wurzeln:

$$x = 26z + \{1, 17, 9, 3, 25, 23.$$

2. Alle Zahlen, welche $< a$ sind, und die Congru $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$ nicht auflösen, lösen die Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv$ auf. Ist nämlich a eine Primzahl, welche in x nicht a geht; so ist immer entweder $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$, oder $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv$ (III. 9. 11.). Da nun a in keiner Zahl, welche $< a$ aufgeht; so erhellet die Richtigkeit obiger Behaupt

Da die Anzahl der Auflösungen der Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv$ welche $< a$ sind, $= \frac{a-1}{2}$ ist (1.); so ist auch die A zahl der Auflösungen der Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$, welc $< a$ sind, $= a-1-\frac{a-1}{2} = \frac{a-1}{2}$.

Digitized by Google

Eben so leicht erhellet auch, daß jede ungerade Zahl, welche $< 2a$ ist, ausgenommen a, und die Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$ nicht auflöset, eine Wurzel der Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$ ist. a geht nämlich in keiner der Zahlen von 1 bis $2a-1$ auf, ausgenommen in a; denn, ginge a in $2a-k$, wo $k < 2a$ und nicht $= o$ ist, auf, so wäre $\frac{2a-k}{a} = e$, $2a = ea + k$; also, weil $k < 2a$ und nicht $= o$ ist, e weder $= o$, noch $= 2$ oder > 2; also $e = 1$, $2a = a + k$, $a = k$, so daß also a nun in $2a - a = a$ aufgeht, wie schon oben erwähnt. Da nun für jede Primzahl a, welche in x nicht aufgeht, immer entweder $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$, oder $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$ ist; so ist jede Zahl in der Reihe der ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, ... $2a-1$, welche die Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$ nicht auflöset, eine Auflösung der Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$, ausgenommen a, welches weder die eine, noch die andere Congruenz auflöset, da a in $a^{\frac{a-1}{2}}$ aufgeht, und folglich offenbar weder in $a^{\frac{a-1}{2}} - 1$, noch in $a^{\frac{a-1}{2}} + 1$ aufgehen kann. Die Anzahl der Glieder der Reihe 1, 3, 5, 7, ... $2a-1$ ist, wegen des Ausfalls von a, $= a - 1$; die Anzahl der ungeraden Auflösungen von $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv 1$, von 1 bis $2a-1$, $= \frac{a-1}{2}$ (1.); also die Anzahl der ungeraden Auflösungen von $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$, von 1 bis $2a-1$, $= a - 1 - \frac{a-1}{2} = \frac{a-1}{2}$.

Für $a = 13$ ist demnach nach (1.) überhaupt in Bezug auf die Congruenz $x^{\frac{a-1}{2}} \equiv -1$:

$$x = 13z + \{2, 5, 6, 7, 8, 11$$

und für die ungeraden Auflösungen:

Google

$$x = 26z + \{5, 7, 11, 15, 19, 21,$$

da 13 ausfällt.

So ist z. B. $5^{\frac{13-1}{2}} = 5^6 = 15625$, $5^6 + 1 = 15626 = 13.1202$.

3. Wenn a, a′ zwei ungleiche Primzahlen sind; so kann den Congruenzen

$$x^{\frac{a-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (Mod. a)}, \quad x^{\frac{a'-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (Mod. a')};$$

ohne daß die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen, immer zu gleicher Zeit in ungeraden Zahlen genügt werden.

Soll jeder der vorhergehenden Congruenzen einzeln in ungeraden Zahlen genügt werden; so ist nach dem Vorigen

$$x = 2az + \alpha \text{ und } x = 2a'z' + \alpha'$$

zu setzen. Da nun beiden Congruenzen zugleich genügt werden soll, so setze man

$$2az + \alpha = 2a'z' + \alpha', \quad az - a'z' = \frac{\alpha' - \alpha}{2}.$$

Da α, α' nach dem Vorigen ungerade Zahlen sind, so ist $\frac{\alpha' - \alpha}{2}$ eine ganze Zahl, und die gefundene unbestimmte Gleichung des ersten Grades kann also, weil auch a und a′ relative Primzahlen sind, in ganzen Zahlen aufgelöset werden. Dadurch erhält man, für $\frac{\alpha' - \alpha}{2} = \gamma$:

$$z = a'z'' \pm a'_0\gamma, \quad z' = az'' \pm a_0\gamma.$$

Also, um beiden Congruenzen zugleich zu genügen,

$$\begin{aligned} x &= 2a(a'z'' \pm a'_0\gamma) + \alpha \\ &= 2a'(az'' \pm a_0\gamma) + \alpha' \\ &= 2aa'z'' + \alpha \pm 2aa'_0\gamma \\ &= 2aa'z'' + \alpha' \pm 2a'a_0\gamma \end{aligned}$$

wo $\alpha \pm 2aa'_0\gamma = \alpha' \pm 2a'a_0\gamma$ eine ungerade Zahl und der Coefficient von $z'' = 2aa'$ ist.

Kommt nun noch eine dritte Congruenz

$$x^{\frac{a''-1}{2}} \equiv \pm 1 \text{ (Mod. a'')}$$

hinzu; so erhellet leicht, daß, weil aa′ und a″ relative

Digitized by Google

Primzahlen sind, auf ähnliche Art allen drei Congruenzen in ungeraden Zahlen genügt werden kann. Die Ausdehnung dieser Schlußart auf noch mehrere Congruenzen ist leicht.

VIII. Einige merkwürdige Sätze von den Potenzen.

1. Die unbestimmte Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

läßt sich immer in ganzen Zahlen auflösen; d. h. man kann immer zwei Quadrate finden, deren Summe wieder ein vollkommenes Quadrat ist. Man braucht nämlich bloß zu setzen:

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2;$$

weil, wie leicht erhellet, immer

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = p^2 + q^2$$

ist. Drei Zahlen, welche den obigen unbestimmten Gleichung genügen, bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Eine schöne Reihe von Aufgaben über solche Dreiecke enthält Diophant's sechstes Buch.

2. Man kann aber auch umgekehrt zeigen, daß jede drei Zahlen, welche der Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

genügen, von den Formen

$$p^2 - q^2,\ 2pq,\ p^2 + q^2$$

seyn müssen.

Zunächst ist klar, daß man immer annehmen kann, daß x, y, z kein gemeinschaftliches Maaß haben, weil ein solches offenbar immer durch Division weggeschafft werden könnte. Eben so leicht überzeugt man sich aber auch, daß je zwei der Zahlen x, y, z kein gemeinschaftliches Maaß haben können. Ginge nämlich z. B. die Primzal Θ in x und y auf, so müßte, wegen obiger Gleichung, Θ auch in z^2, folglich (I. 3.) auch in z aufgehen, so daß also Θ ein Maaß von x, y, z wäre, gegen das Obige. Also können x, y nicht beide gerade seyn. Es können aber auch

Digitized by Google

x, y nicht beide ungerade seyn. Wäre nämlich $x = 2n + 1$, $y = 2m + 1$, so wäre

$$x^2 + y^2 = 4n^2 + 4m^2 + 4n + 4m + 2 = z^2,$$

also z^2 durch 2, aber nicht durch 4 theilbar, welches ungereimt ist, da 2, welches in z^2 aufgeht, als Primzahl auch in z aufgehen muß (I. 3.), so daß also, wenn 2 in z^2 aufgeht, nothwendig auch 4 darin aufgehen muß. Demnach ist immer eine der Zahlen x, y, gerade, die andere ungerade. Sey nun x gerade, also y ungerade. Aus der Gleichung folgt

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{z}{x}\right)^2.$$

Man setze

$$\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x} + P,$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2P\frac{y}{x} + P^2,$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1 - P^2}{2P}.$$

Setzen wir nun allgemeiner

$$P = \frac{q}{p},$$

wo offenbar immer angenommen werden kann, daß p, q relative Primzahlen sind; so wird

$$\frac{y}{x} = \frac{p^2 - q^2}{2pq}.$$

$p^2 - q^2$ und $2pq$ sind relative Primzahlen. Ginge nämlich die Primzahl Θ, welche wir zuerst > 2 annehmen wollen, in $p^2 - q^2$ und in $2pq$ auf; so müßte Θ, da es in $2pq$ aufgeht, und > 2 ist, entweder in p, oder in q aufgehen (I. 3.). Ginge es nun z. B. in p, also auch in p^2 auf, so müßte es, da es in $p^2 - q^2$ aufgeht, auch in q^2, folglich, als Primzahl, auch in q aufgehen (I. 3.), so daß also, gegen die Voraussetzung, p und q nicht relative Primzahlen wären. Ginge ferner 2 in $p^2 - q^2$ und $2pq$ auf, so müßten p, q, da sie nicht beide gerade seyn können, beide ungerade seyn, so daß also auch pq eine ungerade Zahl, und folglich, zugleich nach dem Vorhergehenden, offenbar der Bruch

Digitized by Google

$$\frac{(p^2-q^2):2}{pq},$$

wie der ihm gleiche Bruch $\frac{y}{x}$, auf seine kleinste Benennung gebracht wäre. Also wäre

$$y = \frac{p^2-q^2}{2}, \quad x = pq,$$

. x eine ungerade Zahl, gegen die Voraussetzung. Demnach haben p^2-q^2 und $2pq$ nie ein gemeinschaftliches Maß, und der Bruch

$$\frac{p^2-q^2}{2pq}$$

also, so wie der ihm gleiche Bruch $\frac{y}{x}$, auf die kleinste Benennung gebracht, woraus unmittelbar folgt:

$$y = p^2 - q^2, \quad x = 2pq.$$

$$z^2 = x^2 + y^2 = (2pq)^2 + (p^2-q^2)^2$$
$$= p^4 + 2p^2q^2 + q^4 = (p^2+q^2)^2,$$
$$z = p^2 + q^2.$$

olglich sind x, y, z immer von der angegebenen Form, . z. b. w.

Es ist z. B.

$3^2 + 4^2 = 5^2$, $3 = 2^2 - 1$, $4 = 2.2.1$, $5 = 2^2 + 1$;
$5^2 + 12^2 = 13^2$, $5 = 3^2 - 2^2$, $12 = 2.3.2$, $13 = 3^2 + 2^2$.

Der Beweis des obigen Satzes hätte sich auch aus Sätzen er unbestimmten Analytik kürzer ableiten lassen; ich hielt s aber für besser, ihn hier unabhängig von diesen Sätzen u beweisen, weil er für das Folgende von besonderer Wichtigkeit ist.

3. Die Summe zweier Biquadrate kann nie ein Quadrat seyn, wenn nicht eins derselben gleich Null ist. Sey

$$a^4 + b^4 = c^2,$$

o man offenbar annehmen kann, daß a, b relative Primahlen sind; so ist (2.)

$$a^2 = p^2 - q^2, \quad b^2 = 2pq, \quad c = p^2 + q^2,$$

nd p, q sind relative Primzahlen, weil, wenn p, q den emeinschaftlichen Primfactor Θ hätten, auch a^2, b^2, olglich auch a, b (I. 3.), diesen gemeinschaftlichen Prim-

Digitized by Google

factor haben, also nicht relative Primzahlen seyn würde. Auch können p, q nicht beide ungerade seyn, weil sonst offenbar a^2, b^2, also auch a, b, beide gerade, folglich wieder nicht relative Primzahlen wären. Endlich kann auch nicht p gerade, q ungerade seyn, weil sonst $p^2 - q^2$ von der Form $4k - 1 = 4(k-1) + 3 = 4n + 3$ seyn würde, diese Form aber offenbar nicht dem vollkommenen Quadrate $p^2 - q^2 = a^2$ zukommen kann. Also ist p ungerade, q gerade. Setzt man nun

$$p = \gamma^2, \quad q = 2\lambda^2,$$

wo γ, λ, wie p, q, relative Primzahlen sind; so folgt aus der Gleichung $p^2 - q^2 = a^2$ sogleich:

$$\gamma^4 - 4\lambda^4 = a^2, \quad a^2 + (2\lambda^2)^2 = (\gamma^2)^2.$$

Also (2.)

$$a = f^2 - g^2, \quad 2\lambda^2 = 2fg, \quad \gamma^2 = f^2 + g^2,$$

wo wieder f, g, wie γ, λ, relative Primzahlen sind. Daher kann wegen der Gleichung $\lambda^2 = fg$ offenbar bloß

$$f = \alpha^2, \quad g = \beta^2$$

seyn, wo α, β ebenfalls relative Primzahlen sind. Also wegen der Gleichung $f^2 + g^2 = \gamma^2$:

$$\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2.$$

Da nun

$$a = f^2 - g^2 = \alpha^4 - \beta^4,$$

$$b = \sqrt{2pq} = 2\gamma\lambda = 2\sqrt{fg(f^2+g^2)} = 2\alpha\beta\sqrt{\alpha^4 + \beta^4};$$

so erhellet zunächst, daß weder α, noch β, $= 0$ seyn kann, weil sonst, gegen die Voraussetzung, auch $b = 0$ seyn würde. Ferner ist

$$f^2 + g^2 = \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2 = \sqrt{a^2 + 4\lambda^4} = \sqrt{a^2 + q^2};$$

$$p^2 = a^2 + q^2, \quad 4p^2q^2 = b^4, \quad 4(a^2 + q^2)q^2 = b^4;$$

$$q^4 + a^2q^2 = \tfrac{1}{4}b^4.$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt

$$q^2 = -\tfrac{1}{2}a^2 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 + b^4},$$

wo, da q^2 immer positiv ist, bloß das obere Zeichen gelten kann. Also

$$\alpha^4 + \beta^4 = \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 + b^4})}.$$

Da nun offenbar

$$a^2 < \sqrt{a^4 + b^4}, \quad \tfrac{1}{2}a^2 < \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 + b^4}$$

Digitized by Google

ſt, weil b nicht = o; ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{a^4 + b^4} < \sqrt{a^4 + b^4},$$

$$\alpha^4 + \beta^4 < \gamma\sqrt{a^4 + b^4},$$

$$\alpha^4 + \beta^4 < \sqrt[4]{a^4 + b^4}, \gamma^2 < \sqrt[4]{c^2},$$

$$\gamma^2 < \sqrt{c}, \gamma < \sqrt[4]{c}.$$

Da weder α, noch β, = o; ſo iſt auch γ nicht = o.

Aus dieſem allgemeinen Beweiſe ergiebt ſich nun, daß, wenn $a^4 + b^4 = c^2$ ſeyn könnte, wo a, b relative Primzahlen ſind, und keine = o iſt, aus dieſer Gleichung eine Reihe Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 &= c^2, \\ a'^4 + b'^4 &= c'^2, \\ a''^4 + b''^4 &= c''^2, \\ a'''^4 + b'''^4 &= c'''^2, \\ &\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

abgeleitet werden könnte, in denen alle durch a, b bezeichneten Größen relative Primzahlen ſind, und keine = o iſt, die Größen

$$c, c', c'', c''', c'''', \ldots\ldots$$

aber eine abnehmende Reihe bilden würden, ohne daß man jemals auf ein Glied = o käme, ſo daß alſo dieſe Reihe in's Unendliche abnehmen würde, welches ungereimt iſt, da c eine endliche ganze Zahl bezeichnet. Alſo kann die Gleichung $a^4 + b^4 = c^2$ nicht Statt finden, und unſer Satz iſt folglich bewieſen.

Aus dieſem Satze folgt unmittelbar, daß auch die Summe zweier Biquadrate nie ein Biquadrat ſeyn kann.

Könnte $a^4 - b^4 = c^4$ ſeyn, ſo wäre $a^4 = b^4 + c^4$, welches nach dem ſo eben Bewieſenen nicht möglich iſt. Alſo kann auch die Differenz zweier Biquadrate nie ein Biquadrat ſeyn. Uebrigens kann auch auf eine der vorigen ähnliche Art gezeigt werden, daß die Differenz zweier Biquadrate nie ein Quadrat ſeyn kann (Legendre a. a. O. p. 343. Élémens d'Algèbre par L. Euler. Nouv. éd. Paris. 1807. II. p. 179.).

4. Wir haben den vorigen Satz vorzüglich der Beweisart wegen hier mitgetheilt, da dieſelbe bei Unterſu-

Digitized by Google

chungen in der Zahlenlehre oft mit Vortheil angewandt werden kann. Fermat behauptet in seinen Noten zu Diophant (p. 61.), daß überhaupt die unbestimmte Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

unmöglich, d. h. in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist, wenn n den zweiten Grad übersteigt. Der Beweis dieses Satzes ist jedoch noch nicht gegeben. Für $n = 3$ hat ihn Euler bewiesen (a. a. O. p. 262. ff. Legendre a. a. O. p. 345.). Die Methode des Beweises ist dieselbe wie vorher; jedoch erfordert derselbe mehrere Entwickelungen, die sich hier der Beschränktheit des Raumes wegen, nicht mittheilen ließen. Für $n = 5$ hat Lejeune Dirichlet mehrere Sätze bewiesen in der Abhandlung: Mém. sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées du cinquième degré (Crelles Journal. III. 4. S. 354.).

Auch folgende von Fermat gefundene, u. A. von Legendre (a. a. O. p. 340. sqq.) bewiesene, Sätze gehören hierher:

Die Formel $x^4 + 2y^4$ kann nie ein vollkommenes Quadrat werden, außer wenn $y = 0$ ist.

Keine Trigonalzahl, die Einheit ausgenommen, kann ein Biquadrat seyn.

Weder die Summe, noch die Differenz zweier Cubikzahlen kann das Doppelte eines vollkommenen Cubus seyn.

Keine Trigonalzahl, die Einheit ausgenommen, kann ein vollkommener Cubus seyn.

Noch mehrere Sätze dieser Art s. m. a. a. O.

IX. Einige Sätze von den arithmetischen Progressionen.

1. Sey

$$A - C,\ 2A - C,\ 3A - C,\ \ldots\ nA - C$$

irgend eine arithmetische Progression, und Θ eine Zahl, welche mit A relative Primzahl ist. Man soll die Anzahl der durch Θ theilbaren Gliedern obiger Progression finden.

Digitized by Google

Da A und Θ relative Primzahlen sind, so läßt sich die
stimmte Gleichung des ersten Grades

$$Ax - \Theta y = -C$$

x in ganzen Zahlen auflösen (Unbestimmte Analysis.),
sich folglich auch immer ein Werth von x finden,
welchen $Ax + C$ durch Θ theilbar wird. Ist dieser
$= \alpha$, so erhellet leicht, daß überhaupt $\alpha \pm \Theta z$
olcher Werth von x seyn wird, da offenbar dann auch
$\pm \Theta z) + C = A\alpha + C \pm \Theta z$ durch Θ theilbar ist.
lich kann man für x auch immer einen positiven Werth
n, welcher zugleich $< \Theta$ ist. Ist nämlich α positiv,
$\alpha = \Theta z + \varrho$, wo $\varrho < \Theta$, und folglich ein Werth
$x = \Theta z + \varrho - \Theta z = \varrho$. Ist aber α negativ, so
$-\alpha = \Theta z - \varrho$, wo wieder $\varrho < \Theta$; dann ist
$= -\Theta z + \varrho + \Theta z = \varrho$ wieder ein Werth von der
hten Beschaffenheit. Auch erhellet leicht, daß es im-
nur einen Werth von x geben kann, welcher positiv
$< \Theta$ ist. Wären ϱ und ϱ' zwei solche Werthe, und
$> \varrho$; so wäre

$$A\varrho + C = \Theta y, \quad A\varrho' + C = \Theta y';$$

$A(\varrho - \varrho') = \Theta(y - y')$, und folglich $A(\varrho - \varrho')$,
, weil A und Θ relative Primzahlen sind, auch $\varrho - \varrho'$
h Θ theilbar (I. 7.), welches unmöglich ist, da $\varrho - \varrho'$
nbar $< \Theta$ ist.

Bezeichnen wir nun den Werth von x, welcher positiv
$< \Theta$ ist, für welchen aber $Ax + C$ durch Θ theilbar
durch Θ^0, so sind die durch Θ theilbaren Glieder obi-
arithmetischen Progression:

$A(\Theta - \Theta^0) - C$, $A(2\Theta - \Theta^0) - C$, $A(3\Theta - \Theta^0) - C$, ...

ß alle diese Glieder durch Θ theilbar sind, fällt in die
gen. Daß es aber außer diesen Gliedern auch keine an-
n durch Θ theilbaren Glieder geben kann, läßt sich so
en. Seyen

$$A\{\mu\Theta - \Theta^0\} - C, \quad A\{(\mu+1)\Theta - \Theta^0\} - C$$

rhaupt zwei auf einander folgende Glieder vorstehender
ihe. Läge zwischen denselben noch irgend ein Glied
$- C$, so daß

Digitized by Google

$$x > \mu\Theta - \Theta^0, \; x < (\mu+1)\,\Theta - \Theta^0,$$

welches durch Θ theilbar wäre; so wären auch die D
renzen

$$A|x - \mu\Theta + \Theta^0|, \; A|(\mu+1)\Theta - \Theta^0 - x|,$$

und folglich, weil A und Θ relative Primzahlen sind,

$$x - \mu\Theta + \Theta^0, \; (\mu+1)\Theta - x - \Theta^0,$$

also auch $x + \Theta^0$ durch Θ theilbar. Es ist aber

$$x + \Theta^0 > \mu\Theta, \; x + \Theta^0 < (\mu+1)\,\Theta;$$
$$\frac{x+\Theta^0}{\Theta} > \mu, \; \frac{x+\Theta^0}{\Theta} < \mu + 1;$$

also offenbar $\frac{x+\Theta^0}{\Theta} = \mu +$ einem ächten Bruche,
folglich keine ganze Zahl. Also kann es außer den ob
keine durch Θ theilbaren Glieder gehen. Wegen der
dem ersten Gliede $A(\Theta - \Theta^0) - C$ vorhergeh
Glieder bemerke man nur, daß auch $- A\Theta^0 - C$
dem Obigen durch Θ theilbar ist, und folglich wi
geschlossen werden kann.

Die Reihe der durch Θ theilbaren Glieder ist so weit
zusetzen, als die Größen $\Theta - \Theta^0$, $2\Theta - \Theta^0$, $3\Theta - \Theta^0$,
die Gliederzahl n der gegebenen Reihe nicht übers
Sey nun

$$k\Theta - \Theta^0 \leqq n, \; (k+1)\,\Theta - \Theta^0 > n;$$

so ist

$$k \leqq \frac{n+\Theta^0}{\Theta}, \; k+1 > \frac{n+\Theta^0}{\Theta};$$

und folglich, wenn die größte in $\frac{n+\Theta^0}{\Theta}$ enthaltene g
Zahl durch $G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right)$ bezeichnet wird, k, oder die
zahl der durch Θ theilbaren Glieder unserer arithmeti
Progression, $= G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right)$.

2. Ist also jetzt Θ eine in A nicht aufgehende Pr
zahl, so ist die Anzahl der durch Θ nicht theilbaren Gli
obiger arithmethischen Progression, wenn wir dies
durch y bezeichnen, $=$

$$y = n - G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right).$$

Digitized by Google

3. Sind Θ, λ zwei in A nicht aufgehende Primzahl so ist die Anzahl der durch Θ theilbaren Glieder $G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right)$, die Anzahl der durch λ theilbaren Glieder $G\left(\frac{n+\lambda^0}{\Theta}\right)$, und weil auch A und $\Theta\lambda$ relative Primzahl sind, die Anzahl durch $\Theta\lambda$ theilbaren Glieder $G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right)$ (1).

Folglich offenbar die Anzahl der durch Θ und λ nicht lbaren Glieder =

$$= n - G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right)$$

$$= n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right),$$

das Summenzeichen bloß die Bedeutung hat, daß für sowohl Θ, als auch λ zu setzen ist. Daß $G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right)$ dirt werden muß, fällt sogleich in die Augen, wenn n überlegt, daß mit $G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right)$ und $G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right)$ die ch $\Theta\lambda$ theilbaren Glieder offenbar einmal zu viel abgezen sind.

4. Seyen ferner Θ, λ, μ drei nicht in A aufgehende rimzahlen; so ist die Anzahl der durch Θ, λ nicht theilren Glieder, nach dem Vorhergehenden

$$= n - G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right).$$

ie Anzahl der durch μ theilbaren Glieder, in denen aber gleich weder Θ, noch λ, aufgeht, ist

$$= G\left(\frac{n+\mu^0}{\mu}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\mu)^0}{\Theta\mu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu)^0}{\Theta\lambda\mu}\right) - G\left(\frac{n+(\lambda\mu)^0}{\lambda\mu}\right)$$

von man sich leicht auf ähnliche Art, wie vorher, überugt. Diese Anzahl muß, um die Anzahl der durch Θ,

Digitized by Google

λ, μ nicht theilbaren Glieder zu finden, von dem vo
Resultat noch abgezogen werden, wodurch man

$$y = n - G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu}{\Theta\lambda\mu}\right.$$
$$- G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\mu)^0}{\Theta\mu}\right)$$
$$= G\left(\frac{n+\mu^0}{\mu}\right) + G\left(\frac{n+(\lambda\mu)^0}{\lambda\mu}\right)$$
$$= n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu}{\Theta\lambda\mu}\right.$$

erhält. Die Bedeutung der Summenzeichen wird sich erhellen.

5. Kommt noch eine vierte in A nicht aufgehende Primzahl ν hinzu; so ist ganz auf dieselbe Weise die Anzahl der durch ν theilbaren Glieder, in denen aber Θ, λ, μ nicht aufgehen,

$$= G\left(\frac{n+\nu^0}{\nu}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\nu)^0}{\Theta\nu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\nu)^0}{\Theta\lambda\nu}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\mu\nu}{\Theta\lambda\mu}\right.$$
$$- G\left(\frac{n+(\lambda\nu)^0}{\lambda\nu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\mu\nu)^0}{\Theta\mu\nu}\right)$$
$$- G\left(\frac{n+(\mu\nu)^0}{\mu\nu}\right) + G\left(\frac{n+(\lambda\mu\nu)^0}{\lambda\mu\nu}\right).$$

Diese Größe muß, um die Anzahl der durch Θ, λ, μ, ν nicht theilbaren Glieder zu finden, von dem vorigen Resultat noch abgezogen werden, wodurch man für die gesuchte Größe erhält:

$$y = n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right)$$
$$- \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu)^0}{\Theta\lambda\mu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu\nu)^0}{\Theta\lambda\mu\nu}\right).$$

6. Also kann man allgemein setzen:

$$y = n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu)^0}{\Theta\lambda\mu}\right) +$$

die Reihe so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht.

Für die Reihe der ungeraden Zahlen ist $A = 2$, $C =$ und, wenn k eine nicht durch 2 theilbare Zahl ist, k^0 Werth von k^0, für welchen $2k^0 + 1$ durch k theilbar wird, $= \frac{1}{2}(k-1)$, welcher Werth positiv und $< k$ ist

Digitized by Google

Dadurch erhält man für die ersten 100 Glieder der Reihe der ungeraden Zahlen die Anzahl der durch 3, 5, 7, 11 nicht theilbaren Zahlen =

$$\begin{aligned} y = 100 &- G\left(\tfrac{101}{3}\right) + G\left(\tfrac{107}{15}\right) - G\left(\tfrac{152}{105}\right) + G\left(\tfrac{677}{1155}\right) \\ &- G\left(\tfrac{102}{5}\right) + G\left(\tfrac{110}{21}\right) - G\left(\tfrac{182}{165}\right) \\ &- G\left(\tfrac{103}{7}\right) + G\left(\tfrac{116}{33}\right) - G\left(\tfrac{215}{231}\right) \\ &- G\left(\tfrac{105}{11}\right) + G\left(\tfrac{117}{35}\right) - G\left(\tfrac{292}{385}\right) \\ &+ G\left(\tfrac{127}{55}\right) \\ &+ G\left(\tfrac{138}{77}\right) \end{aligned}$$

wo aber

$$G\left(\tfrac{215}{231}\right) = G\left(\tfrac{292}{385}\right) = G\left(\tfrac{677}{1155}\right) = 0$$

ist, und diese Glieder daher weggelassen werden können. Nach gehöriger Reduction findet man $y = 43$.

7. Ist n durch das Product aller gegebenen Primzahlen theilbar, so ist, da $\Theta^0 < \Theta$, für eine Primzahl offenbar $G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) = \frac{n}{\Theta}$, und folglich

$$y = n - \frac{n}{\Theta} = n\left(1 - \frac{1}{\Theta}\right).$$

Eben so erhält man, wenn zwei Primzahlen gegeben sind, in diesem Falle

$$\begin{aligned} y = n &- \frac{n}{\Theta} + \frac{n}{\Theta\lambda} = n\left(1 - \frac{1}{\Theta}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \\ &- \frac{n}{\lambda}. \end{aligned}$$

Sind drei Primzahlen gegeben, so wird

$$\begin{aligned} y = n &- \frac{n}{\Theta} + \frac{n}{\Theta\lambda} - \frac{n}{\Theta\lambda\mu} \\ &- \frac{n}{\lambda} + \frac{n}{\Theta\mu} \\ &- \frac{n}{\mu} + \frac{n}{\lambda\mu} \\ = n &\left(1 - \frac{1}{\Theta}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right). \end{aligned}$$

Digitized by Google

λ, μ nicht theilbaren Glieder zu finden, von dem vor
Resultat noch abgezogen werden, wodurch man

$$y = n - G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu}{\Theta\lambda\mu}\right.$$
$$- G\left(\frac{n+\lambda^0}{\lambda}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\mu)^0}{\Theta\mu}\right)$$
$$= G\left(\frac{n+\mu^0}{\mu}\right) + G\left(\frac{n+(\lambda\mu)^0}{\lambda\mu}\right)$$
$$= n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu}{\Theta\lambda\mu}\right.$$

erhält. Die Bedeutung der Summenzeichen wird l
erhellen.

5. Kommt noch eine vierte in A nicht aufgehende Pr
zahl ν hinzu; so ist ganz auf dieselbe Weise die Anzahl
durch ν theilbaren Glieder, in denen aber Θ, λ, μ n
aufgehen,

$$= G\left(\frac{n+\nu^0}{\nu}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\nu)^0}{\Theta\nu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\nu)^0}{\Theta\lambda\nu}\right) - G\left(\frac{n+(\Theta\mu\nu}{\Theta\mu\nu}\right.$$
$$- G\left(\frac{n+(\lambda\nu)^0}{\lambda\nu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\mu\nu)^0}{\Theta\mu\nu}\right)$$
$$- G\left(\frac{n+(\mu\nu)^0}{\mu\nu}\right) + G\left(\frac{n+(\lambda\mu\nu)^0}{\lambda\mu\nu}\right).$$

Diese Größe muß, um die Anzahl der durch Θ, λ, μ,
nicht theilbaren Glieder zu finden, von dem vorigen R
sultat noch abgezogen werden, wodurch man für die gesu
Größe erhält:

$$y = n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right)$$
$$- \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu)^0}{\Theta\lambda\mu}\right) + G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu\nu)^0}{\Theta\lambda\mu\nu}\right).$$

6. Also kann man allgemein setzen:

$$y = n - \int G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) + \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda)^0}{\Theta\lambda}\right) - \int G\left(\frac{n+(\Theta\lambda\mu)^0}{\Theta\lambda\mu}\right) + \cdots$$

die Reihe so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht.

Für die Reihe der ungeraden Zahlen ist $A = 2$, $C =$
und, wenn k eine nicht durch 2 theilbare Zahl ist,
Werth von k^0, für welchen $2k^0 + 1$ durch k theilb
wird, $= \frac{1}{2}(k-1)$, welcher Werth positiv und $< k$ i

Digitized by Google

Dadurch erhält man für die ersten 100 Glieder der Reihe der ungeraden Zahlen die Anzahl der durch 3, 5, 7, 11 nicht theilbaren Zahlen =

$$\begin{aligned} y = 100 &- G\left(\tfrac{101}{3}\right) + G\left(\tfrac{107}{15}\right) - G\left(\tfrac{152}{105}\right) + G\left(\tfrac{677}{1155}\right) \\ &- G\left(\tfrac{102}{5}\right) + G\left(\tfrac{110}{21}\right) - G\left(\tfrac{182}{165}\right) \\ &- G\left(\tfrac{103}{7}\right) + G\left(\tfrac{116}{33}\right) - G\left(\tfrac{215}{231}\right) \\ &- G\left(\tfrac{105}{11}\right) + G\left(\tfrac{117}{35}\right) - G\left(\tfrac{292}{385}\right) \\ &+ G\left(\tfrac{127}{55}\right) \\ &+ G\left(\tfrac{138}{77}\right) . \end{aligned}$$

wo aber

$$G\left(\tfrac{215}{231}\right) = G\left(\tfrac{292}{385}\right) = G\left(\tfrac{677}{1155}\right) = 0$$

ist, und diese Glieder daher weggelassen werden können. Nach gehöriger Reduction findet man $y = 43$.

7. Ist n durch das Product aller gegebenen Primzahlen theilbar, so ist, da $\Theta^0 < \Theta$, für eine Primzahl offenbar $G\left(\frac{n+\Theta^0}{\Theta}\right) = \frac{n}{\Theta}$, und folglich

$$y = n - \frac{n}{\Theta} = n\left(1 - \frac{1}{\Theta}\right) .$$

Eben so erhält man, wenn zwei Primzahlen gegeben sind, in diesem Falle

$$\begin{aligned} y = n &- \frac{n}{\Theta} + \frac{n}{\Theta\lambda} = n\left(1 - \frac{1}{\Theta}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \\ &- \frac{n}{\lambda} . \end{aligned}$$

Sind drei Primzahlen gegeben, so wird

$$\begin{aligned} y = n &- \frac{n}{\Theta} + \frac{n}{\Theta\lambda} - \frac{n}{\Theta\lambda\mu} \\ &- \frac{n}{\lambda} + \frac{n}{\Theta\mu} \\ &- \frac{n}{\mu} + \frac{n}{\lambda\mu} \\ = n &\left(1 - \frac{1}{\Theta}\right)\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) . \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Allgemeinheit des hier schon leicht zu bemerkenden Gesetzes wird aus den obigen combinatorischen Formeln mittelst des bekannten Productensatzes aus der combinatorischen Analysis oder der Theorie der Gleichungen (Gleichung. 144. 165.) leicht geschlossen.

Ist z. B. $A = 6$, $C = 4$, und 2, 8, 14, 20, 26, 32, 38, 44, 50, 56, 62, 68, 74, 80, 86 die gegebenen Progression, also $n = 15$, $\Theta = 5$; so ist $y = 15.(1 - \frac{1}{5}) = 12$, so wie denn in der That auch die Anzahl der durch 5 nicht theilbaren Glieder obiger Reihe $= 12$ ist.

Mehrere Anwendungen der hier entwickelten merkwürdigen Formeln, namentlich auch auf die Bestimmung der Anzahl der Primzahlen innerhalb gewisser Gränzen giebt Legendre (Théorie des nombres. IV. Part. §. XI.).

X. Fermat's Satz von der Zerlegung jeder Zahl in vier Quadratzahlen.

1. Wenn n eine Primzahl ist, welche in A nicht aufgeht, so lassen sich x und y immer in ganzen Zahlen so bestimmen, daß, A und B mögen positive oder negative ganze Zahlen seyn,

$$x^2 - Ay^2 - B$$

durch B theilbar ist.

Ginge n in B auf, so brauchte man bloß für x und y Vielfache von n zu setzen, wodurch das Verlangte augenblicklich erreicht würde. Man kann also im Folgenden annehmen, daß n in B nicht aufgeht.

Für $n = 1$ ist der Satz klar. Für $n = 2$ nehme man für y irgend eine gerade Zahl. Dann geht $n = 2$ in Ay^2 auf. Nimmt man nun für x eine ungerade Zahl, so ist x^2 ungerade; aber, da n in B nicht aufgehen soll, auch B ungerade; also $x^2 - B$ gerade. Folglich geht $n = 2$ in

$$x^2 - Ay^2 - B$$

auf.

Digitized by Google

Für $n > 2$ sey $n = 2a + 1$, und man unterscheide nn folgende Fälle.

1) Giebt es für y einen Werth, für welchen $Ay^2 + B$ urch n theilbar wird, so nehme man für x ein Vielfaches on n; dann ist offenbar

$$x^2 - Ay^2 - B$$

urch n theilbar.

2) Giebt es aber keinen Werth von y, für welchen in $Ay^2 + B$ aufgeht, so setze man

$$Ay^2 + B = V, \quad x^2 - Ay^2 - B = x^2 - V.$$

un ist, wie leicht erhellet

$$\frac{x^{2a} - V^a}{x^2 - V} = P =$$

$$x^{2a-2} + x^{2a-4}V + \ldots + x^2V^{a-2} + V^{a-1};$$

o P eine ganze Zahl. Folglich

$$x^{2a} - V^a = (x^2 - V)P = x^{2a} - 1 - (V^a - 1),$$
$$(x^2 - V)PQ = (x^{2a} - 1)Q - (V^{2a} - 1),$$

r $Q = V^a + 1$. Nach der Fermat'schen Satze (III. 1.) eht die Primzahl $n = 2a + 1$ in $x^{2a} - 1$ auf, wenn e in x nicht aufgeht, und eben so in $V^{2a} - 1$, wenn sie V nicht aufgeht. Also geht, wenn n weder in x, noch in aufgeht, n in $(x^2 - V)PQ$, folglich, wenn es weder P, noch in Q aufgeht, in

$$x^2 - V = x^2 - Ay^2 - B$$

uf (I. 5.). Hieraus erhellet nun, daß x und y, wenn in

$$x^2 - Ay^2 - B$$

ufgehen soll, so bestimmt werden müssen, daß folgenden edingungen genügt wird:

n darf in V nicht aufgehen;
n darf in Q nicht aufgehen;
n darf in P nicht aufgehen;
n darf in x nicht aufgehen.

s fragt sich nun, ob die gleichzeitige Erfüllung dieser Bengungen immer möglich ist.

Die erste ist als erfüllt anzusehen, da es nach der

Digitized by Google

Voraussetzung keinen Werth von y giebt, für welche $Ay^2 + B = V$ durch n theilbar ist.

In Bezug auf die zweite Bedingung ist nach dem Binomialtheorem

$$Q = V^a + 1 = (Ay^2 + B)^a + 1$$
$$= A^a y^{2a} + \frac{a}{1} A^{a-1} B y^{2a-2} + \frac{a(a-1)}{1.2} A^{a-2} B^2 y^{2a-4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a(a-1)}{1.2} A^2 B^{a-2} y^4 + \frac{a}{1} A B^{a-1} y^2 + B^a + 1.$$

Ist nun

α) $B^a + 1$ durch n nicht theilbar, so setze man $y = 0$ und die zweite Bedingung wird erfüllt seyn.

β) Ist aber $B^a + 1$ durch n theilbar, so sey

$$Q' = A^a y^{2a-2} + \frac{a}{1} A^{a-1} B y^{2a-4} + \frac{a(a-1)}{1.2} A^{a-2} B^2 y^{2a-6} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{a(a-1)}{1.2} A^2 B^{a-2} y^2 + \frac{a}{1} A B^{a-1}.$$

Dies ist ein Polynom vom Grade $2a - 2$, welches nach der Voraussetzung n in A, also auch in A^a (I. 4.) nicht aufgeht. Folglich giebt es (II. 20.) höchstens $2a - 2$ Werthe von y zwischen $-\frac{1}{2}n$ und $+\frac{1}{2}n$, für welche Q durch n theilbar wird. Da aber $\frac{1}{2}n = a + \frac{1}{2}$ ist; so giebt es zwischen den angegebenen Gränzen, die Null mitgerechnet, überhaupt $2a + 1 = n$ Werthe, welche für y gesetzt werden können. Aber nur höchstens für $2a - 2$ Werthe wird Q' durch n theilbar. Also giebt es zwischen den angegebenen Gränzen immer gewiß wenigstens $2a + 1 - (2a - 2) = 3$ Werthe von y, für welche Q' nicht durch n theilbar wird. Alle diese Werthe sind $< n$ und es geht also, wenn einer derselben dem y beigelegt wird, n in y, also auch in y^2, so wie in $Q'y^2$ nicht auf (I. 4.). Nach der Voraussetzung ging aber n in $B^a + 1$ auf; also nicht in $Q'y^2 + B^a + 1 = Q$, wodurch folglich die zweite Bedingung erfüllt ist.

Nachdem nun y, folglich V, auf diese Weise bestimmt ist; so ist in

$$P = x^{2a-2} + x^{2a-4} V + \ldots + x^2 V^{a-2} + V^{a-1}$$

nur x noch unbekannt. Der Coefficient des höchsten Glie-

Digitized by Google

des dieses Polynoms vom Grade $2a-2$ ist $=1$, und folglich durch $n>2$ nicht theilbar. Also giebt es zwischen $-\frac{1}{2}n$ und $+\frac{1}{2}n$ höchstens $2a-2$ Werthe von x, für welche P durch n theilbar ist (II. 20.); die Anzahl aller Werthe von n zwischen diesen Gränzen, die Null mit gerechnet, ist wie vorher $=2a+1$, so daß es also zwischen diesen Gränzen wenigstens $2a+1-(2a-2)=3$ Werthe von x giebt, für welche P durch n nicht theilbar ist, wodurch ferner die dritte Bedingung erfüllt ist. Mit ihr ist aber auch zugleich die vierte erfüllt, weil die in Rede stehenden 3 Werthe von x alle $<n$ sind, und demnach keiner derselben, wenn man ihn für x setzt, durch n, also auch x nicht durch n theilbar ist.

Also lassen sich x, y immer so bestimmen, daß die obigen vier Bedingungen gleichzeitig erfüllt werden, und man kann folglich x, y immer so bestimmen, daß die in A nicht aufgehende Primzahl n in

$$x^2 - Ay^2 - B$$

aufgeht. Dieser Satz gilt also auch von den speciellern Formeln

$$x^2 + y^2 + 1 \text{ und } x^2 + y^2 - 1,$$

wenn man $A=-1, B=-1$, oder $A=-1, B=1$ setzt.

Der Erfinder dieses merkwürdigen Satzes ist Lagrange (Mém. de Berlin. 1770.). Die zuletzt erwähnten speciellen Fälle hatte schon Euler gefunden (Nov. Comm. Petrop. T. V.). M. s. auch Legendre. a. a. O. p. 182.

2. Das Quadrat jeder viertheiligen Größe $a+b+c+d$ besteht aus den Quadraten der einzelnen Theile, und den doppelten Producten von je zwei Theilen in einander. Denn es ist

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2 + 2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

3. Das Product zweier Summen von vier Quadraten in einander ist wieder eine Summe von vier Quadraten. Denn es ist, wovon man sich durch wirkliche Entwicke-

Digitized by Google

lung der Quadrate der viertheiligen Größen sogleich überzeugt,

$$(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)(p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2)$$
$$= (pp' + qq' + rr' + ss')^2 + (pq' - qp' + rs' - sr')^2$$
$$+ (pr' - qs' - rp' + sq')^2 + (ps' + qr' - rq' - sp')^2 .$$

Multiplicirt man also mehrere Summen von vier Quadraten in einander, so erhält man immer wieder eine Summe von vier Quadraten.

4. Jede Primzahl n kann in vier Quadraten zerlegt werden, und ist also von der Form

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 .$$

Da n eine Primzahl ist, so kann man p und q so bestimmen, daß n in $p^2 + q^2 + 1$ aufgeht (1.). Eben so lassen sich für r und s zwei Werthe finden, so daß n in $r^2 + s^2 - 1$ aufgeht (1.). Also lassen sich p, q, r, s so bestimmen, daß n in

$$(p^2 + q^2 + 1) + (r^2 + s^2 - 1) = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$

aufgeht, so daß man also

$$p^2 + q^2 + r^2 + s^2 = nn' ,$$

wo n' eine ganze Zahl ist, setzen kann. Setzt man aber

$$p - \alpha n , q - \beta n , r - \gamma n , s - \delta n$$

respective für p, q, r, s; so erhält man

$$(p - \alpha n)^2 + (q - \beta n)^2 + (r - \gamma n)^2 + (s - \delta n)^2$$
$$= p^2 + q^2 + r^2 + s^2$$
$$- 2p\alpha n - 2q\beta n - 2r\gamma n - 2s\delta n$$
$$+ \alpha^2 n^2 + \beta^2 n^2 + \gamma^2 n^2 + \delta^2 n^2$$

welches offenbar auch durch n theilbar ist, da $p^2 + q^2 + r^2 + s^2$ es ist. Da αn, βn, γn, δn ganz willkührliche Vielfache von n sind, so kann man offenbar α, β, γ, δ immer so annehmen, daß jede der Größen $p - \alpha n$, $q - \beta n$, $r - \gamma n$, $s - \delta n < \frac{1}{2}n$ ist. Folglich ist die Annahme verstattet, das in der Gleichung

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2 = nn''$$

jede der Größen p, q, r, s $< \frac{1}{2}n$, also jedes der Quadrate p^2, q^2, r^2, $s^2 < \frac{1}{4}n^2$, folglich $nn'' < 4 . \frac{1}{4}n^2$, $nn'' < n^2$, $n'' < n$ ist. Wäre nun $n'' = 1$, so wäre der Satz bewiesen. Ist aber $n'' > 1$, so geht doch n'' in

Digitized by Google

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2$$

auf, da diese Quadratensumme $= nn''$ ist.

Wie vorher schließt man also hieraus ferner, daß

$$p''^2 + q''^2 + r''^2 + s''^2 = n''n'''$$

seyn wird, wo jede der Größen p'', q'', r'', $s'' < \frac{1}{2}n''$, und $n''' < n''$ ist.

Entwickelt man nun das Product

$$nn''.n''n''' = (p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2)(p''^2 + q''^2 + r''^2 + s''^2)$$
$$= (p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2)$$
$$\times |(p' - \alpha' n'')^2 + (q' - \beta' n'')^2 + (r' - \gamma' n'')^2 + (s' - \delta' n'')^2|$$

nach (3.), so findet man, wenn in der Entwickelung nur

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2 = nn''$$

gesetzt wird, daß dieses Product wieder eine Summe von vier Quadraten ist, deren jedes durch n''^2 theilbar ist. Also ist auch nn''' die Summe von vier Quadraten, und folglich

$$p'''^2 + q'''^2 + r'''^2 + s'''^2 = nn'''.$$

Wäre nun $n''' = 1$, so wäre der Satz bewiesen. Wäre aber $n''' > n$, so könnte man, ganz wie vorher wieder eine Zahl $n^{IV} < n'''$ finden, für welche nn^{IV} die Summe von vier Quadraten ist, und der Satz würde bewiesen seyn, wenn $n^{IV} = 1$ wäre. In jedem Falle erhellet aber, daß man nach dem hier gelehrten Verfahren eine Reihe von Producten

$$nn'', nn''', nn^{IV}, nn^{V}, \ldots$$

finden kann, deren jedes eine Summe von vier Quadraten ist, und daß die Factoren

$$n'', n''', n^{IV}, n^{V}, \ldots$$

eine abnehmende Reihe bilden. Da nun aber diese Reihe nicht in's Unendliche fortlaufen kann, welches der Fall seyn würde, wenn man nie auf ein Glied $= 1$ käme, so erhellet, daß man immer endlich einmal auf ein solches Glied kommen muß, also jede Primzahl n die Summe von vier Quadraten ist.

5. Jede Zahl läßt sich in vier Quadrate zerlegen.

Jede Zahl läßt sich in Primfactoren zerlegen (Theiler einer Zahl. 1.). Jeder Primfactor ist die Summe

Digitized by Google

von vier Quadraten (4.), also auch das Product aller (3.), d. i. die gegebene Zahl.

Zu bemerken ist jedoch, daß auch eins oder einige dieser Quadrate = 0 seyn können, und die Zahl folglich entweder selbst ein Quadrat, oder die Summe von zwei, drei oder vier Quadraten ist. Betrachtet man aber Null selbst als ein Quadrat, so läßt sich in dieser Beziehung in der That jede Zahl in vier Quadrate zerlegen. So ist z. B. $10 = 4+4+1+1$, $11 = 9+1+1+0$, $20 = 16+4+0+0$, $25 = 25+0+0+0$.

Den ersten Beweis des hier bewiesenen merkwürdigen Satzes gab Euler in den Nov. Comm. Petrop. T. V, erklärte denselben aber nachher selbst für nicht ganz genügend. Darauf gab Lagrange einen sehr scharfsinnigen Beweis in den Mém. de Berlin. 1770., welcher nachher von Euler noch vereinfacht wurde. Act. Petrop. T. I P. II. 1777. Mit diesem Beweise stimmt der hier mitgetheilte dem Wesentlichen nach überein. Der Erfinder des Satzes ist Fermat, und es ist derselbe eigentlich nur ein besonderer Fall seines allgemeinen Satzes von der Zerlegung jeder Zahl in Polygonalzahlen, worüber der Art. Fermat's Lehrsätze zu vergleichen. Der Satz von der Zerlegung jeder Zahl in drei Triagonalzahlen ist von Legendre (Théorie des nombres. p. 347. p. 188.) bewiesen worden. Der Beweis hängt mit der Theorie der sogenannten reciproken Divisoren der Formel $t^2 + au^2$ unmittelbar zusammen, so daß derselbe, ohne diese ganze Theorie aufzunehmen, hier nicht füglich mitgetheilt werden konnte. Gewiß wird aber Jeder, wer diesen Artikel studirt hat, Legendre's großes Werk im Zusammenhange zu lesen sich gedrungen fühlen, wozu namentlich derselbe eine Vorbereitung seyn soll. Einen andern Beweis hat Gauß gegeben (Disq. arithm. p. 495. 406., welcher aber eben so innig mit dem ganzen Inhalte des scharfsinnigen Werkes verknüpft ist, daß er hier ohne zu große Weitläufigkeit ebenfalls nicht aufgenommen werden konnte. Verbindet man mit dem Studium dieser beiden Werke noch das Studium der von Legendre (Supplément à

Digitized by Google

essai sur la théorie des nombres. Février. 1816.) nd Cauchy (Exercices de Mathematiques par A. L. Cauchy. 10. Livraison. Paris. 1826. p. 265.) gegeenen Beweise des allgemeinen Satzes von Fermat über ie Zerlegung jeder Zahl in Polygonalzahlen; so wird man ch dadurch die vollständigste Kenntniß dieser überaus merkürdigen Folge von Sätzen verschaffen.

XI. Historische Bemerkungen.

Im Vorhergehenden sind bereits die Namen der Geoneter, welche sich vor Andern um die Zahlenlehre verdient emacht haben, und ihre Schriften, so oft genannt worden, daß hier nur noch eine ganz kurze Uebersicht im Zuammenhange nöthig ist.

Die arithmetischen Bücher des Euclides sind als die rste Schrift anzusehen, in welcher Untersuchungen aus er Zahlenlehre vorkommen. Außer vielen andern merkwürdigen Sätzen enthalten sie vorzüglich eine Reihe von Sätzen über die Primzahlen, unter denen das oben in I. ewiesene wichtige Theorem als die Grundlage der ganzen Zahlenlehre anzusehen ist, da fast keine Untersuchung über ie Zahlen desselben entbehren kann. Von dem großen rithmetischen Werke des Diophantus ist in dem Artiel: Unbestimmte Analytik, ausführlich die Rede gewesen, vorauf wir also hier, so wie überhaupt auf die dort mitgeheilte Geschichte der unbestimmten Analytik verweisen. Dieses Werk gehört indeß mehr zur unbestimmten Analytik, ls zur Theorie der Zahlen im eigentlichen Sinne, insofern wir darunter vorzugsweise die Lehre von den Eigenschaften der Zahlen, und zwar immer der ganzen Zahlen, verstehen. Die meisten Entdeckungen verdankt diese Wissenschaft Fermat, Parlamentsrath zu Toulouse. Von dem größten Theile der vielen von ihm entdeckten merkwürdigen Sätze ist in dem Obigen ausführlich die Rede gewesen. Er hat kein eignes Werk über die Zahlenlehre hinterlassen, sondern seine wichtigen Entdeckungen sind bloß als Randbemerkungen in der von seinem Sohne S.

Digitized by Google

Fermat veranstalteten neuen Ausgabe von Bachet Diophant mitgetheilt. Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus. Cum Commentariis C. G. Bacheti V. Cl. et observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosani. Tolosae, 1670, fol. Am meisten ist zu beklagen, daß Fermat alle Sätze ohne Beweise mittheilt, obgleich er ohne Zweifel, wenn er auch gewiß die meisten Sätze nur durch Versuche gefunden hat, im Besitz derselben gewesen ist, wie bei einem so großen Geometer sich schon von selbst versteht, und auch aus der Anmerkung zur 31sten Aufgabe des IV. Buches erhellet. Aus derselben Anmerkung geht auch hervor, daß Fermat allerdings die Absicht hatte, seine Untersuchungen in einem ausführlichen Werke, welches aber nie erschienen ist, bekannt zu machen. Die größten Mathematiker der neuern Zeit haben die Aufsuchung dieser Beweise zu einer besondern Aufgabe ihres Scharfsinns gemacht. An der Spitze ist auch hier wieder Euler. Er und Lagrange haben nicht bloß viele Fermat'sche Sätze mit bündigen Beweisen versehen, sondern auch die Zahlenlehre mit eignen Entdeckungen bereichert. Die hierher gehörenden Abhandlungen sind in den Schriften der gelehrten Gesellschaften zerstreut. Man findet ein ziemlich vollständiges Verzeichniß derselben in Reuss Repertorium Commentationum a Societatibus litter. editorum, T. VII. Gott. 1808, p. 7—13, worauf ich hier der Kürze wegen verweise. Mehreres ist schon oben angeführt worden. Ein besonderes Verdienst um unsere Wissenschaft erwarb sich Legendre, indem er in seinem Essai sur la théorie des nombres. Sec. édit. Paris. 1808. einen vortrefflichen und sehr vollständigen Lehrbegriff der Zahlenlehre lieferte, der auch reich an eigenthümlichen Untersuchungen ist. Die erste Ausgabe erschien Paris. a VI. Und mit wem könnte ich diese Bemerkungen würdiger schließen, als mit unserm tiefdenkenden Gauß. Seine Disquisitiones arithmeticae. Lipsiae. 1801., sind ein Werk des größten Scharfsinns, voll der schönsten Entdeckungen. Die Einführung des Be-

Digitized by Google

iffs und des Zeichens der Congruenz der Zahlen, wo-
rch die Beweise vieler wichtigen Sätze von den Zahlen
hohem Grade vereinfacht werden, der Fundamentalsatz
der Lehre von den quadratischen Resten, welcher zwar
nerlei mit Legendre's Satze von der Reciprocität, aber
n Gauß zuerst auf mehrere ganz verschiedene Arten völ-
z streng und höchst scharfsinnig bewiesen worden ist, die ganze
hre von den quadratischen und den Resten höherer Grade,
ürden allein hinreichend seyn, den Namen ihres Erfin-
rs unsterblich zu machen. Aus den beiden zuletzt genann-
n Werken von Legendre und Gauß werden jetzt alle
fern Kenntnisse der Zahlenlehre auf dem leichtesten und
herrsten Wege geschöpft. Die Namen mehrerer anderer
Mathematiker, welche sich um diesen schönen Theil der
Mathematik verdient gemacht haben, sind schon oben ge-
nnt worden. M. vergl. übrigens auch noch die Artikel
heiler einer Zahl, Theilung, Primzahlen, Fermat's
ehrsätze, Vollkommene Zahl und überhaupt die besonderen
Formen der Zahlen, vorzüglich aber den Artikel Unbestimmte
Analytik.

Zahlensystem. Seyen N und x irgend zwei
anze Zahlen, deren jede hier aber bloß als eine Anzahl
on Einheiten betrachtet wird, ohne Rücksicht auf jeden
ymbolischen Ausdruck dieser Zahlen. Mittelst gewöhnli-
her Division, welche hier durch wiederholte Subtraction
errichtet gedacht werden kann, lassen sich in folgenden
Gleichungen:

$$N = ax + \alpha$$
$$a = bx + \beta$$
$$b = cx + \gamma$$
$$c = dx + \delta$$
u. s. f. u. s. f.

die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ offenbar so bestimmen, daß
ie alle kleiner als x sind. Zugleich erhellet auch, daß
a, b, c, d, ... eine abnehmende Reihe bilden, und man
folglich offenbar immer einmal auf ein Glied dieser Reihe
kommen muß, welches = Null ist, weil alle Glieder die-
ser Reihe positive ganze Zahlen sind, und dieselbe demnach

Digitized by Google

sich nicht in's Unendliche erstrecken kann. Es werden al obige Gleichungen immer folgende Gestalt annehmen:

$$\begin{aligned} N &= ax + \alpha \\ a &= bx + \beta \\ b &= cx + \gamma \\ c &= dx + \delta \\ &\cdots\cdots \\ l &= mx + \mu \\ m &= \nu . \end{aligned}$$

Durch successive Substitution erhält man hieraus augenblicklich:

$$\begin{aligned} N &= ax + \alpha \\ &= bx^2 + \beta x + \alpha \\ &= cx^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha \\ &= dx^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \nu x^p + \mu x^{p-1} + \ldots + \delta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + \alpha \end{aligned}$$

oder auch

$$N = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^{p-1} + \nu x^p$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots \mu, \nu$ alle kleiner als x sind, und offenbar auch ein oder das andere Glied dieser Reihe $= 0$ seyn kann.

Man sieht also, daß alle Zahlen durch Reihen dargestellt werden können, welche nach Potenzen einer gewissen Zahl x fortschreiten, so daß alle Coefficienten dieser Reihen $< x$ sind. Jede solche Anordnung aller Zahlen als Reihen nach den Potenzen einer bestimmten Zahl x, deren Coefficienten alle $< x$ sind, heißt ein Zahlensystem, und x dessen Grundzahl oder Basis.

Will man nun auf diese Weise alle Zahlen symbolisch ausdrücken, so ist klar, daß zur Bezeichnung der Coefficienten dieser Reihen nur so viele einfache Zeichen nöthig sind, als x Einheiten enthält, weil die Anzahl aller ganzen Zahlen, welche $< x$ sind, $= x - 1$ ist, wozu dann noch ein einfaches Symbol für Null kommt. Es ist klar, daß x alle Werthe außer Null und Eins haben kann. Die einfachen Zeichen für die Coefficienten der obigen Reihen heißen Zahlzeichen oder Ziffern. So lange man bei diesen Reihen selbst stehen bleibt, würde in jedem System noch ein einfa-

Digitized by Google

Symbol für die Grundzahl nöthig seyn, welches man vermeidet, wenn die obigen Reihen auf folgende viel fachere Weise, in welcher jetzt alle gebildete Völker überkommen, geschrieben werden.

Jede Zahl

$$N = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots + \mu x^{p-1} + \nu x^p$$

d nämlich auf die Weise symbolisch dargestellt, daß man ß die Coefficienten dieser Reihe, indem man mit α auf rechten Seite anfängt, in ihrer natürlichen Ordnung en einander schreibt, so daß also hiernach

$$N = \nu\mu \ldots \delta\gamma\beta\alpha$$

, wobei man sich aber immer zu erinnern hat, daß, wenn auf die Bestimmung des wahren Werthes der Zahl N kommt, α, β, γ, δ, ... nach der Reihe mit x^0, x^1, x^2, , ... multiplicirt werden müssen.

Die erste, zweite, dritte, vierte Stelle u. s. f. von der hten nach der linken Seite hin nennt man bei dieser Art Zahlen zu schreiben auch die nullte, erste, zweite, dritte rdnung u. s. f., welches sich, wie man sieht, bloß auf Potenzen der Grundzahl bezieht, mit welchen die Zifrn in den genannten Stellen multiplicirt werden müssen, nn der wahre Werth der Zahl N bestimmt werden soll. a nun die Grundzahl x, wenn o, 1 die bekannten Zeien der Null und Eins sind, immer $= o + 1.x$ ist, so klar, daß in jedem Zahlensystem die Grundzahl 10 geschrieben werden muß, und daß folglich, wie schon oben merkt wurde, für die Grundzahl kein einfaches Zeichen thig ist.

Nach dieser Methode kann man also in einem Zahlenstem, dessen Grundzahl x ist, alle Zahlen mit x einfachen eichen schreiben. Das Wesentliche bei derselben ist, wie an leicht sieht, daß jedem einfachen Zahlzeichen ein verschiedener Werth nach seiner Stelle beigelegt wird. Daß e niedrigste Ordnung auf der rechten Seite beginnt, deut auf einen orientalischen Ursprung dieser Methode, warüber mit Mehrerem der Artikel Zahlzeichen zu vergleichen ist.

Alle gebildete Völker legen jetzt die Zahl zehn als Basis

Digitized by Google

ihren Zahlensystemen zum Grunde. Die zehn nöthigen ein
chen Zeichen oder Ziffern sind bekanntlich

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Wollte man zwölf als Basis zum Grunde legen, so wär
noch für die zehn und die eilf einfache Zeichen nöthig.
zwei die Grundzahl, so kann man alle Zahlen bloß mit d
einfachen Zeichen 0, 1 schreiben. Das System, des
Grundzahl zehn ist, heißt bekanntlich das Decadische. Ue
die Dyadik, Dodekadik und die Tetraktys s. m. die bes
dern Artikel. In dem Artikel Variationen gegeb
Dinge (10.) ist eine allgemeine Anleitung zum Schrei
aller Zahlen nach einem willkührlichen Zahlensysteme g
ben. Für die Dyadik und Dodekadik wäre der Ans
wenn in letzterem Systeme zehn und eilf durch ↊ und ↋
zeichnet werden, folgender:

1	1	(1)
10	2	(2)
11	3	(3)
100	4	(4)
101	5	(5)
110	6	(6)
111	7	(7)
1000	8	(8)
1001	9	(9)
1010	↊	(10)
1011	↋	(11)
1100	10	(12)
1101	11	(13)
1110	12	(14)
1111	13	(15)
10000	14	(16)
10001	15	(17)
10010	16	(18)
10011	17	(19)
10100	18	(20)
10101	19	(21)
10110	1↊	(22)
10111	1↋	(23)
11000	20	(24)
11001	21	(25)

Digitized by Google

Jede dekadisch ausgedrückte Zahl kann nach einem eren Systeme sehr leicht mittelst successiver Division mit Grundzahl des Systems ausgedrückt werden, wie folbes Beispiel für die Grundzahl 7 zeigt. Die gegebene adische Zahl sey = 3465.

7)	7)	7)	7)	7)	
3465	495	70	10	1	0
3465	490	70	7	0	
0	5	0	3	1	

an dividirt so lange, bis man auf einen Quotienten = 0 mmt, und schreibt die Reste verkehrt neben einander. e dekadische Zahl 3465 nach dem Zahlensystem, dessen undzahl 7 ist, geschrieben, ist also = 13050.

In der That ist auch diese Zahl

$$= 0 + 5.7 + 0.7^2 + 3.7^3 + 1.7^4$$
$$= 35 + 1029 + 2401 = 3465,$$

raus man zugleich sieht, wie man umgekehrt jede nach gend einem andern Zahlensysteme geschriebene Zahl dekasch ausdrücken kann. Der Grund der obigen Verfahngsarten wird leicht in die Augen stellen.

Das Aussprechen der Zahlen gehört nicht in die Majematik, sondern in die Grammatik, da die Regeln nicht allen Sprachen einerlei sind. Eine dreiziffrige dekadische ahl kann Jeder aussprechen. Vielziffrige Zahlen theile an, von der rechten nach der linken Hand zu gehend, in lassen zu drei Ziffern, und scheide die Klassen abwechselnd rch Commata und die römischen Ziffern I, II, III, IV, . s. f. von einander, jede einzelne Klasse spreche man für ich aus, jedes Komma durch Tausend, und I, II, III, IV, ... ach der Reihe durch Million, Billion, Trillion, Quadrilion, u. s. f. Z. B.

47'''639,426''785,043'760,285;

47 Trillionen 639 Tausend, 426 Billionen 785 Tausend, 43 Millionen 760 Tausend, 285. Am besten setzt man ie römischen Ziffern o b e n zur Rechten der einzelnen Klassen, wie dieses Beispiel zeigt. Diese Regeln sind die einfachten für die deutsche Sprache.

Digitized by Google

Verschiedene Sätze, welche sonst bloß in Bezug auf das dekadische Zahlensystem bewiesen werden, lassen sich leicht auf jedes Zahlensystem erweitern. Z. B. folgende Kennzeichen der Theilbarkeit der willkührlichen Zahl

$$N = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \dots$$

durch die beliebige Zahl n. Sey

$$x = qn + \varrho,\ x^2 = q'n + \varrho';\ x^3 = q''n + \varrho'',\ \dots;$$

so ist

$$N = (\beta q + \gamma q' + \delta q'' + \varepsilon q''' + \dots)n + \alpha + \beta\varrho + \gamma\varrho' + \delta\varrho'' + \varepsilon\varrho''' + \dots$$

Also ist N durch n theilbar, wenn

$$\alpha + \beta\varrho + \gamma\varrho' + \delta\varrho'' + \varepsilon\varrho''' + \dots$$

durch n theilbar ist. Man setze also unter die einzelnen Ziffern der Zahl N die Reste, welche bei der Division durch x^0, x^1, x^2, x^3, ... durch n bleiben, von der rechten nach der linken Hand hin, multiplicire die übereinanderstehenden Zahlen in einander, und untersuche, ob die Summe dieser Producte durch n theilbar ist. Da

$$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + x + 1)$$

ist; so ist, wenn p eine ganze Zahl bezeichnet,

$$x^m = (x-1)p + 1,$$

und folglich der Rest, welchen die Division x^m durch $x-1$ läßt, für jedes m, $= 1$. Also nach dem Obigen

$$N = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 = \dots = \dots\ \varepsilon\delta\gamma\beta\alpha$$

durch $x-1$ theilbar, wenn die Summe der Ziffern

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \dots$$

durch $x-1$ theilbar ist. Dies stimmt überein mit den bekannten Kennzeichen der Theilbarkeit einer Zahl durch 9 im dekadischen Zahlensysteme (Theiler einer Zahl. 6.)

M. vergl. den Art. Zahlzeichen.

Zahlzeichen, Ziffern (Characteres; numéraux, chiffres; engl. figures) sind in jedem Zahlensysteme schriftliche Charaktere oder Bezeichnungen der Zahlen, welche kleiner als die Grundzahl des Systems sind, die Null mit eingeschlossen, wobei es aber, welches man sogleich hier bemerken, nicht sowohl auf die Gestaltung

Digitized by Google

ſſer Symbole ſelbſt, als vielmehr auf die Methoden an-
mmt, nach welchen mit einigen wenigen einfachen Zahl-
chen alle Zahlen bezeichnet werden. Von der vollkom-
enſten dieſer Methoden, welche jetzt alle gebildete Völ-
r des alten und des neuen Continents befolgen, iſt in dem
rtikel Zahlenſyſtem ein Abriß gegeben worden. Gegen-
ärtiger Artikel iſt beſtimmt, ſo weit die uns zu Gebote
henden Mittel und der beſchränkte Raum es geſtatten,
e Geſchichte dieſer wichtigen Erfindung zu liefern, von wel-
er Laplace in der Exposition du système du monde.
dit. p. 325. mit Recht ſagt: „der Gedanke, alle Quan-
täten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen
gleich einen abſoluten und einen Stellenwerth giebt, iſt
einfach, daß man eben deshalb nicht genugſam erkennt,
elche Bewunderung er verdient. Aber eben dieſe Ein-
chheit und Leichtigkeit, welche die Methode dem Calcul
ſichert, erheben das arithmetiſche Syſtem der Indier zu
em Range der nützlichſten Erfindungen. Wie ſchwer es
ar, eine ſolche Methode aufzufinden, kann man daraus
bnehmen, daß ſie dem Genie des Archimedes und
pollonius von Perga, zweier der größten Geiſter
es Alterthums, entgangen war.“

1. Den Grund, daß faſt alle Völker bis zehn zählen,
at ſchon Ariſtoteles (Probl. Sect. XV. Probl. III.)
n der Geſtalt unſerer Hände und Füße, als fünfäſtiger
Organe gefunden, und Alexander von Humboldt
ührt in dieſer Beziehung in einer trefflichen akademiſchen
Abhandlung über die bei verſchiedenen Völkern
iblichen Syſteme von Zahlenzeichen und über
en Urſprung des Stellenwerthes in den in-
iſchen Zahlen, welche man in Crelles Journal
er reinen und angew. Math. IV. 3. S. 205. findet,
erſchiedene intereſſante Thatſachen an, wovon wir hier
Einiges ausheben. In der Chibcha-Sprache der Muys-
as heißt 10 Fuß (quihieha oder qhieha), weil man
en Fuß nennt, wenn ſchon beide Hände durchgezählt ſind;
11, 12, 13 heißen von den Zahlwörtern ata, bosa, mica
eins, zwei, drei, quihieha ata, quihieha bosa, qui

Digitized by Google

hieha mica, d. i. Fuß ein, Fuß zwei, Fuß drei 20 heißt Fuß zehn oder ein Häuschen (gueta), vielleicht, sagt von Humboldt, weil man nach Maiskörnern zählte, und ein Häufchen Mais an die Maisschnur erinnerte. In einer großen Anzahl von Sprachen heißt 5, 10 eine Hand, zwei Hände. In der Sprache der Yaruros, von denen v. Humboldt volkreiche Missionsdörfer am Apure-Fluß, welcher sich in den Orinocco einmündet, fand, heißt 40 noeni pume von noeni zwei und pume Mensch, d. i. zwei Menschen, weil man den ganzen Menschen nannte, nachdem man an beiden Extremitäten die Finger abgezählt hatte. Im Persischen heißt pendj fünf, von pentscha die Faust, herstammend von dem Sanscrit-Worte pantscha, welches nach Bopp's Bemerkung auf das römische quinque, so wie das indische tschatur auf quatuor zurückführt haben soll.

Aristoteles erwähnt a. a. O. zugleich eines tauischen Volkes, welches nur bis 4 zähle. Dadurch wurde Erhard Weigel veranlaßt, die Regeln der tetraktischen Arithmetik in besondern Schriften zu entwickeln, worüber der Artikel Tetraktik nachzusehen ist. Dies wäre also eine Ausnahme von der Regel, daß alle Völker bis 10 zählen. In dem Bulletin des sciences math. par Férussac. Juin. 1827. p. 345. werden als hierher gehörende Beispiele noch die Grönländer und ein ostiakischer Stamm, welche nur bis 5 zählen (s. Egedes grönländische Grammatik. 1760. und Klaproth Asia polyglotta. 171.) erwähnt, so wie nach der Voyage de F. Pyrard. 2. partie. Paris. 1619. in einem maldivischen Sprachidiom 12 die Basis der Numeration seyn soll.

2. Die Zahlenzeichen der meisten alten Völker, und die Methoden, mit einer geringen Anzahl einfacher Zeichen alle Zahlen zu schreiben, waren höchst unbequem. Meistens bedienten sie sich dazu der Buchstaben ihrer Alphabete. Die Hebräer z. B. bezeichneten die Einer durch die 9 ersten Buchstaben ihres Alphabetes; die Zehner durch die 9 folgenden; 100, 200, 300, 400 wurden durch die

Digitized by Google

r letzten Buchstaben, und 500 bis 900 durch Zusam-
nsetzung von 400 mit 100, 200, 300, 400, 500, so
ß erstere, nach orientalischer Art zu schreiben, voran steht,
zeichnet. Die Tausender werden wie die Einer mit zwei
rüber gesetzten Punkten bezeichnet. Alle übrigen Zahlen
hielt man durch bloße Nebeneinanderstellung dieser Zei-
n, so daß immer die größere Zahl voran steht. M. s.
esenius Lehrgebäude der hebr. Sprache. Leip-
g. S. 15. Im hebräischen Texte des alten Testaments
d die Zahlen mit Worten geschrieben. v. Humboldt
t in der angeführten trefflichen Abhandlung sehr viele
ethoden, die Zahlen mit einer geringen Anzahl einfacher
chen zu schreiben, verglichen, und dieselben, mit Aus-
luß der heutigen Zahlensysteme, in folgende vier Klassen
bracht.

Erste Methode. Durch bloße Nebeneinanderstellung
Juxtaposition) einiger einfachen Zeichen, wie bei Tus-
ern, Römern, Griechen bis zur Myriade, Mexi-
anern und Aegyptern. Wir wählen als Beispiel die
mische Bezeichnungsart.

Einfache Zeichen:

1,	5,	10,	50,	100,	500,	1000
I,	V,	X,	L,	C,	IↃ oder D,	CIↃ oder M.

Ein einzelnes Stück wurde durch eine senkrechte Linie
I) bezeichnet, fünf Stück durch einen spitzigen Winkel
V), funfzig Stück durch einen rechten Winkel (L). Aus
r Verbindung zweier V entstand X, so wie aus der Ver-
ndung zweier übereinander gesetzten L eine Klammer, und
urch deren Abrundung, um des Wortes centum willen,
as C. 500 Stück wurden durch ein Quadrat bezeichnet,
oraus nach und nach IↃ und D entstanden. Aus CIↃ
tstand M, weil dieser Buchstabe der erste des Wortes
ille war (Lateinische Grammatik von Grotefend.
. Aufl. Bnd. II. Frankf. 1820. S. 163.). Gleiche ne-
neinander stehende Zeichen bedeuteten eine Vervielfachung
s einfachen Zeichens, wie z. B. XX (20), XXX (30),
C (200). Stehen zwei ungleiche Zeichen bei einander,

Digitized by Google

so sind zwei Fälle zu unterscheiden. Findet sich das Zeich
welches den kleinern Zahlenwerth hat, zur Linken, so
es in Bezug auf das andere Zeichen subtractiv, wie z.
IV (4), IX (9), XL (40), XC (90). Findet
dagegen das Zeichen, welches den kleinern Zahlenwe
hat, rechts, so ist es in Bezug auf das andere Zeichen
ditiv, wie z. B. XI (11), VI (6), LX (60). N
diesen Gesetzen ist es leicht, alle Zahlen zu bilden. So
deutet z. B. MDCCCXXXIV die Zahl 1834. So
nun auch IↃↃ = 5000, CCIↃↃ = 10000, IↃ
= 50000, CCCIↃↃ = 100000, CCCCIↃↃↃ
1000000. Wie weitläufig diese Bezeichnungsart
fallen muß, wenn die Zahlen auch nur einigermaßen
werden, fällt in die Augen.

Zweite Methode. Vervielfachung und Ver
derung des Werthes durch darüber und darunter
Zeichen.

Ein Beispiel liefern zunächst die griechischen Buch
zahlen in der Reihe der Tausender und der Myriaden.
gendes enthält eine Uebersicht der griechischen Zahlen.

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6 (Βαῦ)	7	8	9

ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90 (Κόππα)

ϱ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900 (Σαμπι)

$\overset{\alpha}{,}$	$\overset{\beta}{,}$	$\overset{\gamma}{,}$	$\overset{\delta}{,}$	$\overset{\varepsilon}{,}$	$\overset{\varsigma}{,}$	$\overset{\zeta}{,}$	$\overset{\eta}{,}$	$\overset{\theta}{,}$
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

$\overset{\alpha}{M}$, $\overset{\beta}{M}$, $\overset{\gamma}{M}$, $\overset{\delta}{M}$, $\overset{\varepsilon}{M}$, u. s. f.
10000, 20000, 30000, 40000, 50000, u. s. f.

10000 bilden eine Myriade, die auch durch $M\upsilon$ bezeich
wird. Nach dieser Bezeichnungsart ist z. B.

$$\overset{\eta\upsilon\xi\beta}{M\zeta\upsilon\lambda\eta} = 84627438.$$

Digitized by Google

Brüche, deren Zähler die Einheit ist, werden bloß den Nenner mit einem Acutus bezeichnet. Z. B. $\gamma' = \frac{1}{3}$, $\delta' = \frac{1}{4}$, $\xi\delta' = \frac{1}{64}$. Sonst werden Zähler und ner in eine Linie geschrieben, der erstere voran, und h die Größe der Schrift unterschieden. M. s. Dénbre Histoire de l'Astronomie ancienne. T. II. p. I. p. 6. Oeuvres d'Archimède par F. Peyrard. is. 1807. Ueber die Arithmetik der Griechen. A. d. z. des Herrn Delambre von J. J. J. Hoffmann. nz. 1817. A. Matthiä ausführl. griech. Gramm. ufl. Lpzg. 1825. I. S. 23. 509.

Vorzüglich wichtig sind die von Silvestre de Sacy nem Manuscripte aus der Bibliothek der alten Abtey Germain du Près entdeckten arabischen Gobar-Zif- Silvestre de Sacy sagt: le gobar a un id rapport avec le chiffre indien, mais il n'a pas Zero (v. Humboldt a. a. O. S. 223.).

In dieser Gobar- oder Staubschrift werden die ner, Hunderter u. s. f. durch beigefügte Punkte an- ben, wie z. B. $3\cdot = 30$, $4\cdot\cdot = 400$, $6\cdot\cdot = 6000$. S. auch in (3.) das Scholion des Mönchs Neophytos.

Dritte Methode. Vervielfachung des Werthes h Coefficienten.

Diophantus und Pappus z. B. schreiben $\beta M\upsilon$ $2 \times 10000 = 20000$, $\alpha M\upsilon\beta$ bedeutet einmal $00 + 2 = 10002$.

Vierte Methode. Vervielfältigung und Verderung, aufsteigend und absteigend, durch Abtheilung Zahlschichten, deren Werth sich in geometrischer Progression vermindert. M. s. mit Mehrerem v. Humboldt . O. S. 225.

3. Die Inder haben in uralter Zeit schon unsere gewärtige Bezeichnungsart der Zahlen gebraucht. Ihre zen Zahlzeichen stimmen zwar nicht mit den unsrigen ein, allein auf die Figur kommt es, wie schon oben nert, hier nicht an, sondern auf die im Art. Zahlensy-

Digitized by Google

stem dargestellte Methode, mit einigen einfachen Z
alle Zahlen zu bezeichnen. Unsere Zahlzeichen werden
oft arabische genannt, aber die Araber haben sie von
Indern erhalten. Die Beweise für diese Behauptun
fern Wallis in seiner Mathesis universalis. Cap.
wie auch in seiner Algebra (Cap. III.), und Mont
in seiner Geschichte der Mathematik. T. I. p. 375.,
cher das Meiste von jenem entlehnt hat. Erstlich
man in mehreren Bibliotheken Manuscripte von arab
Abhandlungen über die Arithmetik, welche den Titel
Die Kunst zu rechnen nach Indischer Art.
der Bibliothek zu Leiden ist ein Manuscript dieser Art,
rin die Zahlzeichen den unsrigen sehr ähnlich sind. —
tens sagt ein arabischer Schriftsteller Alsephadi,
die Indische Nation sich dreierlei Dinge rühme, einen
ches, das moralische Fabeln enthält, ihrer Rechnun
und des Schachspiels. Ferner sagt ein anderer ar
Schriftsteller aus dem 13ten Jahrhundert in se
rede zu einer astronomischen Schrift, die sich in de
bliothek zu Leiden befindet, daß die gedachte Rechnu
von Indischen Philosophen erfunden sey. — Di
ist von dem Mönch Planudes im 13ten Jahrh
handschriftlich an mehreren Orten ein arithmetisches
vorhanden, welches den Titel hat: λογιστικη ινδικη,
ψηφοφορια κατα Ινδους, d. i. Indische Rechenkunst
Rechnungsart zufolge der Inder. Die Bezeichnun
der Zahlen ist völlig unsere jetzt übliche, nur die Cha
oder Zahlfiguren sind von den unsrigen verschieden,
men aber fast gänzlich mit denen überein, welche A
phadi als die zu seiner Zeit üblichen angiebt. Pla
des fügt ferner, nachdem er die Beschaffenheit der
bedeutenden Ziffern erklärt hat, noch ausdrücklich h
Diese neun Charaktere sind Indische. Zu
sen, fährt er fort, kommt noch das zehnte Zei
τζιφρα genannt, welches etwas nicht vorhandenes b
tet. Das arabische Wort Tzaphar heißt leer seyn,
ches ohne Zweifel der Ursprung der Wörter chiffre, ci
oder cifra, Ziffer und zero ist. — Viertens; als

Digitized by Google

zt übliche Rechnungsart in Europa eingeführt ward, nahm an es als ausgemacht an, daß sie von den Indern herme. Johannes de Sacro Bosco im 13ten ahrhundert bezeugt dieses in den Versen, womit sich ne in gebundener Rede geschriebene Arithmetik angt:

Haec Algorithmus arc praesens dicitur, in qua
Talibus Jndorum fruimur bis quinque figuris.

Die Zahlzeichen des Johannes de Sacro-Bosco d mit den unsrigen größtentheils einerlei.

Von besonderer Wichtigkeit ist auch folgendes von v. umboldt a. a. O. S. 227. aus einem Codex der Paer Bibliothek mitgetheilte Scholion des Mönchs Neoytos:

Tzyphra est et vocatur id, quod cuivis litterae de a decade et insequentibus numeris quasi *ομικὸν* inscribitur. Significat autem hac Indica voce tale alogiam numerorum. Ubi igitur scriptum est sile primae litterae *ἄλφα*, pro unitate scriptae, atque perimpositum habet vel punctum vel quasi *ομικὸν*, addita altera figura litterae Indicae, differenm et augmentum numerorum declarat. E. g. pro mo graeco numero, *α* scripto, apud Indos sive ea recta perpendicularis, quando non habet suimpositum punctum vel *ομικρὸν*, ipsum hoc detat unitatem, ubi vero superimpositum sit punm atque altera littera adscripta sit, figura quin similis priori, significat XI, propter additantum similis litterae atque superimpositum unum nctum. Similiter etiam in reliquis litteris, quemodum adspectus docet. Si vero plura habet ncta, plura denotat. Quod intelligas, lector, supputes unumquidque.

Die 9 Ziffern des Neophytos sind, außer der 4, den persischen ähnlich. Nach dieser Bezeichnungsart e also z. B. $\overset{\circ}{2} = 20$, $\overset{\circ}{2}4 = 24$, $\overset{\circ\circ}{5} = 500$, $\overset{\circ\circ}{6} =$ 00, $\overset{\circ\circ}{3}\overset{\circ\circ}{4}\overset{\circ}{6}7 = 3467$. Wie ähnlich, nur weitläufiger,

Digitized by Google

diese indische Bezeichnungsart der unsrigen ist, fällt au den ersten Blick in die Augen. Die über die einzelnen Zi fern gesetzten Nullen erleichtern gleichsam nur das Au sprechen der Zahlen, und konnten ebenfalls weggelass werden. M. s. mit Mehrerem v. Humboldt. a. a. O. S. 228.

4. Eine Stelle in der Geometrie des Boethius (i Anfange des 6ten Jahrh.) könnte wegen des Indisch Ursprungs unserer Numeration Zweifel erregen. E sagt, daß einige Pythagoräer zur Bezeichnung der Zahl gewisse Zeichen erfunden hätten, die er Apices oder Ch racteres nennt. Er erklärt darauf ihren Gebrauch, un ungeachtet der Dunkelheit seiner Beschreibung, erken man doch daran die jetzt übliche Art zu rechnen. Ja sogar in einigen Handschriften des gedachten Werkes findet man Ziffern, die den unsrigen nahe kommen, zum Theil ganz ähnlich sind. Doch wird auch in alten Handschriften desselben Werks Alles mit römischen Zahlbuchstaben ausgedrückt. Wäre die dekadische Bezeichnungsart eine griechische Erfindung, so ist nicht zu begreifen, daß ein so sinnreiches Volk als die Griechen sie nicht benutzt haben sollte. Aber Eutocius, welcher um dieselbe Zeit mit dem Boethius lebte, bedient sich in seinem Commentar über des Archimedes Sandrechnung der Buchstaben aus dem Alphabet als Ziffern. Die Inder, welche so fest an ihren Gewohnheiten und Kenntnissen halten, haben ihre Rechnungsart, welche die unsrige ist, gewiß nicht von Ausländern angenommen. Vielmehr ist sie von ihnen durch die Araber und andere asiatische Völker in dem westlichen Asien bekannt geworden, woher Boethius, der in Italien lebte, Nachricht davon erhalten konnte. Er schrieb sie den Pythagoräern zu, die wegen ihrer arithmetischen Kenntnisse in Ruf standen, entweder zufolge einer Sage, oder nach seiner eigenen Muthmaßung. Man hatte aber keine rechte Vorstellung von der dekadischen Rechnung und ihren großen Vortheilen, und blieb daher immer bei der alten unbequemen Weise, wozu noch kam, daß die mathematischen Wissenschaften und alle übrigen in den Abendländern und in den

Digitized by Google

griechischen Reiche immer mehr in Verfall geriethen. Die alte Rechnungsform hat sich noch lange weiter hin in dem westlichen Asien erhalten. Man sieht es daraus, daß der Kaliph Waled (um 700) verboten hat, die griechische Sprache und Bezeichnung der Zahlen bei den Rechnungen der Staatskassen zu gebrauchen (Gibbon's history of the decline and fall of the Roman empire. Vol. V. p. 321.). M. vergl. Weidleri Spicilegium observationum ad Historiam notarum numeralium pertinentium. Wittenbergae. 1755. Mannert de numerorum quos arabicos vocant vera origine pythagorica. Norimb. 1801.

5. Nach einer Bemerkung Sedillots, welche v. Humboldt a. a. O. S. 229. anführt, hat die indische Rechnungsart ihren Weg in die Abendländer durch den gelehrten Astronomen Rihan Muhammed ebn Ahmet Albiruni, welcher sich in Indien aufhielt, gefunden, vielleicht auch durch maurische Zollbeamte an der nordafrikanischen Küste und den Verkehr derselben mit italiänischen Kaufleuten. Nach der gewöhnlichen Meinung brachten sie die Araber, welche sie von den Indern angenommen hatten, nach Spanien, wo wahrscheinlich schon im zehnten Jahrhundert der wegen seiner Gelehrsamkeit berühmte Gerbert, aus Frankreich gebürtig, welcher unter dem Namen Sylvester II. im Jahre 999 die päbstliche Würde erhielt, sie von ihnen lernte. In einem seiner Briefe sagt er, daß dieselbe Zahl modo simplex, modo compositus, nunc digitus, nunc constituatur ut articulus. In einem Rechenbuche aus dem 14ten Jahrhundert heißen 10, 20, 30 numerus articulus, und 11, 12 bis 19 numerus compositus. (Kästners G. d. M. II. S. 699.). Ein Chronikenschreiber Wilhelm von Malmesbury, der ungefähr 150 Jahre nach Gerbert lebte, sagt von ihm: Abacum certe primus a Saracenis rapiens regulas dedit, quae a sudantibus Abacistis vix intelligantur. In einem geometrischen Werke Gerberts, das in eine Sammlung verschiedener Schriften: Thesaurus Anecdo-

Digitized by Google

torum. T. III. Augustae Videl. 1721. eingerückt ist, sind Ausrechnungen der Figuren mit dekadischen Zahlen dargestellt. Das Manuscript, woraus es abgedruckt worden, schätzt der Herausgeber 600 Jahre alt. Es ist nicht ausdrücklich angeführt, daß es dekadische Ziffern enthalte; doch aber zu vermuthen, weil sonst die Veränderung der Zahlbuchstaben in dekadische Zeichen wohl vom Herausgeber angezeigt worden wäre.

6. Die dekadischen Ziffern sind langsam in Gebrauch gekommen, wie es in jenem Zeitalter nicht anders seyn konnte. Man sieht es aus einer arithmetischen Schrift des Leonardus Pisanus, die im J. 1202 verfaßt ist. Von dieser findet man eine ausführliche Nachricht in des Targioni Tozzetti Relazioni d'alcuni viaggi fatti in Toscana. T. II. p. 59. der zweiten Ausgabe zu Florenz. 1768. Die Schrift des Leonardo ist auf der Magliabecchischen Bibliothek zu Florenz handschriftlich vorhanden. Der Verfasser erzählt, daß sein Vater, ein Handelsmann, ihn in dem studio abaci unterrichtet habe; der vortreffliche Unterricht, mit den neun Figuren der Inder zu rechnen, habe ihm ganz vorzüglich gefallen; er habe daraus begriffen, was er auf seinen weiten, wegen der Handlung unternommenen Reisen in und außer Europa mit vieler Mühe gelernt hätte; das Alles aber und andere Rechnungsarten halte er gleichsam für fehlerhaft (quasi errorem) in Vergleichung mit der Weise der Inder. Deswegen wolle er diese so deutlich als möglich vortragen. In dem ersten Kapitel zeigt er, wie mit den neun Figuren und dem Zeichen 0, welches arabisch Zephirum heiße, alle Zahlen geschrieben werden. Man sieht aus dieser Schrift, daß die indische Rechenkunst gegen Ende des 12ten Jahrhunderts selbst unter Kaufleuten noch nicht ausgebreitet gewesen ist. Schon Vossius (de Matheseos natura. p. 34.) war der Meinung, daß unsere Zahlzeichen nicht vor 1300 oder höchstens 1250 in Europa eingeführt seyen. Wallis glaubt, daß ihr Gebrauch älter sey, auch in England, wenn nicht im gemeinen Leben, doch in astronomischen Tafeln. Bei diesen habe man den Anfang ge-

Digitized by Google

macht, als sie aus den arabischen Originalen abgeschrieben und zugleich in's Lateinische übersetzt wurden; hernach habe man die dekadischen Ziffern auch zu andern Rechnungen angewandt. In der Bibliothek zu Oxford sind astronomische Tafeln von einem maurisch-spanischen Verfasser Arzachel, die etwa um 1080 verfertigt sind. In diesen sind dekadische Ziffern gebraucht. Die lateinische Abschrift scheint um 1200 oder doch vor 1250 gemacht zu seyn. Da die Alphonsinischen Tafeln um 1270 oder schon 1252 bekannt gemacht worden sind, so hat man sich gewiß nicht die Mühe gegeben, ältere von geringerem Werthe abzuschreiben. In einer andern Sammlung astronomischer Tafeln, die für den Anfang des Jahres 1150 berechnet sind, werden schon die dekadischen Ziffern angetroffen. Ein Paar Schriften über die Festrechnung aus der ersten Hälfte des 13ten Jahrhunderts zeigen sie auch in alten Exemplaren. Wie früh man sie im gemeinen Leben gebraucht habe, ist nicht zuverlässig auszumachen. Die älteste Spur glaubte Wallis auf einem Kamine zu Helmdon in Northamtonshire gefunden zu haben, folgendergestalt: A° DO' M° 133, d. i. 1133. Nach seiner Zeit meinte man noch frühere Jahreszahlen in England entdeckt zu haben, als 1090 in Colchester, auch M16 = 1016, ferner 1011, sogar 975. Dagegen hat Dr. Ward in den Philos. Transact. erinnert, daß es unwahrscheinlich sey, daß die neuen Zahlzeichen von Handwerksleuten so sehr früher gebraucht seyen, als von Gelehrten, da sie in keinem alten Manuscripte eher vorkämen als in einigen Abschriften von des Johannes de Sacro Bosco Werk, der 1256 gestorben ist. Er bemerkt, daß die Inschrift zu Helmdon 1233 gelesen werden müsse, daß die zu Colchester 1490 sey, daß M16 keine Zahl, sondern die Anfangsbuchstaben MIC eines Namens sey, und daß statt der Jahrzahl 975 die römische Zahl MXV gelesen werden müsse (Martyn's Abridg. Phil. Trans. Vol. 9. p. 420.). Die Zahl 1011 hat man nachgehends für Buchstaben aus dem Namen eines Schutzheiligen erkannt.

In öffentlichen Aufschriften erscheinen nach Gatterers

Digitized by Google

Versicherung die Ziffern erst vom 14ten Jahrhundert an; aber in Urkunden höchst selten vor dem 15ten. Auch wird häufig von einer Zahl ein Theil mit Worten, der andere mit römischen Zahlzeichen ausgedrückt. Ziffern sind ihm unter Tausenden von Urkunden, deren Originale er in Händen gehabt, erst 1527 vorgekommen.

Außer den schon angeführten Schriften s. m. noch:

Hutton's mathem. and philos. Dictionary. Art. Figures.

Kästners Gesch. d. Math. I. S. 36. II. S. 695.

Berlinische Blätter, herausgegeben von Biester. 1. Blatt. 1797. Darin Bemerkungen über die Observations on the introduction of arabic numerals into England by M. North. in der Archaeologia by the Society of Antiquaries at London. 1792.

Weidler de characteribus numerorum vulgaribus et eorum aetatibus. Vitemb. 1727.

Die einzelnen Abhandlungen von Ward findet man Philos. Transact. 1735. p. 120. 1735. p. 136. 1744. p. 79. 1745. p. 283. 1748. p. 603. Zwei Abhandlungen von Wallis ebendas. 1683. p. 399. 1700. p. 677. Von Luffkin und Barlow 1699. p. 287. 1741. p. 652.

Vom Ursprunge der üblichen Zahlziffern von Siegfrieden im Gothaischen Magazin. 1. Band. 1776. 2. Band. 1777.

Zauberquadrat, s. Quadrat, magisches.

Zehner, die Ziffern der ersten Ordnung im dekadischen Zahlensystem; s. Zahlensystem.

Zehneck, s. Vieleck (48. ff.).

Zeichen in der Mathematik sind willkührliche Bilder der Größen, ihrer Formen und Verbindungen.

Von den Zeichen bestimmter Zahlen s. Zahlensystem

Digitized by Google

und Zahlzeichen. Die Zeichen unbestimmter Größen sind Buchstaben, s. Bezeichnung und Buchstabenrechnung. In diesem Artikel soll nur eine Uebersicht der gewöhnlichen Zeichen gegeben werden (s. Thl. I. S. 307.).

Das Zeichen der Addition ist +, das Zeichen der Subtraction ist —. Beide Zeichen hat Hutton (Math. Dict, Art. Characters) zuerst bei Stifel gefunden. Cardan, Tartalea u. A. gebrauchten die Buchstaben p und m, d. i. plus oder piu und minus.

Auch bedeuten + und — vor dem Symbol einer Größe das Positive und Negative, wie z. B. + a oder — a (s. Entgegengesetzte Größen). Dieser doppelte Gebrauch der Zeichen + und — hat Einige veranlaßt, für die Beziehung des Entgegengesetzten andere Zeichen vorzuschlagen (s. z. B. H. A. Rothe Lehrb. der Arithm. Thl. I. Lpzg. 1804. Eilftes Kapitel), von denen aber keine allgemein in Gebrauch gekommen sind.

Das Zeichen der Multiplication ist ×, bei bestimmten Zahlen, bei Linien, die durch die beiden Buchstaben an ihren Endpunkten angedeutet werden, etwa bei gebrochenen Factoren, oder zur Absonderung einiger Factoren eines Products von den andern, wenn jene als ein einziger Factor betrachtet und ausgezeichnet werden sollen. Dieses Zeichen ist von Oughtred eingeführt. Werden die Factoren eines Products durch einzelne Buchstaben bezeichnet, so werden sie bloß neben einander geschrieben, wie abcde... Auch ein Punkt (.) zeigt bei numerischen Factoren eine Multiplication an. Z. B. 4.5 ist 20. Bei gebrochenen Factoren in bestimmten oder unbestimmten Größen wird ebenfalls noch oft ein Punkt zur Bezeichnung der Multiplication gebraucht.

Das Zeichen der Division ist entweder ein Strich mit dem Dividendus darüber und dem Divisor darunter, wie $\frac{a}{b}$, oder : , zwischen dem Dividendus und Divisor, so daß ersterer voran steht, wie a : b. Beides heißt a durch b dividirt. Wenn Dividendus und Divisor aus mehreren Theilen bestehen, so ist die erstere Bezeichnung

Digitized by Google

vorzuziehen. Letztere hat den Vortheil, daß die Zeilen nicht gesperrt werden. Pell hat nach Hutton a. a. O. das Zeichen ÷ zur Bezeichnung der Division gebraucht, welches aber in deutschen Rechenbüchern auch zur Bezeichnung der Subtraction angewandt wird.

Zusammengesetzte (complexe) Größen, welche wie eine einfache Größe betrachtet und behandelt werden sollen, werden in Parenthesen oder Klammern eingeschlossen, wie z. B. (a + b — c). Nach dem Dict. math. der französischen Encyklopädie (Art. Caractère) hat Guido Grandi sich dieser Bezeichnung zuerst bedient. Wahrscheinlicher rührt dieselbe aber von Albert Girard her. Vieta zog einen Strich über die als einfach zu betrachtende complexe Größe, wie $\overline{a+b-c}$. In neuerer Zeit ist diese Bezeichnung, wie sie es, wenn mehrere Parenthesen hinter einander vorkommen, oder bei Wurzelgrößen, allerdings auch verdient, wieder mehr in Aufnahme gekommen. So ist z. B.

$$\sqrt[3]{a+b-c} = \sqrt[3]{(a+b-c)}.$$

Anstatt der Klammern werden bei complexen Größen, wenn es keinen Mißverstand giebt, zuweilen auch Punkte gebraucht, wie z. B. bei der Multiplication mehrerer Factoren in einander, welche nach einem bestimmten Gesetze fortschreiten:

$$\frac{n(n-1)..(n-m+1)}{1.2.3...m} = \frac{n.n-1.n-2..n-m+1}{1.2.3...m}.$$

Die mte Potenz von a wird durch a^m, die nte Wurzel aus der mten Potenz von a durch $\sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$ bezeichnet, worüber, so wie über verschiedene ältere Bezeichnungen der Potenzen und Wurzeln, mit Mehrerem der Art. Potenz nachzusehen ist. Nur bei der Quadratwurzel wird der Wurzelexponent weggelassen. Eben so sind log, log nat, sin, cos, tang, cot, sec, cosec, sin vers, cos vers, Arc sin, Arc cos, Arc tang, u. s. f. leicht verständliche Bezeichnungen, über die man in den Artt. Logarithmus, Cyclometrie und Goniometrie weitere Belehrung suchen muß.

Digitized by Google

Das Zeichen der Gleichheit ist =. Robert Recorde hat es nach Hutton zuerst gebraucht. Descartes bediente sich des Zeichens ∞; eben so Hudde, Rolle, Ozanam nach Saverien Dict. Math. Durch Harriot ist das Zeichen = zuerst allgemein geworden.

Das Zeichen der Ungleichheit ist > und <. Nämlich a > b heißt: a ist größer als b, und b < a heißt: b ist kleiner als a. Oughtred, Barrow u. A. bedienten sich der Zeichen ⊐ (größer) und ⊏ (kleiner). Das Zeichen Z zeigt an, daß eine Größe größer, kleiner oder eben so groß als eine andere seyn könne (S. den Art. Verhältniß). Es ist ein neues, etwa in der deutschen Ausgabe des Euklides von Lorenz zuerst gebrauchtes, Zeichen.

Das Zeichen des arithmetischen Verhältnisses zwrier Größen ist a — b, des geometrischen Verhältnisses a : b. Der Grund dieser Bezeichnungen durch das Subtractions- und Divisionszeichen erhellet leicht aus der Natur dieser Verhältnisse. Die arithmetische und geometrische Proportion bezeichnet man durch a — b = c — d und a : b = c : d. Letztere Bezeichnung ist seit Wolf in Deutschland allgemein eingeführt, und entspricht ihrem Zwecke vollkommen. Englische und französische Schriftsteller bezeichnen die geometrische Proportion gewöhnlich durch a : b :: c : d. Das Zeichen (::) rührt von Oughtred her. Auch findet man a . b = c . d als Bezeichnung einer geometrischen Proportion, nach Saverien a. a. O., aber selten. Ein Verhältniß, welches aus den Verhältnissen a : b, c : d, e : f, u. s. f. zusammengesetzt ist, bezeichnet man durch (a : b) + (c : d) + (e : f) + ... Eine geometrische Progression wird auch bezeichnet durch ∺ 3, 6, 12, 24, 48, ...; eben so eine stetige arithmetische Proporkion durch ÷ a . b . c, eine stetige geometrische Proportion durch ∺ a . b . c. Eine arithmetische Progression durch ÷ 2, 6, 10, 14, 18, 22, ...

∞ bedeutet bei einigen englischen und französischen Schriftstellern, wenn es zwischen zwei Größen steht, wie z. B. a ∞ b, den Unterschied der beiden Größen a und b,

Digitized by Google

es mag die vorangesetzte a die größere oder die kleinere seyn. Dieses Zeichen scheint von Wallis zuerst gebraucht zu seyn. Es ist aber völlig unnöthig und unnütz, daher auch gar nicht in Gebrauch gekommen. Das Vorzeichen der Differenz liefert die nöthige Bestimmung von selbst.

Bei deutschen Schriftstellern ist ∞ das Zeichen der Aehnlichkeit, ein liegendes lateinisches S. Leibnitz und Wolf haben es zuerst angewandt. Oft gebraucht man das Wort ähnlich selbst. Vergl. Miscellan. Berolin. Part. III. p. 159.

Mit dem Begriffe hat auch Gauß das Zeichen $\equiv$ als Zeichen der Zahlen-Congruenz eingeführt (s. den Art. Zahl. II. 1.). $\sqrt{-1}$ wird oft, auch in diesem Wörterbuche, durch i bezeichnet.

Hat eine Größe mehrere Werthe, so wird nach Cauchy der Inbegriff aller Werthe durch Einschließung in doppelte Parentheſen, ein bestimmter Werth durch Einschließung in eine einfache Parentheſe bezeichnet. So bezeichnet z. B. $\sqrt[n]{((a+x))}$ den Inbegriff aller Werthe, welche diese Wurzel haben kann, $\sqrt[n]{(a+x)}$ dagegen irgend einen bestimmten Werth dieser Wurzel. Bei allen mehrerer Werthe fähigen analytischen Ausdrücken ist diese Bezeichnung, welche allgemeiner eingeführt zu werden verdiente, anwendbar.

* bedeutet ein fehlendes Glied in einer Reihe oder Gleichung, wie z. B. $ax^3 * + bx + c \equiv o$, weil in dieser Gleichung das die Potenz x^2 enthaltende Glied fehlt.

* Ist $y = f(x)$, eine Function einer veränderlichen Größe x (über die Bezeichnung der Functionen s. m. den Art. Function. 2.), so werden der erste, zweite, dritte, vierte Differentialquotient nach der Reihe durch $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, ..!.. bezeichnet. Lagrange's derivirte Functionen sind mit den Differentialquotienten einerlei, und wer-

Digitized by Google

den nach der Reihe durch $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{IV}(x)$, ... bezeichnet.

Die Engländer gebrauchen die von Newton eingeführte höchst unbequeme Bezeichnung der auf einander folgenden Differentialverhältnisse $\dot{x}:\dot{y}$, $\ddot{x}:\ddot{y}$, $\dddot{x}:\dddot{y}$, u. s. f. Jetzt mag aber diese Bezeichnung wohl auch größtentheils abgekommen seyn. Ist y eine Function mehrerer veränderlichen Größen x, v, u, ..., so bedeutet $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ den Differentialquotienten von y in Bezug auf x, wenn bloß diese Größe als veränderlich betrachtet wird, d. h. das partielle Differential von y in Bezug auf x. Eine ähnliche Bedeutung haben Symbole wie $\frac{\partial^4 y}{\partial v \partial x^3}$, $\frac{\partial^6 y}{\partial u \partial v^2 \partial x^3}$, u. s. f.

Das unbestimmte Integral eines Differentials $X dx$ wird durch $\int X dx$ bezeichnet. Soll dieses Integral aber zwischen den Gränzen a, b, d. i. von a bis b, genommen werden, so erhält man ein bestimmtes Integral, und bezeichnet es nach den neuesten französischen Schriftstellern durch $\int_a^b X dx$.

Die nte Variation einer Function y wird durch $\delta^n V$ bezeichnet; s. Variationsrechnung.

Ueber die vielen combinatorischen Zeichen s. m. den Art. Combinatorische Analysis und Localzeichen. Eben so den Art. Facultät über die bei dieser Größenform gewöhnlichen Bezeichnungen, u. s. f.

Von geometrischen Zeichen bemerke man nur noch folgende:

△ ein Dreieck.

□ ein Quadrat.

▭ ein Rechteck, oder Parallelogramm überhaupt.

AB × BC das unter den Linien AB und BC als zusammenstoßenden Seiten enthaltene Rechteck.

AB^2 oder $AB^{\square}$ das Quadrat der Linie AB; auch □AB.

⊙ ein Kreis.

∠ ein Winkel.

Digitized by Google

∟ oder R, auch ℜ, ein rechter Winkel.

| eine senkrechte Linie, wenig üblich.

|| Parallelen.

‡ Gleiche und parallele Linien.

Französische Schriftsteller setzen über die Bezeichnung einer geraden Linie durch die beiden Buchstaben A und B an ihren Endpunkten gewöhnlich einen Strich, wie $\overline{AB}$.

Bei Winkelmessungen bedeuten die Zeichen, °, ′, ″, ‴, ... Grade, Minuten, Secunden, Tertien, Quarten u. s. f., wie z. B. 25° 17′ 32″ 45‴.

Bei Messungen gerader Linien bedeuten dieselben Zeichen Ruthen, Fuße, Zolle, Linien, Scrupel u. s. f. Um Zweideutigkeiten zu verhüten, mag man in diesem Falle einen kleinen Bogen unter jedes Zeichen setzen, wie z. B. 16⌒ 9⌒ 8⌒ 7⌒.

Die hier aufgeführten werden die am meisten vorkommenden Zeichen seyn.

Zens nebst seinen Zusammensetzungen, s. Potenz (8.).

Zerlegung der Zahlen (Partitio numerorum) s. Theilung (2.).

Zerstreute Proportion, s. Verhältniß (13.).

Zero, Null, s. Zahlzeichen (3.).

Zetetice, ein bei den ältern Algebraisten, z. B. Harriot und Vieta, gebräuchliches Kunstwort, welches die Erfindung oder Aufstellung der Gleichungen bei einer Aufgabe bezeichnet. Pars prior Analytices, quae in constitutione aequationum versatur.

Ziffern, s. Zahlzeichen.

Zone nennt man jedes von zwei parallelen Kreisen eingeschlossene Stück der Oberfläche eines durch Umdrehung

Digitized by Google

einer Curve entstandenen Körpers. Im Art. Sphäroid. (35. ff.) ist von dem Flächeninhalte der Zonen des elliptischen Sphäroids ausführlich gehandelt, weshalb wir hier nur noch einige Bemerkungen über Kugelzonen beibringen wollen.

1. Man bezeichne den Halbmesser der Kugel durch r, und rechne die Abscissen vom Mittelpunkte; so ist die Gleichung des erzeugenden Kreises $x^2 + y^2 = r^2$. Entsprechen nun die Parallelkreise, welche die Zone Z begränzen, den Abscissen α, a; so ist nach Thl. I. S. 514.

$$Z = 2\pi \int_\alpha^a y \partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Aber

$$x\partial x + y\partial y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y};$$

$$\int y\partial x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \int y\partial x \sqrt{\frac{r^2}{y^2}} = \int r\partial x = rx.$$

Also $Z = 2\pi r(a - \alpha)$. Da nun offenbar $a - \alpha$ die Höhe der Zone, und $2r\pi$ die Peripherie eines größten Kugelkreises ist; so findet man den Inhalt einer sphärischen Zone, wenn man mit ihrer Höhe die Peripherie eines größten Kugelkreises multiplicirt. Einen elementaren Beweis s. m. in Legendre Elém. de Géom. Livre VIII. Prop. XI. Auch ist, wie schon Archimedes (De Sphaera et Cylindro I. 50. Coroll. 4.) gefunden hat, der Flächeninhalt einer sphärischen Zone der Seitenfläche eines geraden Cylinders gleich, welcher mit der Zone einerlei Höhe und mit der Kugel einerlei Halbmesser hat.

2. Der Inhalt des der Zone entsprechenden Körpers ist nach Thl. I. S. 580., wenn wir denselben durch Z' bezeichnen, =

$$Z' = \pi \int_\alpha^a y^2 \partial x.$$

Aber

$$\int y^2 \partial x = \int (r^2 - x^2) \partial x = r^2 x - \tfrac{1}{3} x^3.$$

Folglich

$$\begin{aligned} Z' &= \pi r^2 (a - \alpha) - \tfrac{1}{3}\pi (a^3 - \alpha^3) \\ &= \pi r^2 (a - \alpha) - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha)(a^2 + a\alpha + \alpha^2) \\ &= \pi r^2 (a - \alpha) - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha) a^2 - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha) \alpha^2 \\ &\quad - \tfrac{1}{3}\pi (a - \alpha) a\alpha \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$= \tfrac{1}{2}(a-\alpha)(r^2-a^2)\pi + \tfrac{1}{6}\pi(a-\alpha)a^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(a-\alpha)(r^2-\alpha^2)\pi + \tfrac{1}{6}\pi(a-\alpha)\alpha^2$$
$$- \tfrac{1}{3}\pi(a-\alpha)a\alpha$$
$$= (a-\alpha).\frac{(r^2-a^2)\pi+(r^2-\alpha^2)\pi}{2} + \tfrac{1}{6}\pi(a-\alpha)^3 .$$

$r^2 - a^2$ und $r^2 - \alpha^2$ sind offenbar die Quadrate der Halbmesser der Grundkreise der Zone. Man erhält also den Inhalt des entsprechenden Körpers, wenn man die Höhe der Zone mit der halben Summe der Flächenräume der Grundkreise multiplicirt, und den Inhalt einer Kugel addirt, deren Durchmesser die Höhe der Zone ist. Einen andern Beweis s. bei Legendre a. a. O. L. VIII. P. XVIII.

Für einen bloßen sphärischen Abschnitt ist die eine Grundfläche $= 0$, oder $a = r$. Also der Flächeninhalt $= 2\pi r(r-\alpha)$ (1.), und der cubische Inhalt

$$= \frac{(r-\alpha)(r^2-\alpha^2)\pi}{2} + \tfrac{1}{6}\pi(r-\alpha)^3 .$$

M. s. Archimedes l. c. Coroll. 1.

3. Sind die geographischen Breiten der Parallelkreise einer Zone H, H′; so ist, wenn beide Breiten nördlich, oder beide südlich sind, die Höhe der Zone offenbar

$$= r\cos(90^\circ - H') - r\cos(90^\circ - H)$$
$$= r\{\sin H' - \sin H\} .$$

Wäre die Breite H′ nördlich, H dagegen südlich, oder umgekehrt; so erhellet leicht, daß man H negativ nehmen muß, wodurch das Minuszeichen in obigem Ausdruck in ein Pluszeichen verwandelt wird. Folglich die Oberfläche der Zone nach (1.)

$$= 2\pi r^2\{\sin H' - \sin H\}$$
$$= 4r^2\pi \sin\left(\frac{H'-H}{2}\right)\cos\left(\frac{H'+H}{2}\right)$$

(Goniometrie. 28.).

Für eine südliche Breite H, wenn H′ nördlich, wird dieser Ausdruck

$$= 4r^2\pi \sin\left(\frac{H'+H}{2}\right)\cos\left(\frac{H'-H}{2}\right) .$$

Für die gemäßigten Zonen der Erde ist $H = 23^\circ 28'$,

Digitized by Google

$H' = 66^0\ 32'$; für die kalten $H = 66^0\ 32'$, $H' = 90^0$; für die heiße Zone $H = -23^0\ 28'$, $H' = +23^0\ 28'$; woraus man mittelst vorstehender Formel und des bekannten mittlern Halbmessers der Erde leicht die Flächenräume der einzelnen Zonen berechnen kann.

4. Sey nun der Flächeninhalt eines sphärischen Vierecks, welches von zwei bekannten Meridianen und zwei bekannten Parallelkreisen eingeschlossen wird, $= V$. Die Längen und Breiten seiner Spitzen seyen L, L' und H, H'. Der zwischen den beiden Meridianen enthaltene Bogen des Aequators ist $= L' - L$. Ist nun, wie oben, die Area der ganzen Zone $= Z$; so erhellet leicht die Richtigkeit folgender Proportion:

$$360^0 : L' - L = Z : V,$$

Also

$$V = Z \cdot \frac{L' - L}{360^0},$$

d. i. nach (3.)

$$V = 4r^2\pi\left(\frac{L' - L}{360^0}\right)\sin\left(\frac{H' - H}{2}\right)\cos\left(\frac{H' + H}{2}\right)$$
$$= r^2\pi\left(\frac{L' - L}{90^0}\right)\sin\left(\frac{H' - H}{2}\right)\cos\left(\frac{H' + H}{2}\right).$$

$L' - L$ muß, so wie 90^0, in Graden ausgedrückt seyn. Wäre $L' - L$ in Secunden gegeben, so müßte man auch 90^0 auf Secunden bringen.

Zufälliger Punkt, s. Perspectiv (9.).

Zufällige Wurzeln, s. Gleichung (171.).

Zugeordneter oder conjugirter Punkt, s. Conjugirt. III. und Vielfacher Punkt.

Zuglinie, s. Tractoria.

Zusammengesetzte Gleichung, s. Gleichung (4.).

Zusammengesetztes Verhältniß, s. Verhältniß (14.).

Digitized by Google

Zusammengesetzte Zahl, s. Primzahl (1.), Theiler einer Zahl (1.).

Zusammenlaufende Linien (lineae convergentes) sind solche gerade Linien, welche, verlängert, einander schneiden.

Zusatz, s. Corollarium.

Zweig einer krummen Linie, s. Krumme Linie (26.).

Zwerchaxe heißt zuweilen die bestimmte oder Hauptaxe der Hyperbel, welche zwischen ihren beiden Scheiteln liegt.

Zweitheilige Größe, s. Binomium.

Digitized by Google

Einige Berichtigungen.

S. 16 Z. 2 v. u. ſt. $\frac{V}{+m1}$ ſ. m. $\frac{V}{m+1}$.
— 19 — 17 tilge man einmal wie oben.
— 22 — 3 ſt. a ſ. m. a^2.
— — — 11 Hinter braucht ein Punktum.
— 31 — 13 ſt. Unterſuchung ſ. m. Unterſuchung.
— 41 — 7 ſt. $(x-a)^{-\frac{1}{2}}$ ſ. m. $(x-a)^{-\frac{1}{2}}$.
— 45 — 14 ſt. in dem ſ. m. indem.
— 51 — 9 ſt. anch ſ. m. auch.
— 60 — 6 v. u. ſt. Digonale ſ. m. Diagonale.
— 61 — 7 v. u. ſt. 7. ſ. m. 7^a.
— 77 — 1 Bey dem Artikel Theorie wäre auch die Theorie der Zahlen zu erwähnen, und deshalb auf den Art. Zahl. 4. zu verweiſen geweſen.
— 81 — 12 v. u. hinter = C ein Komma.
— 91 — 13 ſt. in versam ſ. m. inversam.
— 105 — 8 v. u. ſt. den ſ. m. der.
— 110 — 13 v. u. ſt. 25. ſ. m. 24.
— 111 — 4 ſt. für ſ. m. für.
— 111 — 16 ſt. quos ſ. m. quas.
— 136 — 1 v. u. ſt. cendit ſ. m. scendit.
— 153 — 2 v. u. ſt. A', A'', A''' ſ. m. A, A', A''.
— 158 — 8 v. u. ſt. 27. ſ. m. 28.
— 268 — 1 u. 2 ſt. Halbkugel ſ. m. Hälfte.
— 271 — 9 v. u. ſt. vierten ſ. m. dritten.
— 278 — 12 v. u. ſt. x ſ. m. x^2.
— 281 — 3 v. u. ſt. BC^2 ſ. m. $+ BC^2$.
— 283 — 11 ſt. α ſ. m. a_1.
— 288 — 11 ſt. denn ſ. m. dann.
— 296 — 10 ſetze man hinter 4. p. 49. eine Parentheſe.
— 300 — 6 u. 9 v. u. ſ. m. ſt. $h_1 : h_1$ und h.
— 325 — 7 hinter gebrauch-te ein Komma.
— 332 — 16 v. u. ſt. den auch ältern ſ. m. den ältern auch.
— 383 — 10 v. u. ſt. J. J. Mayer ſ. m. J. T. Mayer.
— 395 — 5, 6, 8, 9 u. 10 v. u. müſſen alle Punkte vor dem Buchſtaben x getilgt werden.
— 463 — 1 ſt. 400 v. Ch. ſ. m. 400 n. Ch.
— 537 — 21 ſt. (22.) ſ. m. (21.).
— 600 — 6 ſt. von x ſ. m. x, y, z ....
— 804 — 4 v. u. muß das erſte Pluszeichen im Zähler des Bruchs vor dem Wurzelzeichen ein Minuszeichen ſeyn.
— 848 — 12 v. u. ſt. eine ſ. m. ein.

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1

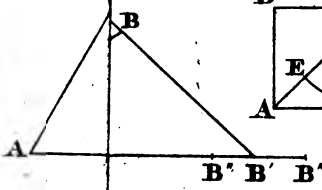


Fig. 1a

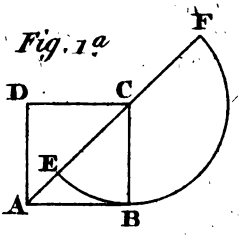


Fig. 6

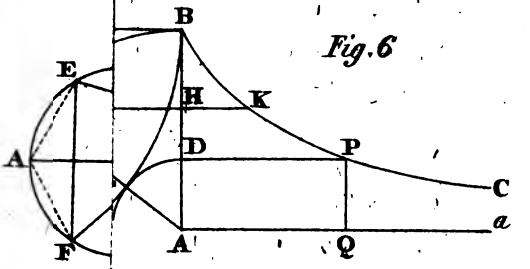


Fig. 7

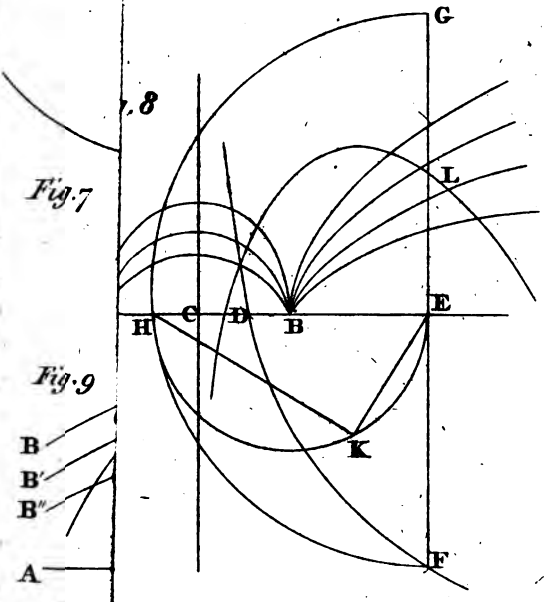


Fig. 9

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 1

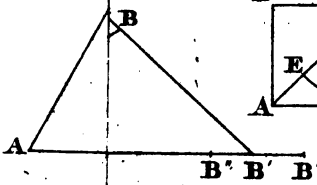


Fig. 1a

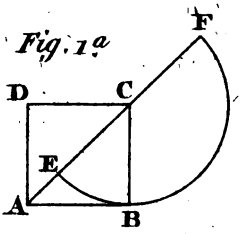


Fig. 6

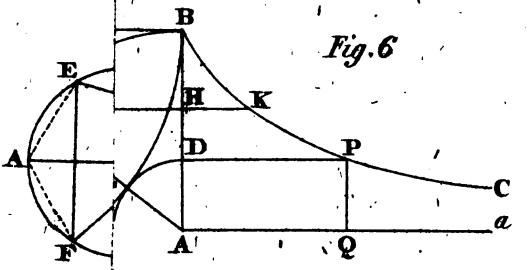


Fig. 7

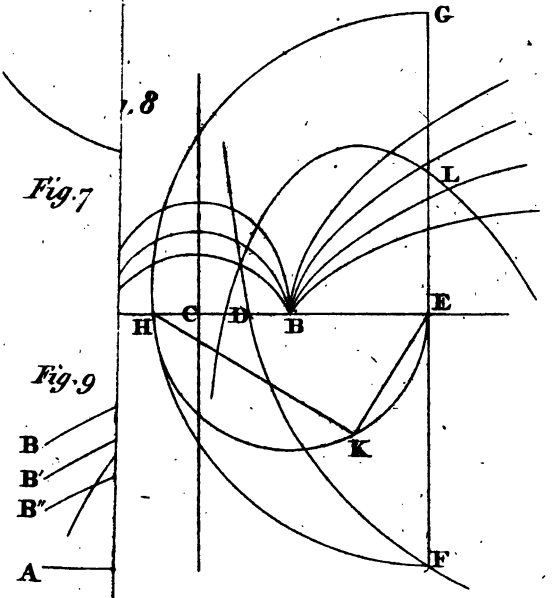


Fig. 9

Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 15

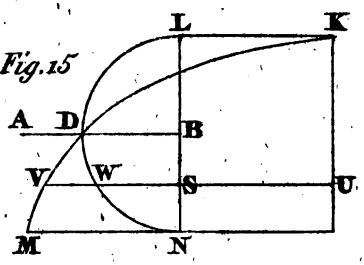


Fig. 1

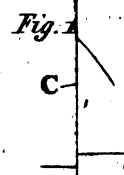
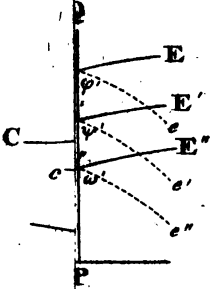


Fig. 19



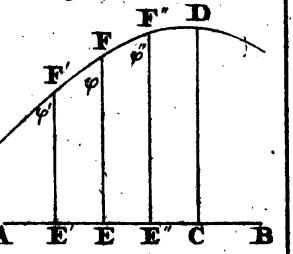
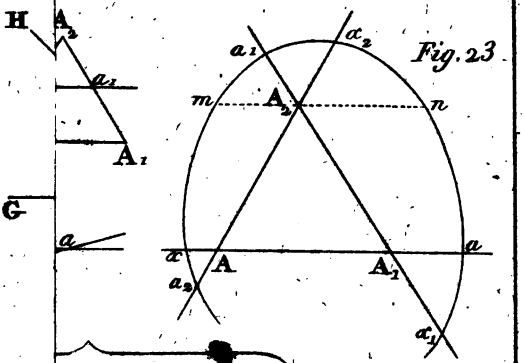
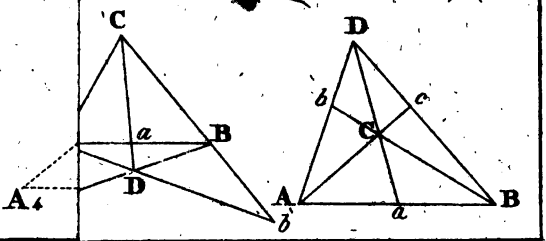


Fig. 23





Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 15

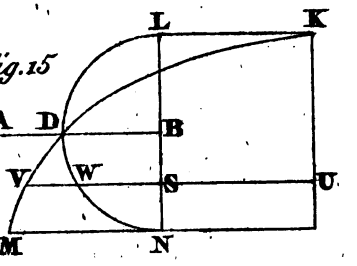


Fig. 1

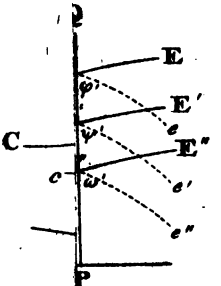
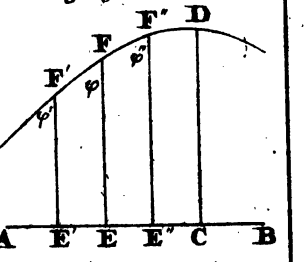


Fig. 19



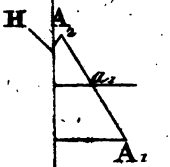
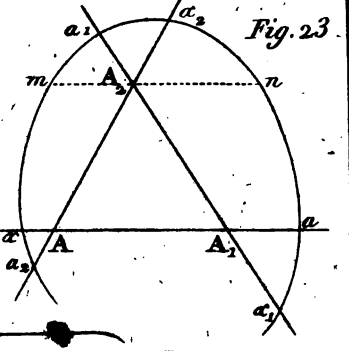
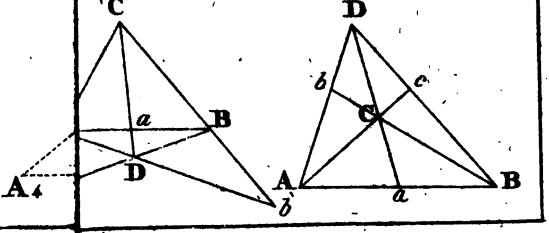
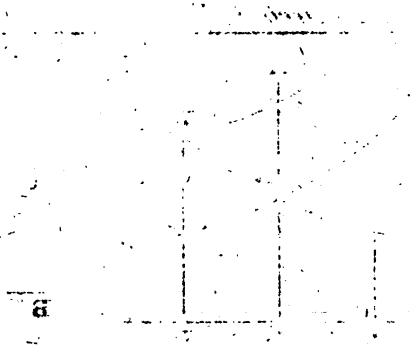


Fig. 23





Digitized by Google



Digitized by Google

Fig.

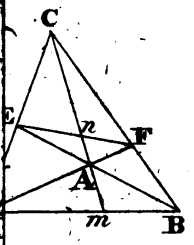


Fig. 30

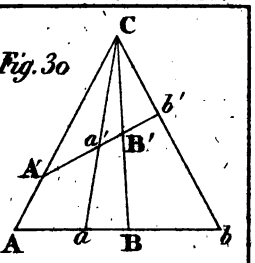


Fig.

Fig. 34

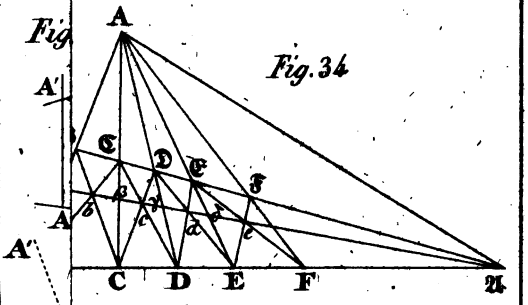
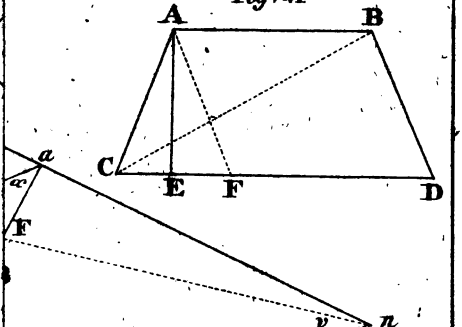


Fig. 41



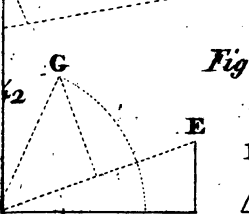
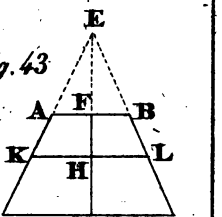


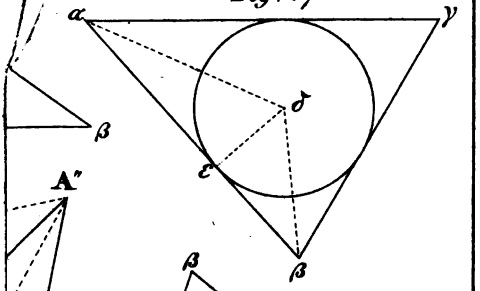
Fig. 43

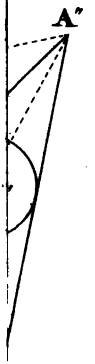


Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 47





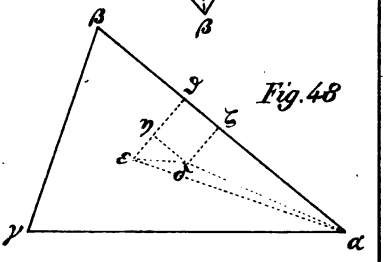


Fig. 48

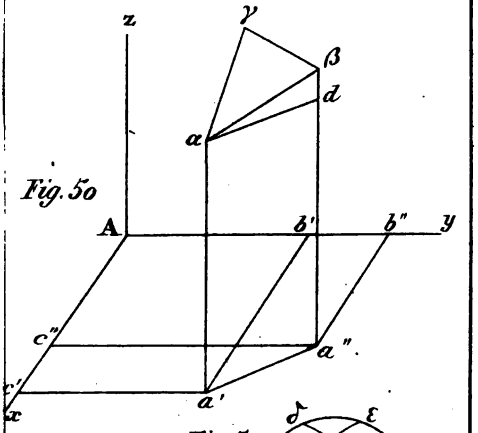


Fig. 50

Fig. 57

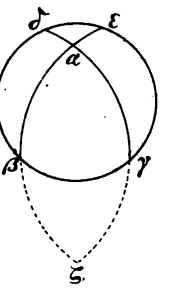
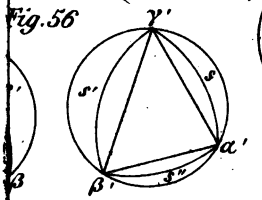


Fig. 56



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 62

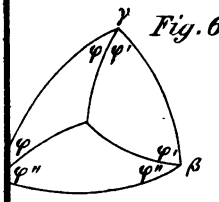


Fig. 63

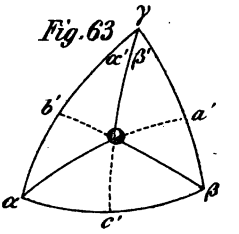


Fig. 67

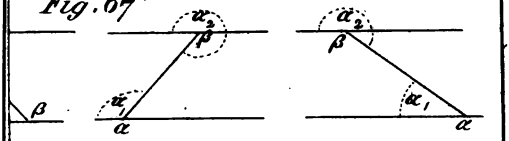


Fig. 75

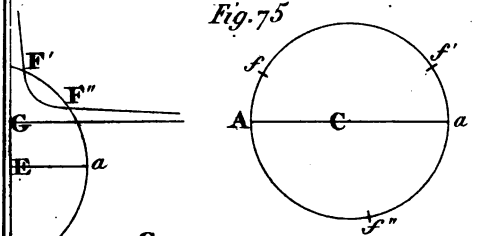


Fig. 73

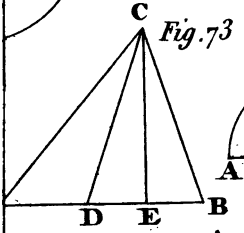


Fig. 76

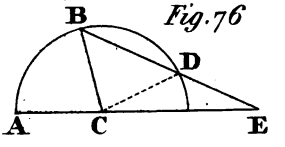
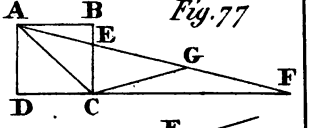


Fig. 77



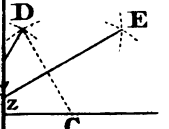
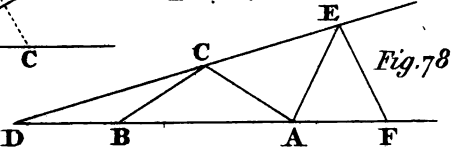
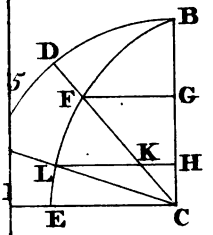


Fig. 78



Digitized by Google

Digitized by Google



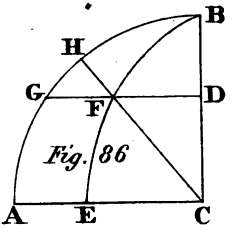


Fig. 86

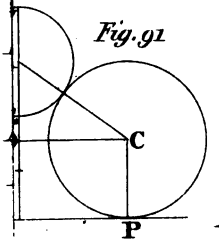


Fig. 91

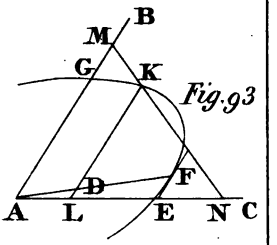


Fig. 93

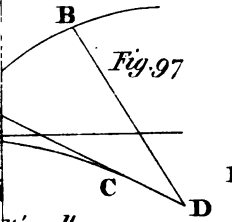


Fig. 97

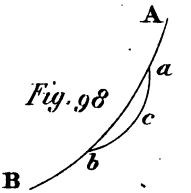


Fig. 98

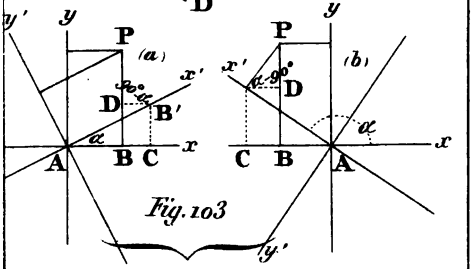


Fig. 103

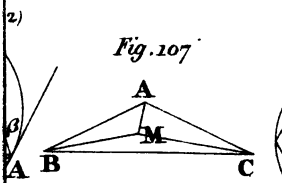


Fig. 107

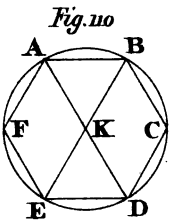
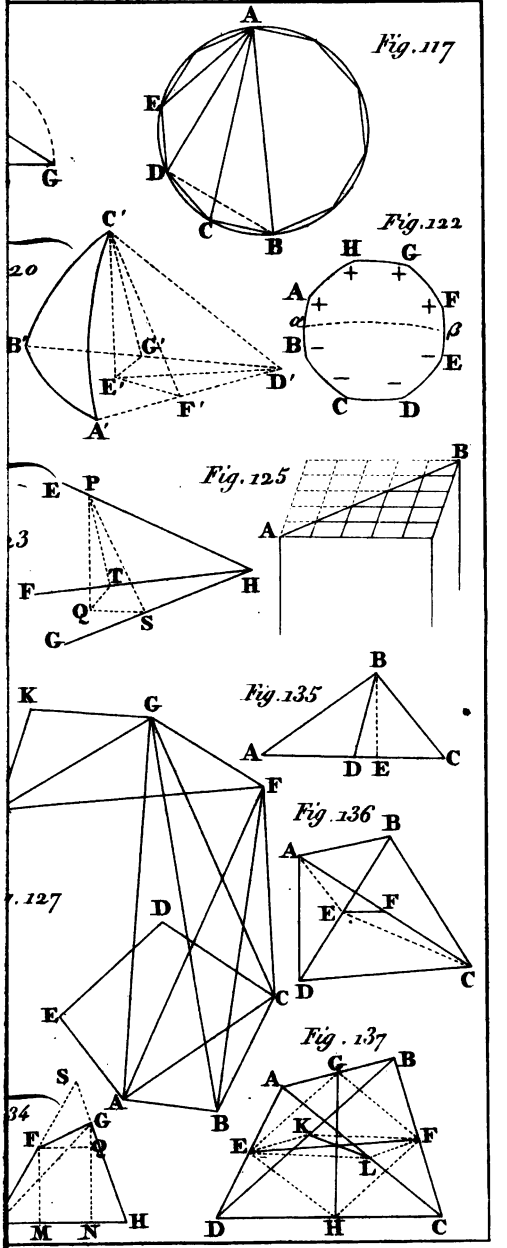


Fig. 110

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google